QUAERERE VERUM

Universidad de SanAndrés

Teorema de punto fijo de Banach en el Modelo de Golub Elliot y Jackson

MENTOR: DANIEL FRAIMAN BORRAZAS

ALUMNO: MANUEL ALEJANDRO VIRIEUX ROSADO

Agosto de 2022

I. Introducción

Un sistema financiero es un conjunto de instituciones que permite el intercambio de activos y fondos entre, dicho de forma amplia, organizaciones. Esto existe en esencia para ampliar las restricciones presupuestarias por medio de instrumentos de deuda; no obstante ello, la propia naturaleza de este sistema complejo reside en que es rentable en cuanto exista *leverage* y, así, al existir siempre un riesgo de quiebra de cualquier organización, existe un riesgo de un contagio financiero (Allen y Gale,).

Así entonces llamaremos a un contagio financiero a *shocks* negativos que inicialmente afectan a una o unas pocas organizaciones y que son esparcidos al resto del sector financiero para así ïnfectar.ª mayor escala. Existen ejemplos como la inestabilidad bancaria en Europa producida por los *defaults* de deuda soberana en Grecia, o los efectos de la quiebra de Lehman Brothers respecto a la caída de compañías de seguro en todo el mundo. O, ejemplos no tan recientes como la çrisis del tequila"propagada desde México en 1994 o la crisis asiática del 1997 - el *Asian Flu* - donde *shocks* al mercado de valores tailandés se expandieron por el resto del mundo (Glasserman y Young,).

Podemos entonces afirmar que los contagios financieros son en realidad verdaderas alarmas mundiales, que amenazan constantemente la estabilidad económica internacional. Es por esto que, debido a la relevancia del problema, existe un sinfín de artículos dedicados a estudiar los canales y los mecanismos mediante los cuales el contagio ocurre.

Existen fundamentos macroeconómicos, donde principalmente se estudian los comovimientos de los precios de activos como en (Kaminsky y Reinhart,) o en (Pritsker,); también los hay macroeconómicos como (Glasserman y Young,) o (Dornbusch, Park, y Claessens,) donde las funciones de utilidad están microfundadas, se podría decir que en alguna medida en (Elliott, Golub, y Jackson,) cuestiones como la penalidad que reciben las organizaciones están del mismo modo microfundadas.

Por otro lado, existe una visión del contagio financiero mediante herramientas de redes. En especifico, esta literatura se ha dedicado a estudiar las propiedades mas generales de una de contagio financiero. El gran pionero en esto fue (Eisenberg y Noe,), quien mostró como es fijado el precio de los depósitos interbancarios cuando los pasivos de los bancos son los activos de otros. Otros resultados importantes en esta literatura incluyen la idea de que las redes completamente conectadas, en las cuales todas las organizaciones están ligadas, aun indirectamente, son mas robustas a shocks dado que el riesgo es repartido; no obstante, a mayor integración, mayor probabilidad de ver una cascada ante un shock de mucho impacto (Castiglionesi, Feriozzi, Lóránth, y Pelizzon,).

Esto último va en la linea del trabajo de(Castiglionesi y cols.,) que muestran que un mayor grado de integración financiera lleva consigo tasas de interés mas estables, pero con tasas mucho mayores durante crisis. En ese mismo orden de ideas, y de forma mas general; en (Elliott y cols.,) estudiaron dos aspectos generales muy importantes a la hora de entender los contagios financieros: la integración (que tanto de una organización esta sostenida por otras) y la diversificación (se refiere a la cantidad de organizaciones sobre las cuales la organización esta sostenida).
En el presente trabajo nos dedicaremos a discutir este paper y de proponer alternativas a ciertos supuestos -*assumptions*- fuertes que hacen dentro del modelo (en especial en su función de penalidad). Si bien no fue posible extender hasta la propia simulación, estas alternativas promueve una idea de usar el modelo para efectivamente conseguir los equilibrios sin necesidad de realizar simulaciones.
En el siguiente capítulo hablaremos del modelo tal como lo describen los autores. En el capítulo 3 discutiremos la principal propuesta de este trabajo, en el que se hará uso del Teorema de punto fijo de Banach para encontrar los posibles equilibrios y en el capítulo 4 hablaremos sobre una función de penalildad infinitamente derivable.

