CICLO DE SEMINARIOS 1995

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

POSTULADOS CONTINUOS Y DISCRETOS EN MODELOS DE CRECIMIENTO OPTIMO

Betina Duarte

UNIVERSIDAD DE SAN ANDRES
BIBLIOTECA

QUAERERE VERUM

Universidad de San Andres

Sem.
Eco.
96/19

Universidad de
San Andres

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

POSTULADOS CONTINUOS Y DISCRETOS EN MODELOS DE CRECIMIENTO OPTIMO

Betina Duarte (Universidad de San Andrés)

Universidad de
SanAndrés

UNIVERSIDAD DE SAN ANDRES
BIBLIOTECA

CICLO DE SEMINARIOS 1996

Día: Martes 25 de junio

9:00 hs.

POSTULADOS CONTINUOS Y DISCRETOS EN MODELOS DE CRECIMIENTO OPTIMO

BETINA DUARTE

1. INTRODUCCIÓN

En el año 1960 Koopmans [K] elaboró un modelo de crecimiento en el que el tiempo era tratado como una variable discreta, intentando describir un conjunto más general de funciones de utilidad que las utilizadas en modelos anteriores. Estas consistían en una serie de utilidades instantáneas descontadas. El modelo de Koopmans parte de una serie de supuestos como los de estacionariedad y no complementariedad limitada en el tiempo que le permiten concluir que sus funciones de utilidad tienen una tasa de preferencia temporal variable. Además las funciones de utilidad quedan caracterizadas por una función de agregación. Posteriormente Mantel [M4] elaboró el modelo para tiempo continuo en base a supuestos similares a los de Koopmans. Mantel mostró que la función de bienestar de un programa puede ser evaluada como el valor inicial de la solución de una ecuación diferencial que relaciona el incremento marginal en la utilidad prospectiva debido al adelanto del programa con la utilidad instantánea de la canasta de bienes descartada. Para estas funciones de bienestar la tasa de preferencia temporal también es variable. En su trabajo Mantel definió como programas de consumo funciones de variación uniformemente acotada sobre compactos.

El propósito de este trabajo es dar una demostración rigurosa de las afirmaciones del trabajo de Mantel [M4] en el sentido de que si la función de bienestar de tiempo continuo se considera restringida a programas constantes a trozos de una misma longitud fija se puede ver como una función de utilidad de tiempo discreto y en este caso verifica los postulados de Koopmans.

Para esto mostraremos que el conjunto de funciones de variación uniformemente acotada constituye un espacio métrico separable, puesto que se aproximan por funciones constantes en intervalos de idéntica longitud en todo el eje positivo.

También mostraremos que, como en el caso discreto, si un programa se pospone indefinidamente, anteponiendo una canasta que se extiende a lo largo del tiempo de espera, la utilidad de dicho programa tiende al de la canasta.

Deseo agradecer al profesor Rolf Mantel su propuesta de estudiar este problema así como también sus comentarios que resultaron para mí sumamente valiosos . También quiero agradecer al profesor Ignacio Zalduendo sus estimulantes sugerencias y observaciones.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

2. Descripción de los modelos de tiempo discreto y continuo.

Presentamos en esta sección una breve descripción de los espacios de programas de los modelos de Mantel y Koopmans, sus elementos y las métricas respectivas tanto para la variable continua como para la discreta que se utilizaran en el trabajo.

Tiempo Continuo [M4]

Los posibles valores de consumo están representados por un conjunto $C \subset I\!R^n_{\geq 0}$ acotado y conexo.

Un programa de consumo será una función $x : [0, \infty) \longrightarrow C$ de variación uniformemente acotada sobre compactos de $[0, \infty)$, es decir que existen constantes T y M positivas tales que en cualquier intervalo $[t, t+T] \subset I\!R_{\geq 0}$ x es una función de variación acotada con cota M y, por lo tanto, en cada $[t\ , t+T]$ existen funciones no decrecientes en cada una de sus coordenadas $p(s)$, $n(s)$ que verifican

$$\forall s \in [t, t+T] \qquad \begin{aligned} x(s) &= p(s) - n(s) \\ V_t^s(x) &= p(s) + n(s) \end{aligned}$$