II. Modelo

Existen N organizaciones (bancos, firmas, paises, etc). El valor de las organizaciones esta basado en los activos (*assets*) M que posee con $M = \{1, 2..., m\}$. El precio de cada activo sera escrito como p_k y $D_{ik} \geq 0$ la proporción del *asset* $k \in M$ que es propiedad de la organización i.
La interconectividad de la red sera representada por el hecho de que una organización también puede poseer (cross-hold) recursos de otras organizaciones. Por cada $i, j \in N$ el numero $C_{ij} \geq 0$ es la proporción de la organización j que es propiedad de la organización i, donde $C_{ii} = 0$ para cada i. **C** es la matriz y puede ser pensada como una red. Además, los autores denotan a

$$\hat{C_{ii}} := 1 - \sum_{j \neq i} C_{ji}$$

como la fracción de la organización i que no es propiedad de ninguna organización $j \neq i$.
La manera en la que los autores computan el valor de todos los activos de una organización (el valor contable) es la siguiente:

$$V_i = \sum_{j \neq i} C_{ij} V_j + \sum_k D_{ik} p_k$$

$\sum_k D_{ik} p_k$ hace referencia a los activos que la organización posee directamente mientras que $\sum_{j \neq i} C_{ij} V_j$, esto implica que el valor de la organización depende del valor de otras. Matricialmente puede escribirse como

$$V = Dp + CV \iff V = (I - C)^{-1} Dp$$

Cabe notar que esta es una definición de punto fijo del valor de todas las acciones.
No obstante existe un problema de doble conteo, pues los activos de la organización i están contados en su propio valor pero también en el de otras organizaciones para los que $C_{ij} \geq 0$. Así entonces, los autores definen el valor de mercado como el valor que últimamente pertenece a los inversores privados de la organización.

$$v_i = \hat{C}_{ii} V_i$$

O, vectorialmente:

$$v = \hat{C}(I - C)^{-1} Dp$$

Hasta acá podría decirse que es un modelo básico de *cross-holdings*. Sin embargo, los autores realizan un gran aporte mediante la incorporación de costos de quiebra (o penalidad); argumentan que cuando se atraviese un cierto limite de quiebra el valor de una empresa no cae continuamente si no de forma discontinua.
Así, si el valor de mercado de la organización i cae por debajo de un valor límite $\underline{v}$, su valor cae en un numero $\beta_i \geq 0$.
Se puede reescribir entonces el valor de la organización como

$$v = \hat{C}(I - C)^{-1}(Dp - b(v, p)) = F(v)$$

Donde

$$b_i(b, p) = \beta_i I_{v_i < \underline{v}}$$

El valor de las organizaciones es entonces el punto fijo $(v_1, v_2, ..., v_n)$ Esta discontinuidad es justificada por costos discontinuos del capital (en ciertas industrias como la aérea), costos legales de banca rota o por uso ineficiente de activo desde un cierto punto de no retorno.
La función de penalidad será la parte clave de las dos criticas de esta tesis y respecto a eso, se tiene dos criticas principales: 1) La penalidad es la misma una vez que el valor de la organización pasa un punto limite, esto no es generalizable a menos que el *shock* que el contagio se esparza en un muy breve periodo de tiempo después de la caída. 2) El supuesto de que la penalidad es discontinua es muy razonable, no obstante no puede ser generalizado, por

ejemplo la crisis proveniente de la desaceleración china es conocida por la caída lenta y desgastadora que tuvieron las industrias. Así, en los siguientes capítulos discutiremos un poco mas estos dos puntos.
Después, los autores realizan un ejercicio de simulación, el cual si bien no sera el principal análisis de esta tesis resulta interesante comentar.
Primero, se supondrá que, cada organización posee exactamente un activo $m = n$ y $D = I$. Además cada activo arranca con el mismo precio. Por simplicidad $p_i = 1$ para todo i. Así entonces, los valores estarán determinados simplemente por la matriz C.