Convenimos en llamar a $V_t^s(x)$ la variación de x desde t hasta s si bien $V_t^s(x)$ es un vector cuya coordenada i-ésima es la variación de la coordenada i-ésima de $x(s)$. La variación verifica entonces:

$$\| V_t^{t+T}(x)\| \leq M$$

donde las barras de módulo significan $\|x(s)\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i(s)|$ pues $x(s) \in I\!R^n$

Siendo funciones de variación acotada se pueden suponer continuas a derecha en todo $[0, \infty)$ (las funciones monótonas crecientes o decrecientes tienen una cantidad numerable de discontinuidades que son saltos y podemos modificarlos para que resulten continuas a derecha; veremos que la distancia que vamos a definir sólo las distingue pp). Notaremos con X al conjunto de programas de consumo. Cuando un programa sea constante, i.e. $\forall t \;\; x(t) = c$ lo identificaremos con la canasta de mercancías que se consume durante todo tiempo t. Así también $z = (b_s; {}_s x)$ significa que el programa z consume la canasta b hasta tiempo $t = s$ y luego consume el programa x pero no desde su comienzo sino desde $t = s$. En otras palabras

$$z(t) = \begin{cases} b & \text{si} \quad t < s \\ x(t) & \text{si} \quad t \geq s \end{cases}$$

Más generalmente $z = ({}_r x_s; {}_u y)$ significa que

$$z(t) = \begin{cases} x(t+r) & \text{si} \quad t < s - r \\ y(t - (s-r) + u) & \text{si} \quad t \geq s - r \end{cases}$$

Convenimos que $b_s = {}_o b_s$ y ${}_s x = {}_s x_\infty$. Luego ${}_\epsilon x$ será un desplazamiento a izquierda del programa x pues según la notación

$$ {}_\epsilon x(t) = x(t+\epsilon) \quad \forall\, t \geq 0 $$

En el conjunto X de programas de consumo se define una distancia:

$$ d(x,y) = \sup_{t\geq 0} \int_t^{t+T} \|x(s) - y(s)\| ds $$

Luego (X,d) resulta un espacio métrico y las funciones se distinguen pp. Observemos que con esta métrica el consumo del futuro tiene el mismo peso que el del presente y que, la distancia entre dos consumos x e y no se altera si se desplaza a ambos del mismo modo. Esto es, dados x , y y z

$$ d(x,y) \;=\; d[(z_t,x),(z_t,y)] $$

y no aumenta si se desplaza a izquierda, es decir,

$$ d[({}_t x),({}_t y)] = d(x,y) $$

Veamos que un programa está cerca de un pequeño desplazamiento de sí mismo. Dado que $\forall\, t$:

$$ \begin{aligned} \int_t^{t+T} \|x(s+\epsilon) - x(s)\| ds &\leq \int_t^{t+T} \|V_t^{s+\epsilon}(x) - V_t^s(x)\| ds = \\ &= \int_t^{t+\epsilon} \|V_t^{s+T}(x) - V_t^s(x)\| ds = \\ &= \int_t^{t+\epsilon} \|V_s^{s+T}(x)\| ds \leq \epsilon M \end{aligned} $$

donde K es cota para el conjunto C de los valores de la canasta que es acotado, luego

$$ d(x, {}_\epsilon x) \leq \epsilon M $$

Tiempo discreto [K]

Los programas de consumo están representados por sucesiones con la siguiente notación

$$ {}_1 x := (x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots) = (x_1; {}_2 x) = (x_1; x_2; {}_3 x) $$

donde cada $x_i \in C \subset I\!R^n_{\geq 0}$ C conexo y x_i representa el consumo del período i.
Llamamos también X al espacio de programas de consumo y consideramos en X la distancia

$$ d({}_1 x; {}_1 x') = \sup_n \|x_n - x'_n\| $$

Hay que notar que, ya que los programas toman valores en $I\!R^n$ deberíamos especificar a qué norma nos referimos. En su trabajo Koopmans deja libre la elección pues todas son equivalentes. En este trabajo, para unificar la notación, usaremos la misma que para tiempo continuo.