$$v = \hat{C}(I - C)^{-1} I = AI$$

El limite para recibir la penalidad sera $\underline{v} = \theta v_i$ para todo i, con $\theta = 0{,}93$. La matriz C sera derivada de una matriz de adyacencia G cuyas entradas serán 0 ó 1. Así, si $G_{ij} = 1$ entonces la organización i posee parte de la organización j. También supondremos que una fracción c de cada organización es propiedad de las otras (repartidas equitativamente entre las $d_i = \sum_j G_{ij}$ organizaciones que tienen propiedad de ella). En particular forman un grafo aleatorio, con probabilidad de una link directo de $\frac{d}{n-1}$.
Ahora para llevar a cabo la simulación llevan el precio de uno de los activos a 0 y se fija $c = 0{,}5$ y $n = 100$. El principal resultado que estudiamos es la cantidad de numero de caidas.

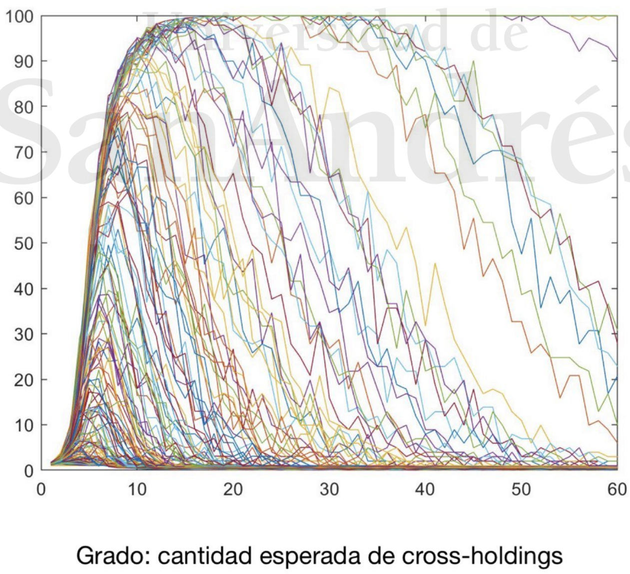

Figura 1

En el eje x se muestra con cuantas organizaciones una organización tiene una relación financiera y en el eje y se muestra la fracción de organizaciones que quiebra. Ahí se puede observar que para baja diversificación no existen caídas y para mucha diversificación tampoco las hay. Lo interesante es que para una diversificación media si hay un pico de caídas.

III. Función de penalidad creciente

Como señalamos antes, el problema del acercamiento de los autores es que la penalidad es siempre la misma desde un punto dado, cuando es dable pensar que esta podría ser mayor a medida que el valor de la organización cae. En (Beard,), (Branch,) y en (Warner,) se puede ver que los costos de bancarrota son crecientes no solo por el desgaste de activos, sino por impuestos crecientes al capital, lo que nos hace pensar que tiene sentido pensar en costo creciente asociada únicamente al estado de bancarrota (la penalidad, en el modelo de Elliot).

Consideremos la siguiente penalidad:

$$b(\beta, v) = \beta I_{v<\bar{v}}(v - \bar{v})$$

$$v = F(\beta, v) = \hat{C}(1 - C)^{-1}(Dp - b(\beta, v))$$

Donde como adelantamos, esta es mayor a menor valuación.
Se puede analizar algo mas en esta nueva formulación. Recordemos que el valor de las organizaciones es una ecuación de punto fijo y que por la manera en la que esta expresada la función es imposible despejarla para potencialmente encontrar ese punto fijo.
Para tratar de saber si existe ese equilibrio, se hará uso del Teorema de Punto fijo de Banach con parametros (Anexo A). El problema para saber si $v = F(\beta, v) = \hat{C}(1 - C)^{-1}(Dp - b(\beta, v))$ es una contracción o no, es que sigue existiendo una discontinuidad, lo que complica la aplicación del Teorema.

Para solucionar esto, definamos primero $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ donde $\epsilon_i = 1$ o 0. Ahora definimos la función auxiliar

$$F_\epsilon(\beta, v) = \hat{C}(1 - C)^{-1}(Dp - \beta I_\epsilon(v - \bar{v})$$

Donde $I_\epsilon = \text{diag}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$.
Notemos que la función de valor es casi igual a la del articulo con la diferencia de que esta si es continua. La idea es que si $\epsilon_i = 1$ la organización i esta siendo penalizada. Esta elección desde luego es arbitraria pero como se vera al final del capitulo servirá para encontrar si en verdad la organización i fue o no penalizada.

Veamos que F_ϵ es una contracción

$$\|F_\epsilon(\beta,x) - F_\epsilon(\beta,y)\| = \|\hat{C}(1-C)^{-1}b((\beta,x) - b(\beta,y))\| = \|\beta I_\epsilon(x-y)\| \leq \|\beta\|\|x-y\|.$$

Entonces por el Teorema de punto fijo de Banach podemos afirmar que existe una única solución $v^\epsilon(\beta)$ para $F_\epsilon(\beta, v^\epsilon(\beta)) = v^\epsilon(\beta)$.
Ahora bien encontramos una solución para $F_\epsilon(\beta, v)$ y no así para F. Es decir, para un conjunto de organizaciones penalizadas, encontramos el equilibrio. Ahora, en el siguiente paso, si se testea $I_\epsilon = I_{v^\epsilon(\beta)<\bar{v}}$ y la igualdad se cumple, significa que encontramos un equilibrio del sistema y, en caso que la igualdad no se cumpla, no hay solución para $F(\beta, v) = v$ tal que $I_\epsilon = I_{v^\epsilon(\beta)<\bar{v}}$.

IV. Función de penalidad diferenciable

Ahora veamos la posibilidad de incluir una nueva función al modelo. Esta mantiene la idea de descontinuidad del articulo, pero con los beneficios de ser infinitamente derivable.
Como vimos, la función que describe el valor de mercado de las organizaciones esta dado por

$$V = Dp + CV - b(v,p), \tag{1}$$

Lo que implica que

$$v = \hat{C}(1-C)^{-1}(Dp - b(v,p)) = A(Dp - b(v,p)). \tag{2}$$

Ahora tratemos de entender, matemáticamente, cuales son los requerimientos de la función $b(v,p)$.
Primero que nada, todas las entradas deben ser positivas, de otra manera no seria una penalidad. Además, debe ser igual a cero si la condición para que exista penalidad no se cumple.
Desde luego que existen muchas funciones que satisfacen esos requerimientos, una opción, que es la que usa el articulo, es seleccionar

$$b(v,p) = \operatorname{diag}\left(\beta_1(p) I_{v<\bar{v}}(\bar{v}_1 - v_1), \ldots, (\beta_n(p) I_{v<\bar{v}}(\bar{v}_1 - v_1)\right), \quad \beta_j \geq 0 \tag{3}$$

Entonces, en lugar de usar funciones escalonadas como $I_{v<\bar{v}}$, uno podría considerar la siguiente función infinitamente diferenciable.

$$s_\epsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\epsilon x^2}} \text{ if } x \geq 0 \\ 0 \text{ if } x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Que se aproxima a $I_{v<\bar{v}}(\bar{v}_1 - v_1)$ cuando $\epsilon \to \infty$. Por eso

$$b(v, p) = \text{diag}\,(\beta_1(p)s(\bar{v}_1 - v_1), \ldots, (\beta_n(p)s(\bar{v}_1 - v_1)), \quad \beta_j \geq 0$$

es una alternativa continua a la del modelo original, y por lo menos esperamos que las soluciones de esta ultima recuperen las del modelo cuando $\epsilon \to \infty$.

V. Conclusión

El trabajo de Elliott Golub y Jackson presenta un modelo relativamente simple pero con un mensaje muy potente sobre los beneficios de tener sistemas financieros con un balanceo optimo entre diversificación e integración. El trabajo acá presentado simplemente estudia sobre posibles cambios que podría tener el modelo, en principio no hablamos nada sobre las repercusiones en las simulaciones. No obstante ello, se espera que ayude en la capacidad de calcular y encontrar exactamente esos valores de equilibrio. Hay muchas extensiones analíticas que podrían seguir haciéndose. Por ejemplo, ¿existe una sola solución?. En principio, sabemos que siempre existirá cuando usamos la función auxiliar y si $I_{\epsilon^1} = I_{v^{\epsilon^1}\bar{v}}$ entonces esta hecho. Pero una idea plausible para buscar soluciones (en un estudio mas profundo) $\epsilon^1 = (0, \ldots, 0)$ (ninguna organización recibe penalización) y si $I_{\epsilon^1} / neq I_{v^{\epsilon^1}\bar{v}}$ proseguir inductivamente. Estas son solo especulaciones pero se espera que el trabajo haya servido para analíticamente discutir algunos supuestos que el modelo emplea.