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés

3. Un teorema de aproximación para tiempo continuo

Teorema. *El espacio X de funciones de tiempo continuo $x : [0;\infty) \longrightarrow C$ de variación uniformememte acotada sobre compactos de $[0;\infty)$ es separable. Toda $x \in X$ puede ser aproximada por funciones constantes a trozos de la misma longitud; i.e. dado $x \in X$ y $\epsilon > 0$ existe $r : [0;\infty) \longrightarrow C \cap \mathbb{Q}^n$ y existe δ suficientemente pequeño tal que r es constante sobre los intervalos $I_n = [n\delta;(n+1)\delta)$ $n \in \mathbb{N}$ y*

$$d(x;r) < \epsilon$$

Dem: Supondremos que $x(t)$ es un programa a valores en $\mathbb{R}$ para simplificar la notación, pues la demostración en $\mathbb{R}^n$ es análoga. Separando la recta en los intervalos [0,T] ; [T,2T] ;... [nT,(n+1)T] ... esta función x genera una sucesión de funciones

$$x_n : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x_n(r) = x(nT + r) \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{que verifican}$$

$$\forall\, n \quad V_0^T(x_n) \leq M \text{ y } \forall\, t \in [0,T] \;\; |x_n(t)| \leq K$$

es decir que son funciones acotadas y de variación acotada en el [0,T] que podemos suponer continuas a derecha.
Dado ϵ sea $J \in \mathbb{N}$: $J > \frac{MT}{\epsilon}$. Dividimos el intervalo [0,T] en intervalos de medida $\frac{T}{J}$, $I_0 = [0, \frac{T}{J}]$ $I_1 = [\frac{T}{J}, \frac{2T}{J}]$ ... $I_r = [\frac{rT}{J}, \frac{(r+1)T}{J}]$ ... y en cada I_h definimos una función g_n constante a trozos para cada x_n como sigue

$$\text{dado} \quad s \in I_h \quad g_n(s) = x_n(\frac{hT}{J}) = \lim_{s \to \frac{hT}{J}+} x_n(s) \quad . \qquad \text{Tenemos que}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T |x_n(s) - g_n(s)|ds &= \sum_{h=0}^{J-1} \int_{I_h} |x_n(s) - g_n(s)|ds \\
&\leq \sum_{h=0}^{J-1} \sup_{s \in I_h} |x_n(s) - g_n(s)|\; m(I_h) \\
&\leq \sum_{h=0}^{J-1} V_{I_h}(x_n - g_n)\; m(I_h) \\
&= \sum_{h=0}^{J-1} V_{I_h}(x_n)\; m(I_h) \leq \frac{T}{J} \sum_{h=0}^{J-1} V_{I_h}(x_n) \\
&= \frac{T}{J}\; V_0^T(x_n) \;\leq\; \frac{MT}{J} < \epsilon
\end{aligned}$$

En esta serie de desigualdades se usó que para toda f , $V_a^b(f - \text{cte}) = V_a^b(f)$ y que si se tiene una función f tal que $f(a) = 0$ entonces $\sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \leq V_a^b\,(f)$. $m(I_h)$ indica la medida del intervalo I_h.

QUAERERE VERUM Universidad de San Andrés

Por lo tanto cada x_n tiene una g_n constante en trozos de igual longitud $(\frac{T}{J})$ suficientemente cerca. Si ahora volvemos a considerar el programa x y una función g que es la unión de las g_n se tiene que, dado δ existe t_0 tal que:

$$d(x,g) = \sup_t \int_t^{t+T} |x(s) - g(s)|ds < \int_{t_0}^{t_0+T} |x(s) - g(s)|ds + \delta \leq 2\epsilon + \delta$$

ya que el intervalo $[t_0; t_0+T]$ puede estar en a lo sumo dos intervalos de la división anterior. Siendo que esta desigualdad vale $\forall \delta$

$$d(x,g) \leq 2\epsilon$$

Observemos que cada $g_n(s)$ puede ser aproximada por otra constante racional, i.e. podemos definir otra función constante sobre los I_h y a valores racionales $r_n(s)$ tal que