Anexo A

Theorem 0.1 (Teorema de Punto fijo de Banach con parametros)**.** *Sea M un espacio métrico completo $F : \mathbb{R}^n \times M \to M$ una función continua tal que $\|F(\lambda, x) - F(\lambda, y) \leq C(\lambda)\|x - y\|$ para alguna constante $C(\lambda) < 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Entonces, una única función $\lambda \mapsto x(\lambda)$ que satisface $F(\lambda, x(\lambda)) = x(\lambda)$, Además, esta función es continua y satisface*

$$\|x(\lambda) - x(\mu)\| \leq \frac{1}{1 - C(\lambda)} \|F(\lambda, x(\mu)) - F(\mu, x(\mu))\|. \tag{5}$$

Demostración. Fijamos $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Entonces, la función $F_\lambda : M \to M$ es una contracción estricta $F_\lambda(x) = F(\lambda, x)$. Tomando $x_0 \in M$, la sucesion $(F_\lambda^n(x_0))_n \subset M$ es una sucesión de Cauchy y converge a algún punto $x(\lambda) \in M$ tal que $F_\lambda(x(\lambda)) = x(\lambda)$ y este punto es único.

Notese que,

$$\begin{aligned}
\|x(\lambda) - x(\mu)\| &= \|F(\lambda, x(\lambda)) - F(\mu, x(\mu))\| \\
&\leq \|F(\lambda, x(\lambda)) - F(\lambda, x(\mu))\| + \|F(\lambda, x(\mu)) - F(\mu, x(\mu))\| \\
&\leq C(\lambda)\|x(\lambda) - x(\mu)\| + \|F(\lambda, x(\mu)) - F(\mu, x(\mu))\|.
\end{aligned}$$

Por eso $\|x(\lambda) - x(\mu)\| \leq \frac{1}{1-C(\lambda)}\|F(\lambda, x(\mu)) - F(\mu, x(\mu))\|$ y sigue de la continuidad de F, fijando la segunda variable, that $x(\lambda)$ es continuo. $\square$

Referencias

Allen, F., Gale, D. (2000). Financial contagion. *Journal of political economy*, *108*(1), 1–33.

Beard, T. R. (1990). Bankruptcy and care choice. *The RAND Journal of Economics*, 626–634.

Branch, B. (2002). The costs of bankruptcy: A review. *International Review of Financial Analysis*, *11*(1), 39–57.

Castiglionesi, F., Feriozzi, F., Lóránth, G., Pelizzon, L. (2014). Liquidity coinsurance and bank capital. *Journal of Money, Credit and Banking*, *46*(2-3), 409–443.

Dornbusch, R., Park, Y. C., Claessens, S. (2000). Contagion: Understanding how it spreads. *The World Bank Research Observer*, *15*(2), 177–197.

Eisenberg, L., Noe, T. H. (2001). Systemic risk in financial systems. *Management Science*, *47*(2), 236–249.

Elliott, M., Golub, B., Jackson, M. O. (2014). Financial networks and contagion. *American Economic Review*, *104*(10), 3115–53.

Glasserman, P., Young, H. P. (2015). How likely is contagion in financial networks? *Journal of Banking & Finance*, *50*, 383–399.

Kaminsky, G. L., Reinhart, C. M. (2000). On crises, contagion, and confusion. *Journal of international Economics*, *51*(1), 145–168.

Pritsker, M. (2001). The channels for financial contagion. En *International financial contagion* (pp. 67–95). Springer.

Warner, J. B. (1977). Bankruptcy costs: Some evidence. *The journal of Finance*, *32*(2), 337–347.