$$|g_n(s) - r_n(s)| < \frac{\epsilon}{T} \quad \forall\, s \in [0,T]$$

$$\text{y así} \quad \int_0^T |g_n(s) - r_n(s)|ds < \epsilon$$

$$\text{Luego} \quad \int_0^T |x_n(s) - r_n(s)|ds < 2\epsilon$$

Es fácil ver que dada la proximidad de g y de r al programa x ambos resultan funciones del espacio donde estamos trabajando pues resultan de variación uniformemente acotada. Siendo r el programa que resulta de la unión de los r_n se tiene que r aproxima a x. El conjunto de funciones constantes a trozos de longitud $\frac{T}{J}$ en el $[0,T]$ a valores racionales es numerable. Entonces variando $J \in I\!N$ y considerando la unión a lo largo del eje positivo también. Luego el espacio X tiene un subconjunto denso numerable.

4. Postulados para tiempo continuo y discreto

Koopmans [K] y Mantel [M4] elaboraron una lista de postulados para tiempo discreto y continuo que ahora vamos a citar de modo de tenerlas presentes en lo que sigue. Los motivos y la necesidad de cada uno de ellos se hallan en los respectivos trabajos.

Tiempo continuo

P.1$_c$ Existencia y continuidad

Existe una función de utilidad W definida sobre X que satisface la condición de Lipschitz

$$|W(x) - W(y)| \leq K_l\, d(x,y) \quad \text{para alguna constante } K_l.$$

$W(x)$ se denomina **utilidad prospectiva o bienestar** del programa x. Para una canasta se define $u(c) := W(c)$ la **utilidad inmediata o instantánea** de la canasta.

P.2$_c$ Sensitividad

Existen dos programas x e y que coinciden a partir de algún instante y que difieren en su utilidad i.e.

$$W(x_s;{}_sx) > W(y_s;{}_sx)$$

P.3$_c$ No complementariedad limitada

Para todos los programas $x, y \in X$, para todas las canastas de consumo b, c y para todo tiempo s

$$W(b_s;x) \geq W(c_s;x) \Longrightarrow W(b_s;y) \geq W(c_s;y)$$

P.4$_c$ Estacionariedad

Para toda duración de tiempo s y programas $x, y \in X$

$$W(x) \geq W(x_s;y) \Longleftrightarrow W({}_sx) \geq W(y)$$

P.5$_c$ Programas extremos

Existen $\underline{x}$ $\overline{x} \in X$ programas tales que $\forall\, x \in X$

$$\underline{W} := W(\underline{x}) \leq W(x) \leq W(\overline{x}) := \overline{W}$$

Tiempo discreto

P1$_d$ Existencia y continuidad

Existe una función de utilidad U definida sobre X (donde X es el espacio de sucesiones) con la siguiente propiedad de continuidad. Si U_0 es un valor de la función y U', $U"$ son tales que

$$U' < U_0 < U"$$

existe un número $\delta > 0$ tal que si ${}_1x$ verifica $U({}_1x) = U_0$ y si $d({}_1x, {}_1x') \leq \delta$, entonces

$$U' \leq U({}_1x') \leq U"$$

P2$_d$ Sensitividad

Existen dos vectores de consumo para el primer período x_1 , x_1' y un programa a partir del segundo período ${}_2x$ tales que

$$U(x_1;{}_2x) > U(x_1';{}_2x)$$

P3$_d$ No complementariedad limitada

Para todo $x_1; x_1'; {}_2x; {}_2x'$ se tiene

$$\text{(3a)} \qquad U(x_1;{}_2x) \geq U(x_1';{}_2x) \Longrightarrow U(x_1;{}_2x') \geq U(x_1';{}_2x')$$

UNIVERSIDAD DE SAN ANDRES
BIBLIOTECA

$$\text{(3b)} \qquad U(x_1;{}_2x) \geq U(x_1;{}_2x') \Longrightarrow U(x_1';{}_2x) \geq U(x_1';{}_2x')$$

(3a) también se puede escribir:

$$U(x_1;{}_2x) > U(x_1';{}_2x) \Longrightarrow U(x_1;{}_2x') > U(x_1';{}_2x') \quad \text{y}$$

$$U(x_1;{}_2x) = U(x_1';{}_2x) \Longrightarrow U(x_1;{}_2x') = U(x_1';{}_2x')$$

(3b) también se puede escribir:

$$U(x_1;{}_2x) > U(x_1;{}_2x') \Longrightarrow U(x_1';{}_2x) > U(x_1';{}_2x') \quad \text{y}$$

$$U(x_1;{}_2x) = U(x_1;{}_2x') \Longrightarrow U(x_1';{}_2x) = U(x_1';{}_2x')$$

P4$_d$ Estacionariedad

Para todo $x_1;{}_2x;{}_2x'$ se tiene que

$$U(x_1;{}_2x) \geq U(x_1;{}_2x') \Longleftrightarrow U({}_2x) \geq U({}_2x')$$

Es decir que el orden de programas que coinciden en el primer período no se altera al avanzar el tiempo.

P5$_d$ Programas extremos

Existen programas ${}_1\underline{x}$ ${}_1\overline{x} \in X$ tales que $\forall\ {}_1x \in X$

$$\underline{U} := U({}_1\underline{x}) \leq U({}_1x) \leq U({}_1\overline{x}) := \overline{U}$$

5. La función de bienestar

El propósito ahora es mostrar que una función de utilidad que cumple los postulados de tiempo continuo verifica los de tiempo discreto si solo se la considera sobre funciones constantes a trozos.

Veremos que cada vez que dividimos el intervalo $[0, \infty)$ en intervalos de medida $h > 0$

$$I_0 = [0;h) \quad I_1 = [h;2h) \quad \ldots\ I_n = [nh;(n+1)h) \ \ldots$$

y consideramos aquellos programas $x \in X$ de tiempo continuo que son constantes en cada I_n los programas son admisibles como sucesiones poniendo ${}_1x = (x_1;x_2;\ldots;x_n;\ldots)$ donde $x_n = x_{|I_n}$ y la función W define una función de utilidad

$$U^h({}_1x) := W(x)$$

Esta función de utilidad y los programas cumplen los postulados de tiempo discreto.

Teorema. *Dada una función de utilidad W que cumple los postulados de tiempo continuo, se tiene que: para todo $h > 0$ los programas $(x_{|I_1}; x_{|I_2}; \dots)$ y la función de utilidad U^h cumplen los postulados de tiempo discreto.*

Dem: Comencemos con el postulado de continuidad $\mathbf{P1}_d$. Sea α un valor de U^h y sean U', U'' y ${}_1x$ tales que $U' < U^h({}_1x) = \alpha < U''$. Sea $d = \min\{U'' - \alpha; \alpha - U'\}$ y sea K_l la constante de Lipschitz de W. Sea ${}_1z$ otra sucesión tal que $\sup_n \|x_n - z_n\| < \dfrac{d}{K_l T}$. Si notamos como x y z a las funciones asociadas a las sucesiones, es decir que $x_{|I_n} = x_n$ y $z_{|I_n} = z_n$ tenemos

$$d(x,z) = \sup_t \int_t^{t+T} \|x(s) - z(s)\| ds < \sup_t \int_t^{t+T} \frac{d}{K_l T} = \frac{d}{K_l}$$

$$\Longrightarrow |U^h({}_1x) - U^h({}_1z)| = |W(x) - W(z)| \leq K_l \; d(x;z) < d$$

$$\Longrightarrow -d + \alpha = -d + U^h({}_1x) < U^h({}_1z) < d + U^h({}_1x) = d + \alpha$$

$$\Longrightarrow U' < U^h({}_1z) < U''$$

Luego U^h verifica el postulado de continuidad. Veamos los postulados $\mathbf{P3}_d$ a) y $\mathbf{P4}_d$. Si se verifica $P3_c$ $\forall\, s, \forall\, b, c$ canastas y $\forall z, w$ programas y se tienen funciones constantes a trozos que ya notamos como sucesiones $x = {}_1x; x' = {}_1x'$ basta tomar $s = h$ y se tiene

$$U^h(x_1; {}_2x) \geq U^h(x_1'; {}_2x) \Longrightarrow U^h(x_1; {}_2x') \geq U^h(x_1'; {}_2x')$$

El postulado $P4_d$ es directamente el mismo enunciado. Para ver el $P3_d$ $b)$ tenemos que usar dos veces el $P4_d$

$$U^h(x_1; {}_2x) \geq U^h(x_1; {}_2x') \Longrightarrow U^h({}_2x) \geq U^h({}_2x') \Longrightarrow U^h(x_1'; {}_2x) \geq U^h(x_1'; {}_2x')$$

El postulado $P2_d$ de sensitividad no sólo involucra a U^h sino también a los programas. Queremos ver que existen dos sucesiones que coinciden salvo en el primer período y que tienen distinta utilidad. Tenemos dos programas, en tiempo continuo, que coinciden a partir de un instante s y

$$W(x_s; {}_sx) > W(y_s; {}_sx)$$

Supongamos que existe $\delta :\ 0 < \delta < s$ tal que

$$W({}_{s-\delta}x_s; {}_sx) = W({}_{s-\delta}y_s; {}_sx)$$

Entonces

$$W(y_{s-\delta};{}_{s-\delta}x_s;{}_sx) = W(y_{s-\delta};{}_{s-\delta}y_s;{}_sx)$$
$$\Longrightarrow W(x_s;{}_sx) > W(y_{s-\delta};{}_{s-\delta}x_s;{}_sx)$$
$$\Longrightarrow W(x_{s-\delta};{}_{s-\delta}x) > W(y_{s-\delta};{}_{s-\delta}x)$$

y estos programas coinciden desde antes. Luego podemos adelantarlo todo lo que sea necesario y suponer, entonces, que existen dos programas tales que

$$W(x_s;{}_sx) > W(y_s;{}_sx)$$

y que las utilidades de $({}_tx_s;{}_sx)$ y de $({}_ty_s;{}_sx)$ no se igualan en ningún momento $t < s$. Como estas utilidades no se igualan y la función:

$$\alpha : [0,s] \longrightarrow I\!R_{\geq 0} \quad \alpha(r) = W({}_rx_s;{}_sx) - W({}_ry_s;{}_sx)$$

es continua y verifica $\alpha(0) > 0$, $\alpha(s) = 0$, $\alpha(r) \neq 0 \ \forall r < s$, entonces no existe r tal que $\alpha(r) < 0$. La continuidad de α se deduce de la condición de Lipschitz de la función $H(t) = W({}_tx)$ (ver [M4]).

Teniendo en cuenta esto último y los programas $(x_s;{}_sx)$ y $(y_s;{}_sx)$ podemos suponer que $s = \frac{h}{n}$ tomando n adecuado, luego dividir $[0,s]$ en intervalos I_k de medida $\frac{h}{Jn}$, $J \in I\!N$ y aproximar a x_s e y_s por funciones constantes a trozos $g_x = (x_1;...;x_J)$ y $g_y = (y_1;...;y_J)$. (Hay aquí un abuso de notación; g_x y g_y están sólo definidas en $[0;s)$ y valen en cada I_k las constantes indicadas. En lo sucesivo usaremos esta notación identificando a las funciones constantes a trozos con las sucesiones que indican el valor de las constantes y solo habrá que aclarar cuál es la duración de esa constante).

Con una buena aproximación seguirá valiendo la desigualdad i.e.

$$W((x_1;...;x_J);{}_sx) > W((y_1;...;y_J);{}_sx)$$

Si tomamos el último podemos suponer

$$W(x_J;{}_sx) > W(y_J;{}_sx) \qquad (*)$$

(en realidad podemos suponer que son distintos pero cualquier desigualdad nos sirve) pues si fueran iguales, cambiamos las colas como antes y tenemos

$$W((x_1;...;x_{J-1});x_J;{}_sx) > W((y_1;...;y_{J-1});x_J;{}_sx)$$

Esta situación podría repetirse hasta tener en última instancia

$$W((x_1;x_2...;x_{J-1};x_J);{}_sx) > W((y_1;x_2;...;x_{J-1};x_J);{}_sx)$$

En cualquier caso conseguimos dos programas, con distinta utilidad, que coinciden después de un primer período de duración $\frac{h}{Jn}$ donde cada uno es constante.
Ahora completamos con constantes hasta tener una primera parte de longitud h

Por $P4_c$ y $(*)$ $\qquad W(x_J; x_J; {}_s x) > W(x_J; y_J; {}_s x)$

Por $P3_c$ y $(*)$ cambiando ${}_s x$ por $(y_J; {}_s x)$ $\qquad W(x_J; y_J; {}_s x) > W(y_J; y_J; {}_s x)$

Las dos últimas desigualdades nos dicen que

$$W(x_J; x_J; {}_s x) > W(y_J; y_J; {}_s x)$$

De la misma manera, por inducción, se tiene que $\forall\, m \in I\!N$

$$W(\underbrace{x_J; \ldots; x_J}_{m \text{ veces}}; {}_s x) > W(\underbrace{y_J; \ldots; y_J}_{m \text{ veces}}; {}_s x)$$

en particular Jn veces para tener una primer constante de longitud h. Cambiando arbitrariamente la cola por una cola de constantes a trozos (de longitud h) digamos $z = (z_1; z_2; \ldots; z_n; \ldots) = {}_1 z$

$$U^h(x_1; {}_1 z) = W(x'_h; z) > W(y'_h; z) = U^h(y_1; {}_1 z)$$

donde $x'_h(s) \equiv x_1$ y $y'_h(s) \equiv y_1$.

Por lo tanto W define una función de utilidad que verifica todos los postulados salvo, hasta aquí, el de programas extremos $P5_d$. Antes de demostrar este postulado, necesitamos ver la siguiente proposición.

Proposición. *$\forall$ programa x , $\forall$ canasta c y $\forall$ tiempo t*

$$\lim_{n \to \infty} W(c_{nt}; x) = u(c)$$

donde $(c_{nt}; x)$ es el programa que consume la canasta c durante el intervalo $[0, nt)$.

Dem: Tomemos al tiempo como una variable discreta y supongamos tener una función de utilidad U que verifica todos los postulados salvo, quizás, el de programas extremos. Consideremos una sucesión de consumo $(w_1; w_2; \ldots)$ dada por un patrón $w = (w_1; \ldots; w_r)$ que se repite y notemos

$$U_n(\text{rep}w; {}_1 x) = U_n(\text{rep}(w_1; \ldots; w_r); {}_1 x) = U(\underbrace{(w_1; \ldots; w_r)}_{n \text{ veces}}; {}_1 x)$$

Se tiene entonces por [K]

$$\lim_{n \to \infty} U_n(\text{rep}w; {}_1 x) = U(\text{rep}w)$$

donde rep$w$ es la serie de consumo dada por repetir el patrón indefinidamente.

Supondremos ahora que $t \in I\!R$ y x una función constante a trozos de longitud $\frac{t}{J}$ para algún $J \in I\!N$, llamamos $h = \frac{t}{J}$. Podemos identificar a x como antes con la sucesión que indica los valores de las constantes que toma $x = {}_1x$. Luego

$$W(c_t; x) = U^h((c_1; ...; c_J); {}_1x)$$

$$\Longrightarrow W(c_{nt}; x) = U_n^h(\text{rep}(c_1; ...; c_J); {}_1x) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} U^h(\text{rep}(c_1; ...; c_J)) = U^h(c) = W(c)$$

Si ahora x es una función cualquiera admisible y $t \in I\!R$ dado ϵ existe, por el teorema de la sección 3, J y una función constante a trozos de longitud $\frac{t}{J} = h$ que notamos $g_x = (x_1; x_2; \dots)$ tal que

$$d(x; g_x) < \frac{\epsilon}{K_l}$$

(recordemos que K_l es la constante de Lipschitz) y por lo tanto esta distancia va a ser la misma si anteponemos secciones de los mismos programas. Entonces

$$d((c_{nt}; x); (c_{nt}; g_x)) < \frac{\epsilon}{K_l} \quad \forall n \qquad (* *)$$

Luego siendo

$$W(c_t; g_x) = U^h((c_1; \dots; c_J); {}_1x)$$

$$W(c_{nt}; g_x) = U_n^h(\text{rep}(c_1; \dots; c_J); {}_1x)$$

Se tiene por $(* *)$

$$|W(c_{nt}; x) - U_n^h(\text{rep}(c_1; ...; c_J); {}_1x)| < \epsilon$$

Entonces se tiene que para todo $n \geq n_0$

$$|W(c_{nt}; x) - W(c)| = |W(c_{nt}; x) - U^h(c)| < 2\epsilon$$

Con lo que hemos demostrado la proposición.

Finalmente, volviendo a la demostración del teorema, vamos a ver que a partir de esta proposición se puede mostrar que la U^h también verifica el postulado $P5_d$ de programas extremos. Sea $\overline{x}$ el mejor programa de tiempo continuo. Se tiene

$$W(\overline{x}_t; \overline{x}) \leq W(\overline{x})$$

pero si fuera $W(\overline{x}_t; \overline{x}) < W(\overline{x})$ se tendría por $P4_c$ que $W(\overline{x}) < W({}_t\overline{x})$; lo que es un absurdo pues $\overline{x}$ es el mejor programa. Luego

$$W(\overline{x}_t; \overline{x}) = W(\overline{x})$$

Universidad de San Andrés

Por inducción , $\forall n \in I\!N$

$$W(\overline{x}_{nt};\overline{x}) = W(\overline{x})$$

Como $\overline{x}$ es continua a derecha en $t = 0$ dado ϵ existe $\delta < 1$ tal que si $s < \delta$ entonces $\|\overline{x}(s) - \overline{x}(0)\| < \frac{\epsilon}{TK_l}$. Sea $c = \overline{x}(0)$. Tenemos

$$d\big((\overline{x}_\delta;\overline{x});(c_\delta;\overline{x})\big) \leq \int_0^\delta \|\overline{x}(u) - c\| du < \frac{\delta\epsilon}{TK_l} < \frac{\epsilon}{TK_l}$$

Entonces

$$|W(\overline{x}_\delta;\overline{x}) - W(c_\delta;\overline{x})| < \epsilon$$

y también, para todo $n \in I\!N$ tal que $n\delta > T$

$$d\big((\overline{x}_{n\delta};\overline{x});(c_{n\delta};\overline{x})\big) \leq \int_0^T \|(\overline{x}_{n\delta})(u) - c\| du < \frac{\epsilon}{K_l}$$

Luego

$$|W(\overline{x}_{n\delta};\overline{x}) - W(c_{n\delta};\overline{x})| < \epsilon$$

Siendo $\overline{W} = W(\overline{x}_{n\delta};\overline{x})$ y tomando límite podemos escribir

$$|\overline{W} - \lim_{n \longrightarrow \infty} W(c_{n\delta};\overline{x})| < \epsilon$$

y por la proposición

$$|\overline{W} - W(c)| < \epsilon \quad \forall \epsilon$$

luego, podemos concluir

$$W(c) = \overline{W}$$

Entonces el mejor programa que se obtiene para tiempo discreto funciona para todo h y es una constante. Observemos que tiene que ser el máximo para toda U^h pues el rango de U^h está contenido en el de W. El razonamiento es el mismo para el peor programa con lo cual hemos verificado el postulado $P5_d$.

QUAERERE VERUM
Universidad de San Andrés

REFERENCIAS

[K] Koopmans, T.C., *Stationary Ordinal Utility and Impatience*, Econometrica 28 (1960) 287-309.

[KDW] Koopmans, T.C., Diamond, P., Williamson, R., *Stationary Utility and Time Perspective*, Econometrica 32 (1964), 82-100.

[M1] Mantel, R.R., *Sobre la tasa de preferencia temporal*, Instituto Torcuato Di Tella, mimeo, (1966), junio.

[M2] Mantel, R.R., *Tentative list of postulates for a utility function for an infinite future with continuous time*, Cowles Foundation for Research in Economics, CF-70525, (1967a) May 25.

[M3] Mantel, R.R., *Maximization of utility over time with a variable rate of time-preference*, Cowles Foundation for Research in Economics, CF-70525, (1967b) May 25.

[M4] Mantel, R.R., *On the utility of infinite programs when time is continuous*, trabajo presentado en el "Second World Congress of The Econometric Society", Cambridge, U.K. Mimeo, Instituto Torcuato Di Tella, (1970) septiembre. Resumen en Econometrica 38.

[M5] Mantel, R.R., *Grandma's dress, or what's new for optimal growth*, Revista de Análisis Económico 8 (1993), junio, 61-81.

Departamento de Economía y Matemática
Universidad de San Andrés
C.C. 1983-Correo Central
(1000) Buenos Aires
Argentina

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés