



UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS

ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN Y NEGOCIOS

MAGISTER EN FINANZAS

**Valuación de bonos convertibles bajo
un modelo de *default* dependiente del
spread de crédito**

AUTOR: NICOLÁS BENIELLI

DNI: 32.945.815

DIRECTOR: ELSA CORTINA

Buenos Aires, Febrero de 2019

A Elsa Cortina

A Gabriel Basaluzzo



Universidad de
San Andrés

Indice

1	Introducción a finanzas cuantitativas	1
1.1	Introducción	1
1.2	Conceptos de probabilidad y cálculo estocástico	2
1.3	Modelado de los mercados financieros	8
1.4	Valuación de derivados <i>multi-asset</i>	13
1.4.1	Modelo general de n factores	14
1.4.2	Instrumentos no comercializables	21
2	Introducción a la valuación de bonos convertibles	23
2.1	Definición y principales características	23
2.2	Revisión bibliográfica y modelos de valuación	26
2.2.1	Primeros trabajos	26
2.2.2	Bonos <i>defaultables</i> : <i>Structural approach</i> vs. <i>Reduced-</i> <i>form approach</i>	28
2.2.3	Modelos modernos para la valuación de CBs	29
3	Modelo general de valuación de bonos convertibles	32
3.1	Supuestos del modelo	33

3.2	Derivación de una Inecuación en Derivadas Parciales y características contractuales	36
4	Modelo de valuación mediante árboles trinomiales	43
4.1	Modelo	43
4.2	Esquema discreto basado en árboles multinomiales	44
4.3	Arbol trinomial de dos factores y algoritmo de <i>backward induction</i>	49
4.4	Resultados numéricos	50
5	Modelo de valuación mediante el método de <i>Least-Squares</i> Monte Carlo	54
5.1	Introducción	54
5.2	Método de <i>least-squares</i> Monte Carlo	57
5.3	<i>Least-squares</i> Monte Carlo aplicado a bonos convertibles . . .	59
5.3.1	Modelo	59
5.3.2	Esquema de cálculo	61
5.4	Resultados numéricos	64
6	Conclusiones	71
	Bibliografía	73
	Apéndice	78
	Apéndice A: deducción de la <i>PDI</i> para el bono convertible	78
	Apéndice B: Códigos de MATLAB	83
	Código para el método de árboles multinomiales	83

Código para el método de *least-squares* Monte Carlo 88



Universidad de
San Andrés

Abstract

El objetivo de este trabajo es proponer un modelo de valuación para bonos convertibles en el que se incorpora el *default* como un evento tanto endógeno como exógeno a la compañía que los emite. El modelo general planteado se basa en cuatro factores de riesgo correlacionados: el precio de la acción subyacente, su volatilidad, la tasa libre de riesgo y el *spread* de crédito. La innovación principal consiste en incorporar como factor de riesgo de crédito el *spread* crediticio en lugar de la *hazardrate*, y definir el default como un evento que ocurre cuando el *spread* alcanza una barrera superior. El modelo de *spread* propuesto es una difusión con saltos que permite los dos casos posibles de default: endógeno a la compañía, que involucra un aumento progresivo del *spread* asociado a un decrecimiento gradual del precio de la acción, y exógeno a la compañía, es decir, debido a un salto discontinuo en el *spread*, que supera la barrera, producido por factores externos.

En el el Capítulo 1 se introducen los conceptos fundamentales de las Finanzas Cuantitativas que luego se usan para la derivación del modelo. En el Capítulo 2 se introducen los bonos convertibles y se hace una revisión literaria sobre los diferentes modelos para su valuación. En el Capítulo 3 se plantea el modelo general de valuación de bonos convertibles de cuatro factores riesgo, y se deriva una desigualdad en derivadas parciales para el caso de volatilidad constante. En el Capítulo 4 se estudia el caso particular en el cual los factores de riesgo modelados son el precio de la acción subyacente y el *spread*, modelando a este último como un proceso estocástico log-normal

y correlacionado negativamente con la acción. El método discreto empleado es el de árboles multinomiales, basado en el trabajo de [He(1990)]. En el capítulo 5 se estudia el caso general, primero con volatilidad constante y luego considerando un modelo de volatilidad estocástica tipo Heston (ref). El método discreto empleado en esta sección es el de *least-squares* Monte Carlo, basado en el trabajo de [Longstaff(2001)]. Por último, en el capítulo 6 se discuten y comparan los resultados obtenidos, proponiendo también alternativas para futuras mejoras del modelo.



Universidad de
San Andrés

Capítulo 1

Introducción a finanzas cuantitativas



1.1 Introducción

La matemática financiera es una rama de la matemática aplicada que surge como resultado del trabajo en conjunto entre economistas, matemáticos y *practitioners* del mundo financiero. Sus orígenes se remontan a la década de 1920 con los trabajos de Louis Bachelier sobre el comportamiento aleatorio del precio de las acciones, continuado a partir de 1970 cuando Fischer Black, Myron Scholes y Robert C. Merton ([Black(1973)], [Merton(1974)]) desarrollaron su modelo de valuación de opciones que les valió el Premio Nobel de economía en 1997¹. Basa sus fundamentos principalmente en la teoría de probabilidades y cálculo estocástico. A su vez, los métodos numéricos y cálculo computacional resultaron ser herramientas de suma importancia para

¹Lamentablemente, Fisher Black no vivió para recibir dicho premio

el estudio de problemas financieros cuya solución analítica es difícil de hallar.

El objetivo fundamental de la matemática financiera es la determinación de los precios "justos" (también conocidos como precios libres de arbitraje) de los derivados financieros, como por ejemplo el precio de una opción de compra sobre una acción. Conocer los precios justos permite tomar decisiones tanto de inversión como de cobertura de riesgos.

En el tratamiento axiomático de la matemática financiera, el axioma principal es que los subyacentes (por ejemplo, el precio de una acción) se comportan de manera aleatoria. En este capítulo se hará una breve introducción a los conceptos matemáticos básicos que permiten entender los fundamentos del cálculo financiero moderno.

1.2 Conceptos de probabilidad y cálculo estocástico

La base de la teoría de probabilidades consiste en la posibilidad de realizar experimentos de forma repetitiva. Se denomina **espacio muestral** Ω al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. Los subconjuntos de Ω se denominan *sucesos* o *eventos*.

Definición 1.2.1. Sea Ω un espacio muestral no vacío. Una σ -álgebra \mathcal{F} de Ω es una familia de subconjuntos de Ω que satisface a las siguientes tres propiedades:

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de \mathcal{F} , entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F};$$

- (iii) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.

Las σ -álgebras se utilizan para representar el tipo de información que se puede obtener a partir de un espacio muestral. Por ejemplo, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ indica que se carece de información sobre Ω , mientras que si $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, es decir el conjunto de todos los subconjuntos de Ω , la información sería completa. En particular, en este trabajo asumimos la σ -álgebra de Borel, denotada por $\mathbf{B}(\mathbb{R})$, que es la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los intervalos $(a, b]$ de \mathbb{R} .

Definición 1.2.2. Se denomina **espacio medible o probabilizable** a un conjunto (Ω, \mathcal{F}) .

Definición 1.2.3. Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , se denomina **medida de probabilidad** (o simplemente **medida**) \mathbb{P} a la función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ que satisface a los tres axiomas de Kolmogorov:

- (i) $\mathbb{P}(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{F}$;
- (ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (iii) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en \mathcal{F} con $A_n \cap A_m = \emptyset \forall n \neq m$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Definición 1.2.4. Se denomina **espacio de probabilidad** a la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ constituída por un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y una medida de probabilidad \mathbb{P} definida sobre \mathcal{F} .

Definición 1.2.5. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama **variable aleatoria** si para cada $B \in \mathbf{B}$ entonces que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, lo cual es equivalente a decir que X es \mathcal{F} -medible.

Definición 1.2.6. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, se define como **proceso estocástico** a una familia de variables aleatorias $\{X_t \mid t \geq 0\}$. Para cada $\omega \in \Omega$, se define a $X_t(\omega)$ como la **trayectoria** de X_t asociada con ω .

Definición 1.2.7. Se denomina **filtración** de un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) a una familia de σ -álgebras $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ tales que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$.

Definición 1.2.8. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ está **adaptado** a una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ si es \mathcal{F}_n -medible $\forall n$.

El concepto de procesos adaptados a filtraciones es fundamental en finanzas. Intuitivamente, la filtración de un proceso como el del precio de una acción se puede pensar como la serie temporal (es decir, realizada) de dicho precio en un intervalo temporal. El valor que puede tomar un proceso estocástico a tiempo t depende únicamente de la información disponible hasta

ese tiempo, es decir, de su filtración. A continuación se introduce una clase de procesos adaptados empleado en el modelado matemático de las finanzas.

Definición 1.2.9. Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dotado de la filtración $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. El proceso $(M_t)_{t \geq 0}$ es una \mathbb{P} -**martingala** si

- (i) $(M_t)_{t \geq 0}$ es F -adaptado;
- (ii) $E^{\mathbb{P}}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \forall s \leq t$;
- (iii) $E^{\mathbb{P}}(\|M_t\|) < \infty \forall t \geq 0$.

Es decir, si para un dado tiempo $t \geq s$ la filtración es \mathcal{F}_s , entonces M es martingala si su valor a tiempo t es M_s .

Las martingalas desempeñan un papel central en la matemática financiera, y en la práctica son la base para la determinación de los precios justos².

Los precios de los activos financieros pueden modelarse como procesos estocásticos. En particular, se construyen a partir del proceso estocástico que se define a continuación.

Definición 1.2.10. Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) dotado de la filtración $F = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Un **Movimiento Browniano** (estándar) o **proceso de Wiener** se define como proceso estocástico $\{W_t | 0 \leq t \leq T\}$ relativo a F tal que cumple

- (i) $W_0 = 0$ con probabilidad 1;

²Entendiéndose "en la práctica" como una alternativa a la valuación mediante la construcción de una estrategia replicante. Esta equivalencia está dada por el teorema de Harrison y Pliska [Harrison(1983)], ver 1.3.1.

- (ii) W_t es continuo en t ;
- (iii) W_t es adaptado a F ;
- (iv) Si $0 \leq s < t$, el incremento $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s y está normalmente distribuido con media cero y varianza $t - s$.

Si bien los movimientos Brownianos son la base de la construcción de modelos financieros, no sirven para modelar directamente a los precios de los activos por dos razones:

- a) Los precios de los activos inician con valor no nulo a $t = 0$
- b) Los movimientos Brownianos pueden tomar valores negativos

En general, lo que se suele hacer es construir procesos a partir del movimiento Browniano. Un ejemplo muy utilizado es el llamado **movimiento geométrico Browniano**, el cual resulta de una transformación exponencial del movimiento Browniano estándar W_t . Consideremos por ejemplo una acción S_t , caracterizada por una tendencia μ y una volatilidad σ , ambas constantes y positivas. Si suponemos que el precio inicial de esta acción es S_0 , podemos caracterizar el siguiente movimiento Browniano geométrico para modelar su evolución en el tiempo, según

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}$$

Esta forma de modelar los activos financieros fue utilizado por Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton ([Black(1973)], [Merton(1974)]) para la deducción de su famosa fórmula para la valuación de opciones europeas.

Para llegar a las ideas fundamentales que subyacen a esta teoría, es necesario introducir los conceptos de integración estocástica, lema de Ito y cambio de medida. La **integral estocástica** se define a partir de la variable aleatoria

$$X_T = \int_0^T g(t) dW_t,$$

o bien, escrito de forma diferencial (que es la forma más habitual de representar las variaciones de los procesos estocásticos, aunque la menos formal ya que se trata únicamente de notación)

$$dX_T = g(t) dW_t,$$

donde W_t es un movimiento Browniano estándar. De esta forma, se denomina **ecuación diferencial estocástica** a una ecuación de la forma

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t.$$

Sin entrar en detalles sobre la teoría de integración estocástica, en el caso de tener funciones que dependen de X_t , $f(t, X_t)$, el **Lema de Ito** permite expresar la ecuación diferencial estocástica de $f(t, X_t)$ como:

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t} \mu(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \sigma^2(t, X_t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \sigma(t, X_t) dW_t,$$

asumiendo que la función $f(t, X_t) \in C^2$ (es decir, tiene segundas derivadas parciales continuas) y además $\int E\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}\right) ds < \infty$.

1.3 Modelado de los mercados financieros

Los conceptos introducidos en la sección anterior son el punto de partida para la formulación matemática del comportamiento de los mercados financieros.

El precio de una acción se puede modelar, bajo ciertos supuestos, a partir de un movimiento geométrico Browniano caracterizado únicamente por su media μ y su varianza σ . Asimismo, variables de mercado como la tasa de interés (que sirve para representar el valor temporal del dinero), el valor de firma de una empresa, el nivel de deuda, el spread de crédito, también son consideradas como factores de riesgo en el modelado de los instrumentos que constituyen al mercado financiero.

Otro tipo de instrumentos financieros son los **derivados**, los cuales se construyen a partir de subyacentes. Un ejemplo de derivado es una opción call, el cual es un contrato que le da al tenedor la opción, pero no la obligación, de comprar el subyacente sobre el cual está pactado (por ejemplo una acción en particular) a un determinado precio. Si bien se puede seguir el precio de mercado de una opción call como si fuera una variable observable, es evidente que este precio va a depender del precio del subyacente. Se puede pensar entonces que el precio de esta opción, $C(t)$, es una función del precio de la acción, $C(t) = f(S_t)$. Cuando el precio de un derivado se puede determinar a partir de la compra y venta de otros activos, se dice que el precio del derivado se obtiene por **replicación**. Asimismo, si se establece un determinado proceso que representa el valor tiempo del dinero, llamado **numerario**, es posible obtener el valor de un instrumento derivado a partir

del comportamiento de sus subyacentes y de la función que determina el pago al vencimiento (conocida como función de *payoff*). Dejando como referencia los libros de Baxter & Rennie y Willmott [Baxter and Rennie(2003)] para una lectura más profunda, una posible síntesis de los principios fundamentales de la valuación de derivados podría ser la siguiente:

- Si un instrumento derivado se puede replicar (*hedged*) mediante la compra y venta (*trading*) de otros activos (*assets*), entonces el precio del derivado es el **costo de la estrategia** de *trading* replicante.
- El precio descontado de un activo básico comercializable es martingala bajo una medida de probabilidad asociada a un numerario.
- En un **mercado completo**, cualquier *payoff* se puede sintetizar a través de una estrategia de *trading* autofinanciante, y la medida de martingala asociada al numerario es única. En un **mercado incompleto** hay derivados que no pueden ser perfectamente *hedgedos*.

A continuación se precisarán estas ideas, comenzando por definir los conceptos de estrategia de *trading*, mercado libre de arbitraje y medida equivalente de martingala.

Definición 1.3.1. Supongamos un mercado compuesto por k activos, un inversor adopta una **estrategia de *trading*** seleccionando un conjunto, o portafolio, de activos $\{S_1, \dots, S_k\}$ cuyo valor a tiempo $t = 0$ es V_0 . Sea H una estrategia de *trading* que implica la elección de una determinada cantidad de

unidades de los activos para conformar el portafolio. Se dice entonces que la estrategia de *trading* H es **dominante** si existe otra estrategia \tilde{H} tal que $V_0 = \tilde{V}_0$ y $V_t > \tilde{V}_t$ para todo $t > 0$.

Un mercado que permite una estrategia de *trading* dominante no es un mercado realista, debido a que un inversor que comienza sin dinero podría terminar con algún retorno positivo invirtiendo en una determinada estrategia.

Definición 1.3.2. Hay oportunidades de **arbitraje** siempre que exista alguna estrategia de *trading* dominante, tal que $V_0 = 0$ y $E(V_t) > 0$ para algún $t > 0$.

Es decir, una oportunidad de arbitraje es aquella en la que un inversor podría obtener a un retorno positivo en algún momento del tiempo, sin ninguna inversión inicial (es decir, sin riesgo inicial). Desde un punto de vista económico, la "ley del precio único" implica que la existencia de oportunidades de arbitraje es irrazonable. Entonces, ¿cuál es la condición suficiente para que no existan tales oportunidades?. La respuesta se encuentra relacionada con una medida de probabilidad, llamada "**medida de riesgo neutro**" o "**medida equivalente de martingala**".

Definición 1.3.3. Dos medidas \mathbb{P} y \mathbb{Q} son **equivalentes** si para cualquier espacio muestral A se cumple

$$\mathbb{P}(A) > 0 \leftrightarrow \mathbb{Q}(A) > 0$$

En otras palabras, todo evento posible bajo \mathbb{P} lo es bajo \mathbb{Q} , y si algún evento B es imposible bajo \mathbb{P} también lo será bajo \mathbb{Q} .

Teorema 1.3.1. (Teorema de Harrison y Pliska).

Supongamos un mercado de k activos, un numerario y un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dotado con una filtración $F = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Entonces,

- El mercado es libre de oportunidades de arbitraje si y solo si existe al menos una medida equivalente \mathbb{Q} bajo la cual todos los activos descontados al numerario son martingala,
- En ese caso, si el mercado es completo, la medida \mathbb{Q} , o medida equivalente de martingala, es única.

Este teorema establece que para poder determinar precios libres de arbitraje es necesario encontrar una medida equivalente a \mathbb{P} que haga martingala a los procesos estocásticos de los activos descontados según el numerario elegido. Para encontrar esta medida equivalente se utiliza el teorema de Cameron-Martin-Girsanov.

Definición 1.3.4. Un proceso estocástico es \mathcal{F} -previsible si está adaptado a la filtración \mathcal{F} y sus trayectorias son continuas por izquierda.

Teorema 1.3.2. (Teorema de Cameron-Martin-Girsanov).

Si W_t es un movimiento \mathbb{P} -Browniano y λ_t es un proceso \mathcal{F} -previsible que satisface la condición $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\exp(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt)) < \infty$, entonces existe una medida \mathbb{Q} tal que

- 1. \mathbb{Q} es equivalente a \mathbb{P} ,

- 2. $\frac{dQ}{dP} = e^{(-\int_0^T \lambda_t dt - \int_0^T \lambda_t^2 dt)}$,
- 3. $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$ es un movimiento \mathbb{Q} -Browniano.

donde $\frac{dQ}{dP}$ simboliza la derivada de Radom-Nikodim.

Mediante este teorema se pueden expresar los procesos estocásticos que definen a la economía de un problema dado en una medida bajo la cual todos los activos, descontados a un numerario, sean martingala. Y según el teorema de Harrison y Pliska, únicamente bajo esta medida es posible obtener precios libres de arbitraje.

En este trabajo se propone un modelo multi-factor para valorar bonos convertibles, dos de cuyos factores no son comercializables: la tasa libre de riesgo y el *spread* de crédito; por lo consiguiente el mercado es incompleto y, en consecuencia, la medida de martingala no es única. Si bien para obtener precios libres de arbitraje es necesario encontrar una medida de martingala, para que el precio sea único dicha medida también lo debe ser. Esta situación únicamente sucede cuando el mercado es completo, es decir, en aquel mercado en el cual todo instrumento derivado se puede replicar a partir de los activos subyacentes y el numerario que definen el mercado. Esto no siempre es así; cuando se trabaja con factores de riesgo que corresponden a instrumentos no comercializables, se dice que hay incompletitud de mercado. Por lo tanto, en la siguiente sección se tratará de forma genérica la valuación de opciones *multi-asset*, considerando los casos de mercados incompletos.

1.4 Valuación de derivados *multi-asset*

Definición 1.4.1. Un proceso estocástico adaptado a un proceso de Wiener n -dimensional X es un proceso continuo $(X_t : 0 \leq t)$, tal que X_t puede ser escrito como

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^n \sigma_i(s) dW_s^i + \int_0^t \mu_s ds,$$

donde $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ y μ son procesos estocásticos \mathcal{F} -previsibles tales que la integral $\int_0^t (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(s) + |\mu_s|) ds$ es finita $\forall t$ con probabilidad 1.

La forma diferencial de esta ecuación se puede escribir como

$$dX_t = \sum_{i=1}^n \sigma_i(s) dW_s^i + \mu_t dt,$$

Supongamos una función $f \in C^2$ determinística, entonces $Y_t = f(X_t)$ es también un proceso estocástico, cuyo incremento viene dado por el Lema de Ito en su versión multi-factor:

$$dY_t = \sum_{i=1}^n (\sigma_i(t) f'(X_t)) dW_t^i + (\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t) f''(X_t)) dt.$$

También se extiende el teorema de Cameron-Martin-Girsanov al caso de n movimientos Brownianos. Sea $W = (W^1, \dots, W^n)$ un \mathbb{P} -movimiento Browniano n -dimensional, y supongamos que $\lambda_t = (\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^n)$ es un proceso \mathcal{F} -previsible n -dimensional que satisface $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{\frac{1}{2} \int_0^T |\lambda_t|^2 dt}] < \infty$, y sean los procesos

$$\widetilde{W}_t^i = W_t^i + \int_0^t \lambda_s^i ds.$$

Entonces, existe una medida equivalente \mathbb{Q} , tal que $\widetilde{W} = (\widetilde{W}^1, \dots, \widetilde{W}^n)$ es un un \mathbb{Q} -movimiento Browniano n -dimensional.

1.4.1 Modelo general de n factores

Supongamos una economía de mercado que está compuesta por n activos S_t^1, \dots, S_t^n y un bono B_t que utilizaremos como numerario (representando el valor-tiempo del dinero), tales que sus ecuaciones diferenciales estocásticas son

$$\begin{cases} dB_t = r_t B_t dt, \\ dS_t^i = S_t^i (\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) dW_t^j), \end{cases}$$

donde r_t es la tasa instantánea, μ_t^i es la tendencia (*drift*) del activo i , y $(\sigma_{ij})_{j=1}^n$ es el vector de volatilidades, los cuales forman la matriz de volatilidades $\Sigma_t = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$. En forma integral, se tiene

$$\begin{cases} B_t = e^{\int_0^t r_s ds}, \\ S_t^i = S_0^i e^{\int_0^t (\mu_s^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2(s)) ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(s) dW_s^j} \end{cases}$$

Para poder establecer el precio de un contrato que depende de estos activos, buscamos la medida \mathbb{Q} bajo la cual los procesos de los activos descontados al numerario, $Z_t^i = B_t^{-1} S_t^i$,

$$dZ_t^i = Z_t^i((\mu_t^i - r_t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)dW_t^j),$$

sean martingala de forma conjunta. Utilizando el teorema de Girsanov multi-factor (suponemos que se satisfacen todas sus hipótesis), sea $\lambda_t = (\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^n)$ un proceso \mathcal{F} -previsible tal que

$$\widetilde{W}_t^i = W_t^i + \int_0^t \lambda_s^i ds$$

es un movimiento \mathbb{Q} -Browniano, y bajo esta medida los procesos descontados resultan

$$dZ_t^i = Z_t^i((\mu_t^i - r_t - \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)\lambda_t^j)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)dW_t^j).$$

Para que estos procesos descontados sean martingala (y \mathbb{Q} sea la medida equivalente de martingala), los procesos de λ_t deben satisfacer

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)\lambda_t^j = \mu_t^i - r_t, \forall t, i = 1, \dots, n.$$

Expresado matricialmente,

$$\Sigma_t \lambda_t = \mu_t - r_t \mathbb{I},$$

donde Σ_t es la matriz de volatilidades y \mathbb{I} es el vector $(1, \dots, 1)$. Si Σ_t es invertible, existe un único proceso \mathcal{F} -previsible λ_t y es igual a

$$\lambda_t = \Sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t \mathbb{I}).$$

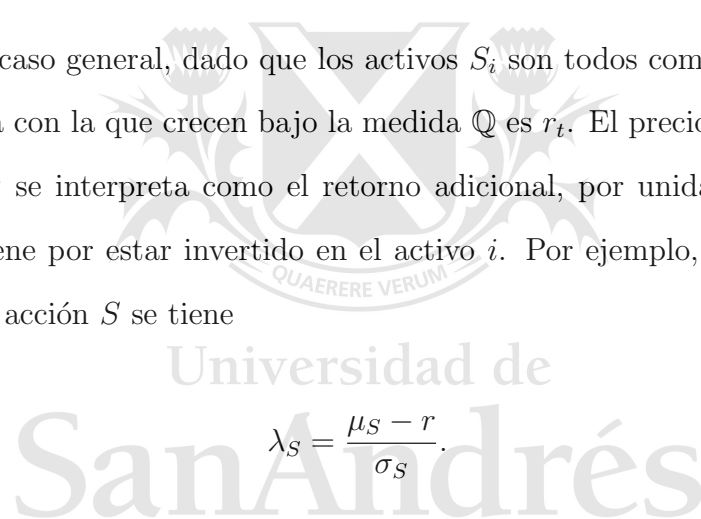
Los procesos λ_t^i se conocen como los **precios de mercado del riesgo** (o MPR por sus siglas en inglés) asociados a los activos S^i . Se tiene entonces

$$dZ_t^i = Z_t^i \left(\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) d\widetilde{W}_t^j \right),$$

con lo cual los procesos de los activos resultan, bajo \mathbb{Q} ,

$$dS_t^i = S_t^i (r_t dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) d\widetilde{W}_t^j).$$

En este caso general, dado que los activos S_i son todos comercializables, la tendencia con la que crecen bajo la medida \mathbb{Q} es r_t . El precio de mercado de riesgo λ^i se interpreta como el retorno adicional, por unidad de riesgo, que se obtiene por estar invertido en el activo i . Por ejemplo, para el caso de una sola acción S se tiene



$$\lambda_S = \frac{\mu_S - r}{\sigma_S}.$$

Una simplificación que se hizo en este caso general es que los n activos S_t^1, \dots, S_t^n y el bono B_t están incorrelacionados, la cual puede ser incorrecto. Cuando los activos que componen una determinada economía se encuentran correlacionados, una forma de trabajar con las ecuaciones en la medida \mathbb{Q} es expresándolas según movimientos Brownianos incorrelacionados. Para ello se utiliza la descomposición de Cholesky, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: dos factores de riesgo correlacionados.

Supongamos un derivado que depende de los factores de riesgo X_1 y X_2 ,

los cuales se encuentran correlacionados

$$\begin{cases} dX_1 = \mu_1 X_1 dt + \sigma_1 X_1 dW_1, \\ dX_2 = \mu_2 X_2 dt + \sigma_2 X_2 dW_2, \end{cases}$$

donde W_1 y W_2 son tales que $dW_1 dW_2 = \rho$. En este caso, la matriz de correlaciones C es

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Para pasar a la medida equivalente de martingala buscamos expresar los procesos X_1 y X_2 en función de movimientos Brownianos independientes, y para ello utilizamos la **descomposición de Cholesky**

$$C = U^T U,$$

donde U es una matriz triangular. Supongamos, por ejemplo, que es una matriz triangular

$$U = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$U^T U = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Despejando, tenemos

$$a = 1; b = \rho; c = \sqrt{1 - \rho^2},$$

De esta forma, los movimientos Brownianos W_1 y W_2 se pueden expresar a partir de dos procesos independientes \widetilde{W}_1 y \widetilde{W}_2

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{W}_1 \\ \widetilde{W}_2 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_1 = \widetilde{W}_1, \\ W_2 = \rho\widetilde{W}_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\widetilde{W}_2. \end{cases}$$

Y por lo tanto, los procesos X_1 y X_2 se pueden escribir como

$$\begin{cases} dX_1 = \mu_1 X_1 dt + \sigma_1 X_1 d\widetilde{W}_1, \\ dX_2 = \mu_2 X_2 dt + \sigma_2 \rho X_2 d\widetilde{W}_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} X_2 d\widetilde{W}_2, \end{cases}$$

Dado que $d\widetilde{W}_1$ se encuentra presente en ambas ecuaciones, el cambio de medida no es tan sencillo como en el caso de procesos incorrelacionados. En el caso de procesos correlacionados, utilizamos la forma matricial vista anteriormente, $\Sigma_t \lambda_t = \mu_t - r_t \mathbb{1}$, invirtiendo la matriz de volatilidades. De todas formas, dado que la dimensión es $n = 2$ es más sencillo hallar los λ s mediante reemplazos.

Utilizando el mismo numerario que en el ejemplo anterior para el caso de

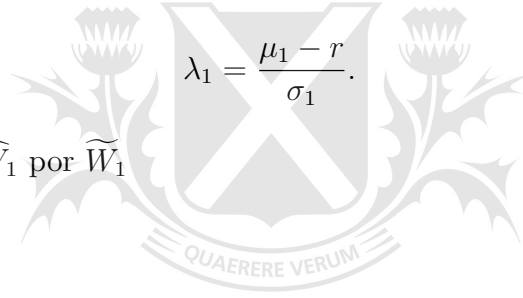
procesos incorrelacionados, los procesos descontados son

$$\begin{cases} dZ_1 = (\mu_1 - r)Z_1 dt + \sigma_1 Z_1 d\widetilde{W}_1, \\ dZ_2 = (\mu_2 - r)Z_2 dt + \sigma_2 \rho Z_2 d\widetilde{W}_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 d\widetilde{W}_2, \end{cases}$$

Para hacer martingala a X_1 el cambio de medida es

$$d\widehat{W}_1 = \widetilde{W}_1 + \lambda_1 dt,$$

con



$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}.$$

Reemplazando $d\widehat{W}_1$ por \widetilde{W}_1

$$\begin{cases} dZ_1 = \sigma_1 Z_1 d\widehat{W}_1, \\ dZ_2 = (\mu_2 - r - \sigma_2 \rho \lambda_1) Z_2 dt + \sigma_2 \rho Z_2 d\widehat{W}_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 d\widetilde{W}_2, \end{cases}$$

Supongamos el cambio

$$d\widehat{W}_2 = \widetilde{W}_2 + \lambda_2 dt,$$

Reemplazándolo en la ecuación para dZ_2 se tiene

$$dZ_2 = (\mu_2 - r - \sigma_2\rho\lambda_1 - \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}\lambda_2)Z_2dt + \sigma_2\rho Z_2d\widehat{W}_1 + \\ + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}Z_2d\widehat{W}_2.$$

Por lo tanto, para que Z_2 sea martingala se debe cumplir

$$\mu_2 - r - \sigma_2\rho\lambda_1 - \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}\lambda_2 = 0,$$

despejando λ_2 se tiene

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}}(\mu_2 - r - \sigma_2\rho\lambda_1).$$

Entonces, bajo la medida equivalente de martingala los procesos de Z_1 y Z_2 resultan

$$\begin{cases} dZ_1 = \sigma_1 Z_1 d\widehat{W}_1, \\ dZ_2 = \sigma_2 \rho Z_2 d\widehat{W}_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 d\widehat{W}_2, \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\begin{cases} dX_1 = rX_1dt + \sigma_1 X_1 d\widehat{W}_1, \\ dX_2 = rX_2dt + \sigma_2 \rho X_2 d\widehat{W}_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} X_2 d\widehat{W}_2, \end{cases}$$

Como es previsto, por ser un mercado completo ambos factores de riesgo crecen a (es decir, tienen un *drift* igual a) la tasa libre de riesgo bajo la me-

dida de martingala. Sin embargo, debido a las correlaciones los procesos ya no son independientes, aunque se pueden reescribir en función de movimientos Brownianos independientes a partir de la descomposición de Cholesky de la matriz de correlaciones.

1.4.2 Instrumentos no comercializables

Los modelos de valuación de bonos convertibles tratados en este trabajo consisten en factores de riesgo correlacionados, donde algunos se corresponden con instrumentos comercializables y otros no. Cuando un factor de riesgo no se corresponde con un instrumento comercializable, se debe buscar un instrumento comercializable relacionado con ese factor de riesgo, hallar una medida que haga martingala a dicho comercializable. Por ejemplo, supongamos un contrato que depende del siguiente proceso no comercializable (que puede ser la tasa de interés, el tipo de cambio, temperatura, spread de crédito, energía, viento, etc)

$$dX = \mu dt + \sigma dW$$

Supongamos además que existe una función determinística $Y = f(X)$, que representa a un instrumento que sí es comercializable. Por el lema de Ito se tiene

$$dY = \left(\mu \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial X} dW.$$

Como Y es comercializable, podemos escribir el MPR considerando como

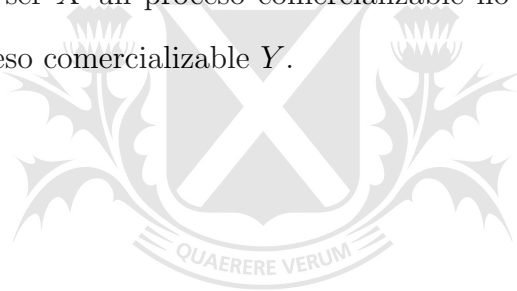
numerario un bono de descuento al igual que en el ejemplo anterior

$$\lambda = \frac{\mu \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} - r f}{\sigma \frac{\partial f}{\partial X}}.$$

Y dado que el MPR es el cambio de medida de \mathbb{P} a \mathbb{Q} , el proceso X bajo \mathbb{Q} resulta

$$dX = \frac{r f - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}}{\frac{\partial f}{\partial X}} dt + \sigma dW$$

Es decir, al no ser X un proceso comercializable no es martingala bajo \mathbb{Q} . Sí lo es el proceso comercializable Y .



Universidad de
San Andrés

Capítulo 2

Introducción a la valuación de bonos convertibles

2.1 Definición y principales características

Un **bono convertible** (que denotaremos **CB** por sus siglas en inglés) es un instrumento financiero que permite al tenedor convertirlo en una determinada cantidad de acciones, que pueden ser de la misma compañía que emite el CB o de otra. Esta opción de conversión a acciones hace que los CBs sean considerados instrumentos 'híbridos' con características tanto de deuda como de *equity*. Además, típicamente incluyen otro tipo de opcionalidades, siendo las más comunes la opción de *Call*, que le da el derecho al emisor de cancelar la deuda bajo determinadas circunstancias, y la opción de *Put*, que le da el derecho al tenedor de cambiar el CB por una cantidad de dinero prefijada. La opción de conversión a acciones queda únicamente a discreción del tenedor del CB, el cual se supondrá que sigue la estrategia óptima de convertir apenas

el valor de mercado del CB sea menor que el **valor de conversión**, el cual se define como

$$\text{Valor de conversión} = (\text{Precio de mercado de la acción}) \times (\text{Ratio de conversión})$$

donde el **ratio de conversión** es la cantidad de acciones por las cuales se puede convertir el CB, y está fijada en el prospecto de emisión, aunque también puede variar a lo largo del tiempo. Los CBs pagan cupones periódicamente y en la fecha de vencimiento pagan el valor principal (*face value*). En la práctica, se emplean *ratios* para comparar ciertas características de mercado de los CBs. Un CB puede valer como mínimo su valor de conversión, mientras que el hecho de tener una cobertura contra la caída del precio de la acción subyacente (es decir, su "componente" de bono) hace que su precio sea mayor. Se puede calcular entonces el **precio de mercado de conversión**, el cual se define como el precio que pagaría el tenedor del CB por la acción si ejerciera inmediatamente la opción de conversión:

$$\text{Precio de mercado de conversión} = (\text{Precio de mercado del CB}) / (\text{Ratio de conversión}),$$

el cual debe ser mayor o igual al precio de la acción subyacente. El tenedor del CB paga una prima respecto de este precio de la acción al comprarlo, lo cual se suele traducir al **ratio de prima por conversión**:

$$\text{Ratio de prima por conversión} = (\text{Precio de conversión} - \text{Precio de mercado del CB}) / (\text{Precio de mercado de la acción}).$$

La naturaleza híbrida de los CBs se puede pensar intuitivamente observando su comportamiento ante los distintos niveles que puede tomar el precio de la acción subyacente. Para valores muy pequeños, la probabilidad de que los tenedores ejerzan la opción de conversión es muy baja, y por lo tanto el CB se comporta de manera más parecida a un bono. En el otro caso, valores muy altos de la acción hacen que todos los tenedores estén dispuestos a convertir, y por lo tanto el CB se comportaría de manera parecida a una acción.

Los CBs pagan cupones menores a los de un bono corporativo estándar, pero dan al tenedor la ventaja de poder participar del crecimiento potencial de la compañía que los emitió, cubriéndose del riesgo de perder su inversión ante una caída del precio de las acciones, dado que siempre pueden cobrar el valor principal al vencimiento del CB. Por supuesto, esto último es válido siempre que la compañía no entre en *default*. Por otra parte, las empresas utilizan la emisión de CBs como una forma de levantar capital a bajo costo (ya que pagan menor cupón), y además si el valor de sus acciones sube y como consecuencia los tenedores convierten, entonces las empresas cancelan automáticamente su deuda.

El valor de un CB está relacionado con muchas variables, incluyendo el precio de la acción a la cual se puede convertir, su volatilidad, las tasas de interés, la calidad crediticia de la compañía y el consecuente riesgo de *default*, de la liquidez en el mercado, los impuestos, entre otras. Además, la opción de conversión generalmente es de tipo americana. Todo esto hace que los CBs sean instrumentos difíciles de valorar, lo cual resultó en varias

modelos de valuación. A continuación se hará una revisión bibliográfica de los principales modelos de valuación de CBs.

2.2 Revisión bibliográfica y modelos de valuación

2.2.1 Primeros trabajos

Los métodos de valuación de CBs comienzan con los trabajos de Ingersoll (1977) ([Ingersoll(1977a)]) y Brennan and Schwartz (1977) ([Brennan(1977)]), que aplican el método de valuación de opciones de Black and Scholes ([Black(1973)]) y Merton ([Merton(1974)]) al análisis de títulos convertibles dependientes de una sola variable. En Ingersoll (1977) ([Ingersoll(1977b)]) se deducen teoremas sobre restricciones racionales en la valuación de convertibles y se obtienen fórmulas cerradas para casos particulares. En el trabajo de Brennan y Schartz ([Brennan(1977)]) los autores consideran el pago de cupones discretos del bono y de dividendos discretos de la acción, el derecho del tenedor de convertir en cualquier momento, una opción de *Call* y la posibilidad del *default* en cualquier momento durante la vida del contrato, resolviendo el problema mediante el método de diferencias finitas. En un trabajo posterior, Brennan y Schwartz ([Brennan(1980)]) introducen en el modelo una tasa de interés estocástica como segundo factor relevante.

La necesidad de considerar el *default* de la compañía en los modelos de valuación de CBs es relevante, principalmente porque los CBs son emitidos por compañías en crecimiento que necesitan de esta "financiación barata".

Una forma de incorporar este riesgo de *default* es a través de un *spread* sobre la tasa libre de riesgo, de forma tal que se compensa al tenedor con una tasa mayor por el riesgo al que incurre. Dos modelos populares incorporan este concepto. Bardham et. al ([Bardhan(1994)]), plantean un modelo cuyo factor de riesgo es el precio de la acción y lo resuelven mediante un árbol binomial. En cada nodo del árbol, la tasa que utilizan para descontar los flujos de fondos de los nodos hijos es una tasa promedio entre la tasa libre de riesgo y una "tasa riesgosa", ponderadas según una probabilidad de *default* constante. Tsiveriotis y Fernandes (1998) descomponen al CB en dos partes con diferentes calidades de crédito: una solamente de deuda expuesta a riesgo de crédito, que genera pagos en efectivo se descuenta aplicando un *spread* a la tasa libre de riesgo, y una componente de *equity* que se considera libre de riesgo. Si bien estos modelos fueron populares entre los *practitioners*, presentan una serie de inconsistencias tanto teóricas como prácticas, así como también el hecho de que no estudian qué sucede ante un evento de *default* de la compañía emisora. El estudio en más detalle del evento de *default* en la valuación no sólo de CBs sino también de bonos corporativos en general dió a lugar a dos enfoques opuestos, que consideran al *default* como un evento endógeno a la compañía o como un evento exógeno. Ambos enfoques se ocupan exclusivamente de establecer cuándo se produce el *default* y no necesariamente qué ocurre después.

2.2.2 Bonos *defaultables*: *Structural approach* vs. *Reduced-form approach*

Los modelos de *default* de tipo *structural* (también conocidos como *firm-value approach*) comenzaron con el trabajo de Merton (1974), en el cual se asume un proceso estocástico para el valor de la firma. El *default* ocurre cuando este valor de la firma es insuficiente para hacer frente al nivel de deuda que tiene la compañía en el vencimiento del bono. Es decir, se considera como un proceso endógeno a la compañía. Por ejemplo, en el *first-passage approach* se establece que el *default* ocurre inmediatamente cuando el valor de la firma alcanza un límite inferior (que puede ser el nivel de deuda o bien un límite empírico), mientras que en el *excursion approach* se requiere que el valor de la firma se mantenga dentro de un umbral durante un determinado periodo de tiempo para que se considere como un evento de *default*. Una de las mayores críticas hacia este enfoque es el de la difícil calibración de los parámetros en estos modelos, principalmente porque el valor de la firma no es directamente observable, y para determinarlo es necesario conocer con detalle la estructura de capital de la compañía. Sin embargo, no necesariamente tiene que ser el valor de la firma que se modela a través de un proceso estocástico para determinar el *default*. Cathcart y El-Jahel (Cathcart(1998)) proponen un modelo estructural en el cual el *default* ocurre cuando algún proceso (*signaling process*) alcanza una barrera, la cual puede ser constante o también estocástica.

Por otra parte, los modelos *reduced-form* consideran que el *default* es un proceso exógeno a la compañía. Lo modelan mediante un proceso que

representa la intensidad del *default* (por ejemplo, la intensidad λ en un proceso de *Poisson*), que al alcanzar cierto nivel automáticamente dispara el evento de *default*. Estos procesos de intensidad de *default* pueden incorporar tanto variables del mercado y la economía en sí, así como también variables relacionadas con la firma (como por ejemplo, el valor de sus acciones). Este enfoque se volvió popular a partir de los trabajos de Jarrow y Turnbull ([Jarrow(2001)]) y Duffie y Singleton ([Duffie(1996)]) ,ya que si bien la intensidad de *default* no es una variable observable, se puede estimar mediante algoritmos y argumentos de no arbitraje. Además, evitan tener que lidiar con la compleja tarea de determinar la estructura de capital y asimetría de la información cuando se intenta trabajar con modelos estructurales.

Como se verá más adelante, los modelos planteados en este trabajo podrían considerarse como estructurales, aunque no se modela directamente el valor de la firma ni se hacen supuestos sobre la estructura de capital. También consideramos la posibilidad de un *default* tipo *jump*, que estaría más relacionado con un *reduced-form approach*. Cabe destacar que en Cathcart y El-Jahel ([Cathcart(2002)]) se considera un modelo de bonos *defaultables* que incorpora un *signaling process* con una barrera estocástica de *default* así como también una *hazard rate* de *default* estocástica.

2.2.3 Modelos modernos para la valuación de CBs

Uno de los primeros trabajos que estudia qué ocurre luego del *default* es el de Ayache, Forsyth y Vetzal ([Ayache(2003)]). Además de mostrar inconsistencias del modelo de Tsiveriotis y Fernandes ([Tsiveriotis(1998)]), siguen

un modelo de un sólo factor -el precio de la acción- e introducen un proceso de *Poisson* para modelar el *default* de la compañía. Si bien basan la intensidad del proceso de *Poisson* en un factor constante, relacionado con la probabilidad de *default*, hacen una breve discusión acerca de una posible dependencia entre esta probabilidad y el precio de la acción, basándose en un trabajo de Muromachi ([Muromachi(1999)]). En este trabajo, Muromachi presenta una relación empírica entre el *spread* de crédito y el precio de las acciones, para compañías japonesas con rating BBB.

Si bien en el trabajo de Grimwood y Hodges ([Grimwood(2002)] se concluye que la tasa de interés es de importancia relativa menor que el precio de la acción para la valuación de CBs, se han desarrollado modelos que no sólo incorporan esta tasa sino también otras variables. Dentro de los modelos con la acción y la tasa de interés como factores de riesgo se encuentran los trabajos de Hung y Wang ([Hung(2002)]), quienes plantean un esquema basado en dos árboles binomiales para dichas variables, y la posibilidad de *default* mediante una intensidad constante (basados en Jarrow y Turnbull ([Jarrow(2001)]), y Chambers y Lu ([Chambers(2007)] quienes asumen un modelo normal tipo Ho-Lee ([Ho(1986)] para la tasa de interés, y consideran la correlación entre ambas variables.

Otros trabajos incorporan más factores de riesgo, como Davis and Lischka ([Davis(1999)] que además de modelar la acción y la tasa de interés libre de riesgo como procesos estocásticos, hacen lo mismo para la *hazard rate*, o el trabajo de Ygibatsioglu (Ygitbasioglu(2006)), que analiza CBs dependientes de cinco variables aleatorias: la acción, la tasas de interés libre de riesgo, la

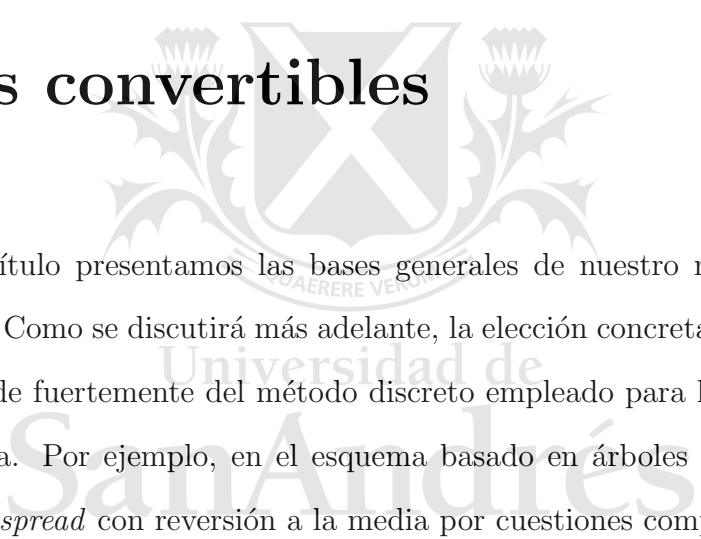
tasa de cambio, la calidad de crédito y la volatilidad.



Universidad de
San Andrés

Capítulo 3

Modelo general de valuación de bonos convertibles



En este capítulo presentamos las bases generales de nuestro modelo para valuar CBs. Como se discutirá más adelante, la elección concreta de las variables depende fuertemente del método discreto empleado para la resolución del problema. Por ejemplo, en el esquema basado en árboles no podemos plantear un *spread* con reversión a la media por cuestiones computacionales (no sería posible asegurar la recombinación), sin embargo en el esquema basado en Monte Carlo esto sí es posible. Por lo tanto, a continuación se describirá el modelo en forma general, comenzando por detallar todos sus supuestos, y luego se propondrán alternativas para su resolución.

3.1 Supuestos del modelo

Nuestro modelo se basa principalmente en tres factores: el precio de la acción, $S(t)$, la tasa libre de riesgo r_t y el *spread* de crédito. Si designamos como $r_d(t)$ a la tasa *defaultable* de corto plazo -si un evento de *default* no ha ocurrido hasta el tiempo t -, y $r(t)$ es la tasa libre de riesgo de corto plazo, entonces el *spread* de crédito $h(t)$ se define como

$$h(t) = r_d(t) - r(t).$$

En principio estas son las dos variables relevantes para nuestro modelo, ya que mientras que S_t es una variable ineludible en cualquier modelo de CBs, mediante $h(t)$ incorporamos no solo el riesgo de *default* sino también otros factores como pueden ser la liquidez o costos impositivos (ver [Duffie(1996)]). Por completitud, en la siguiente formulación se plantea el caso más general posible, el cual se reduce luego a distintos casos particulares. Nuestros supuestos son:

Supuesto 1. En cualquier instante t es posible tomar y prestar dinero a una tasa de interés libre de riesgo conocida, y es posible comprar y vender cualquier cantidad de acciones (incluyendo ventas en corto).

Supuesto 2. Existen en todo momento bonos libres de riesgo y bonos corporativos, los cuales pueden ser comercializados (ventas en corto y largo) en cualquier cantidad y sin ninguno de los costos usuales (*bid-ask spread* o costos de transacción).

Supuesto 3. $h(t)$ posee una barrera superior finita $0 < h(t) \leq H < \infty$

$\forall t$, a partir de la cual consideramos el *default* de la compañía.

Supuesto 4. Consideramos que la dinámica de $S(t)$, $r(t)$ y $h(t)$ está gobernada por las ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\left\{ \begin{array}{l} dS(t) = \mu_S S dt + \sigma_S(S, t) S dW_S, \\ dh(t) = \alpha_h(H_\infty - h) dt + \sigma_h(h, t) dW_h + h(1 - q) dJ, \\ dr(t) = \alpha_r(R_\infty - r) dt + \sigma_r \sqrt{r} dW_r, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

con

$$\sigma_h(h, t) = \min(H, h(t)) \sigma_h(t), \quad (3.2)$$

donde μ_S y σ_S son constantes, $\sigma_h(t)$ es una función determinística, y W_S , W_h y W_r son movimientos Brownianos estándares tales que

$$dW_S dW_h = \rho_{Sh} dt,$$

$$dW_S dW_r = \rho_{Sr} dt,$$

$$dW_r dW_h = \rho_{rh} dt.$$

Como se puede observar, para la tasa libre de riesgo se eligió un modelo tipo Cox-Ingersoll-Ross ([Cox(1979)]), y el *spread* se modela como caso general considerando un proceso lognormal con reversión a la media más un proceso de Poisson (*jump*). En este trabajo, para simplificar los cálculos, suponemos además que μ_h y σ_h son constantes. Es posible también incorpo-

rar la volatilidad de la acción, $\sigma_S(S, t)$, como un cuarto factor de riesgo que sigue un proceso del tipo "modelo de Heston" ([Heston(1993)]):

$$\begin{cases} \sigma_S(S, t) = \sqrt{\nu}S, \\ d\nu = \alpha_\nu(K - \nu)dt + \xi\sqrt{\nu}dW_\nu, \end{cases} \quad (3.3)$$

el cual es estrictamente positivo si $2K\alpha_\nu \geq \xi^2$ (condición de Feller ([Heston(1993)])).

Supuesto 5. Luego de que se produce el evento de *default*, el valor de la acción se reduce a una fracción εS , donde $0 \leq \varepsilon < 1$, y el valor del bono convertible pasa a ser una fracción de recupero R del valor par F .

Supuesto 6. Consideramos que la tasa de interés libre de riesgo r_t es una función conocida del tiempo.

El supuesto de que el *default* se produce cuando se cumple la condición $h_t > H$ le da a nuestro modelo características de *first-passage approach*. En principio es una postulación teórica, que si bien surge de la observación de varios casos de *default* en los cuales la disminución del precio de la acción fue acompañada por un incremento en el *spread*, no realizamos un análisis empírico exhaustivo que nos permita validar el modelo elegido. Sin embargo, otros autores...(CITAR, xej, stapleton)

La figura 1 muestra un ejemplo de la relación entre el comportamiento de una acción y el *spread* para un bono corporativo de American Airlines

(AMR), cuya correlación estimada es del orden de -0.8 , mucho más significativa que la correlación de 0.1 entre una acción y la tasa libre de riesgo reportada por [Chambers(2007)].

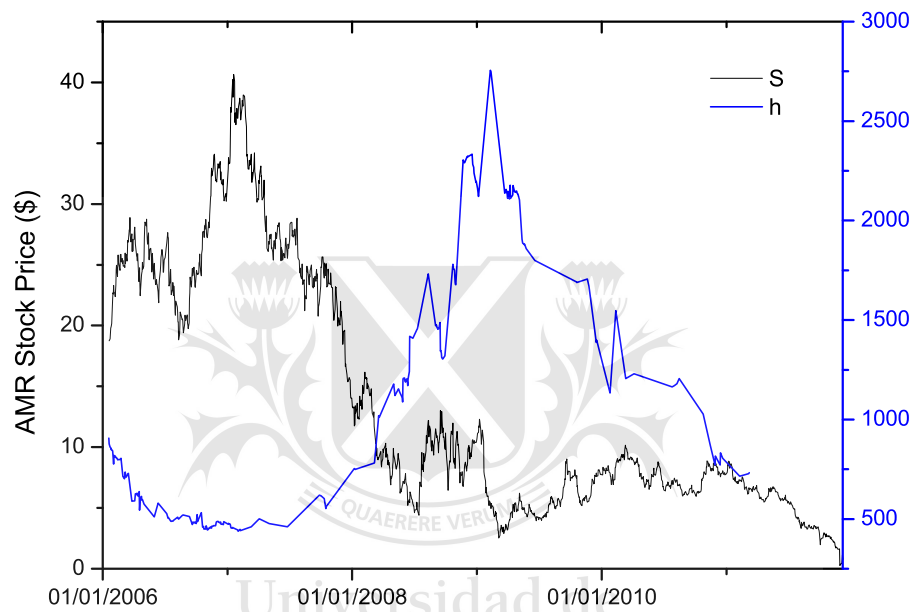


Figura 1: Precio de la acción y *spread* para AMR

3.2 Derivación de una Inecuación en Derivadas Parciales y características contractuales

Consideremos el caso particular en el que que la dinámica de $S(t)$, $r(t)$ y $h(t)$ está gobernada por las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\left\{ \begin{array}{l} dS(t) = \mu_S S dt + \sigma_S S dW_1, \\ dh(t) = \mu_h(h, t) dt + \sigma_h(h, t) dW_2, \\ dr(t) = \mu_r(r, t) dt + \sigma_r(r, t) dW_3, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

en donde se simplifica (3.1) al suponer que el *spread* de crédito no presenta saltos ni reversión a la media. Tanto $r(t)$ como $h(t)$ deben ser estrictamente mayores que 0 para todo tiempo. Esto implica que existen cotas inferiores para ambas variables, las llamaremos r_{min} y h_{min} .

Para la derivación de la ecuación diferencial asociada a este problema seguimos la metodología empleada por Black, Scholes y Merton (fecha). Construimos un portafolio Π constituido por una unidad *long* en el bono convertible de vencimiento T , $V(S, r, h, t, T)$, y cantidades Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 *short* en acciones $S(t)$, bonos libres de riesgo de vencimiento T_1 , $B(r, t, T_1)$, y bonos *defaulteables* de vencimiento T_2 , $P_1(r, h, t, T_2)$, respectivamente.

$$\Pi = V(S, r, h, t, T) - \Delta_1 S(t, r, h) - \Delta_2 B_1(r, t, T_1) - \Delta_3 P_1(r, t, h, T_2), \quad (3.5)$$

Suponiendo que este portafolio no es arbitrable, se tiene que

$$d\Pi \leq r\Pi dt, \quad (3.6)$$

y mediante el Lema de Ito, y eligiendo los siguientes valores para Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 de forma tal de eliminar la parte aleatoria de $d\Pi$

$$\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S},$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial V}{\partial h},$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{\frac{\partial E}{\partial r}} \left[\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\frac{\partial V}{\partial h}}{\frac{\partial P}{\partial h}} \frac{\partial P}{\partial r} \right]$$

se obtiene la siguiente desigualdad en derivadas parciales (*PDI* por sus siglas en inglés) para el precio de un bono convertible (ver Apéndice A):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \sigma_h^2(h, t) \frac{\partial^2 V}{\partial h^2} + \frac{1}{2} \rho_{(S,r)} \sigma_S \sigma_r S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \\ & + \frac{1}{2} \rho_{(S,h)} \sigma_S \sigma_h S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial h} + \frac{1}{2} \rho_{(r,h)} \sigma_r \sigma_h \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial h} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \phi(r, t) \frac{\partial V}{\partial r} + \\ & + \psi(h, t) \frac{\partial V}{\partial h} - rV \leq 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(r, t) &= \mu_r(r, t) - \lambda_r(r, t) \sigma_r(r, t), \\ \psi(h, t) &= \mu_h(h, t) - \lambda_h(h, t) \sigma_h(h, t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

son los *drifts* ajustados por riesgo, y $\lambda_r(r, t)$ y $\lambda_h(h, t)$ son los precios de mercado del riesgo asociado a r y h , respectivamente. La ecuación (3.7) es una ecuación diferencial de cualquier derivado $V = f(S, r, h, t)$, siguiendo sus variables los procesos dados por la ecuación (3.8). El problema es realmente el de un bono convertible cuando se especifican correctamente todas

las condiciones de borde , la condición terminal y las características contractuales. Estas son:

Condiciones sobre r :

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} V(S, r, h, t) = 0, \\ V(r_{min}, h, t, T) < \infty, \end{cases} \quad (3.9)$$

Condiciones sobre S y h en la frontera móvil:

$$\begin{cases} V(S^*, r, h^*, t, T) = nS^*, \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S^*, r, h^*, t, T) = n, \end{cases} \quad (3.10)$$

Condiciones en el evento de *default*:

$$\begin{cases} V(S_{min}, r, h, t) = \max\{n\eta S, R\}, \\ V(S, r, h_{max}, t) = \max\{n\eta S, R\} \end{cases} \quad (3.11)$$

Condición Terminal:

$$V(S, r, h, T) = \max\{nS, 1\}, \quad (3.12)$$

donde ηS , $\eta \in (0, 1)$, es el valor de la acción luego del default.

La condición dada por (3.12) implica que en la fecha de vencimiento del bono, T , el tenedor puede elegir entre recibir el valor par del bono -que en este caso lo normalizamos a 1- o convertir en n acciones, por lo que podría llegar a haber un salto discontinuo para V en $t = T$. Para $t < T$ requerimos que V sea continua y suave en todas sus variables, de forma tal que la existencia de las Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 permita la estrategia de *hedge* continuo dada por la ecuación (3.5). Las condiciones para r , dadas por (3.9), son similares a las que se tiene para el problema de un contrato sobre un bono libre de riesgo, y se pueden consultar en Wilmott and Howison(1993). En particular, dado que r posee un límite inferior, la segunda ecuación de (3.9) es similar a requerir que V sea finita.

El problema de la valuación de un bono convertible es similar al de una opción americana, debido a que el tenedor tiene derecho a la conversión en cualquier momento del contrato (si fuera en alguna ventana de tiempo particular, habría que especificarlo en las condiciones de contorno). Por lo tanto, la condición de conversión pasa a ser una frontera móvil, dada por (3.10). Cabe destacar que debido a la correlación negativa entre S y h el precio de la acción será máximo, $S = S^*$ en el momento de la conversión (suponiendo que la conversión es óptima). Esto a su vez define una cota mínima y mayor que cero, pero variable, para el *spread*, $h = h^*$. La segunda ecuación de (3.10) implica la continuidad de V , acorde a nuestro supuesto de que siempre es posible replicar al precio del bono convertible según el portafolio Π en (3.5). La frontera móvil S^* es una incógnita más del problema y por lo tanto debe ser hallada en la resolución del mismo. La región de

continuación definida para este problema implica que $V \geq nS \forall t$.

Para el proceso del *spread* definimos una cota superior h_{max} en la que se produce el *default* de la compañía. Esto a su vez define una cota inferior para el precio de la acción, $S = S_{min}$, que bien puede ser $S_{min} = 0$ o alguna fracción $\eta \in [0, 1]$ de S antes del *default*. Suponemos que incluso ante este evento es posible la conversión, de forma tal que permitimos que el tenedor elija entre quedarse con un porcentaje residual del bono, R , o con las n acciones *defaulteadas* ηS si convierte, siempre maximizando a V .

Si el bono convertible paga cupones *cash* K periódicamente, la continuidad de V en las fechas de pago t_c implica:

$$V(S^+, r, h, t_c, T) = V(S^-, r, h, t_c, T) + K. \quad (3.13)$$

En el caso de que el bono convertible tenga también opcionalidades tipo *Call* y *Put*, se deben agregar las siguientes condiciones de contorno que limitan la región de continuación:

Condición de Call:

$$V(S, r, h, T) \leq \max\{nS, C\}, \quad (3.14)$$

Condición de Put:

$$V(S, r, h, T) \geq \max\{nS, P\}, \quad (3.15)$$

Dada la condición de frontera móvil de la *PDE* deducida, resulta muy

difícil su resolución analítica ¹ y para ello es necesario emplear algún método discreto. Una posibilidad es emplear directamente diferencias finitas para resolver (3.7), sin embargo lo que se hace en este trabajo es discretizar las ecuaciones diferenciales estocásticas (3.8) mediante árboles multinomiales correlacionados, y también utilizar el método de Monte Carlo para la estimación del valor esperado del precio del CB.



Universidad de
San Andrés

¹Zhu (2006) encuentra una fórmula cuasi-cerrada para un modelo de CBs con tasa de dividendos constantes y considerando a la acción como único factor de riesgo, resolviendo la *PDE* mediante el método de *deformación homotópica*

Capítulo 4

Modelo de valuación mediante árboles trinomiales

El primer caso que analizaremos es un modelo con dos factores de riesgo, S y h . Es una primer aproximación, pero capta los factores más relevantes en el comportamiento de un CB: su comportamiento como *equity* y la corrección del precio debido a todos los factores que hacen al *spread*.

4.1 Modelo

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de S y h en este caso son

$$\begin{cases} dS(t) = \mu_S(t)Sdt + \sigma_S(t)SdZ_1, \\ dh(t) = \mu_h(t)hdt + \sigma_h(h,t)hdZ_2, \end{cases} \quad (4.1)$$

las cuales están sujetas a los Supuestos (1) a (6) del modelo general (ver capítulo anterior). En nuestro modelo tenemos que lidiar con la incompletitud del mercado, dado que el *spread* no es un instrumento comercializable. Para obtener un precio único necesitamos los procesos expresados en una medida de martingala, la cual queda definida eligiendo un numerario (una

cuenta de *money market*) y los precios de mercado de riesgo (MPRs). Bajo la medida equivalente de martingala, definida por los *MPRs*, y luego de la descomposición de Cholesky, la dinámica que siguen S y h resulta

$$\begin{cases} dS = rSdt + \sigma_S S dW_1, \\ dh = (\mu_h - \sigma_h \rho \lambda_1 - \sigma_h \sqrt{1 - \rho^2} \lambda_2) h dt + \sigma_h h \rho dW_1 + \sigma_h h \sqrt{1 - \rho^2} dW_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

donde dW_1 y dW_2 movimientos Brownianos incorrelacionados,

$$\lambda_1 = \frac{\mu_S - r}{\sigma_S}$$

y λ_2 es el precio de mercado de riesgo del *spread* de crédito.

4.2 Esquema discreto basado en árboles multinomiales

Para determinar el precio de no-arbitraje del CB con opciones *Call*, *Put* y pagos discretos de cupones, adaptamos y aplicamos el método de discretización introducido por He (1990). Este es un modelo de valuación desarrollado para un mercado completo con N activos y un numerario, en el cual la economía puede evolucionar hacia $N + 1$ estados en cada paso del tiempo ¹. Se demuestra la convergencia débil a procesos difusivos continuos. A continuación haremos una breve descripción del método planteado por He (1990). Consideremos al intervalo temporal $[0, T]$ dividido en n subintervalos de igual

¹Un esquema similar se plantea en [Chen(2002)] para la valuación de opciones *multi-asset*.

longitud, siendo la distancia entre dos periodos $\Delta t = T/n$. Los N activos pueden tomar $(N + 1)$ diferentes estados en cada paso temporal. La variable aleatoria X^i ,

$$X^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_{N+1}^i),$$

es tal que toma los valores x_j^i , ($j = 1, 2, \dots, N$) en el estado j con probabilidad $\frac{1}{N+1}$, y tal que su valor esperado es nulo y su varianza igual a 1,

$$E[X^i] = \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} x_j^i = 0, \quad (4.3)$$

$$Var[X^i] = \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} (x_j^i - E[X^i])^2 = 1. \quad (4.4)$$

Adicionalmente, supongamos que la covarianza entre dos variables aleatorias X^i y X^k es cero,

$$Cov[X^i, X^k] = \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} (x_j^i - E[X^i]) (x_j^k - E[X^k]) = 0 \quad (4.5)$$

En nuestro modelo podemos usar el método de discretización de He con $N = 2$, aproximando los incrementos de los movimientos brownianos W_1 y W_2 por dos variables random y tres posibles estados para cada una de ellas en cada paso temporal. Es fácil mostrar que la siguiente elección de variables aleatorias satisface las condiciones (4.3), (4.4) y (4.5)

$$X^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$X^2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$$

La evolución estocástica de (4.2) se puede discretizar y aproximar por un proceso trinomial de n periodos

$$S_{k+1} = \begin{cases} S_k \alpha_{S_1} \\ S_k \alpha_{S_2} \\ S_k \alpha_{S_3} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$h_{k+1} = \begin{cases} h_k \alpha_{h_1} \\ h_k \alpha_{h_2} \\ h_k \alpha_{h_3} \end{cases} \quad (4.7)$$

donde $k + 1$ es un paso temporal ($0 \leq k \leq n - 1$), y las constantes α_S y α_h que multiplican S_k y h_k en cada paso k son definidas por

$$\begin{aligned}
\alpha_{S_1} &= 1 + r\Delta t + \sigma_S \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{\Delta t}, \\
\alpha_{S_2} &= 1 + r\Delta t, \\
\alpha_{S_3} &= 1 + r\Delta t - \sigma_S \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{\Delta t}; \\
\alpha_{h_1} &= 1 + b_h \Delta t + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_h \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\Delta t} + \sigma_h \rho \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{\Delta t}, \\
\alpha_{h_2} &= 1 + b_h \Delta t - \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_h \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\Delta t}, \\
\alpha_{h_3} &= 1 + b_h \Delta t + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_h \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\Delta t} - \sigma_h \rho \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{\Delta t},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde

$$b_h = \mu_h - \sigma_h \rho \lambda_1 - \sigma_h \sqrt{1 - \rho^2} \lambda_2.$$

Para asegurar la recombinación de los árboles supondremos que λ_2 es constante. En la Figura 2 se muestran los dos primeros pasos para el árbol trinomial de S .

Ejemplo numérico de la construcción de los árboles

Consideremos un CB de una compañía que emitió acciones y bonos corporativos con los parámetros mostrados en la Tabla 3.

Para un bono cuyo vencimiento es de 3 años, por (4.8) tenemos $\alpha_{S_1} = 1.18$, $\alpha_{S_2} = 0.92$, $\alpha_{S_3} = 0.95$, and $\alpha_{h_1} = 0.76$, $\alpha_{h_2} = 0.98$, $\alpha_{h_3} = 1.19$. La Figura 4 muestra los árboles de 3 pasos para las constantes dadas por (4.6) y (4.7). Para construir los árboles de S y h primero construimos los árboles

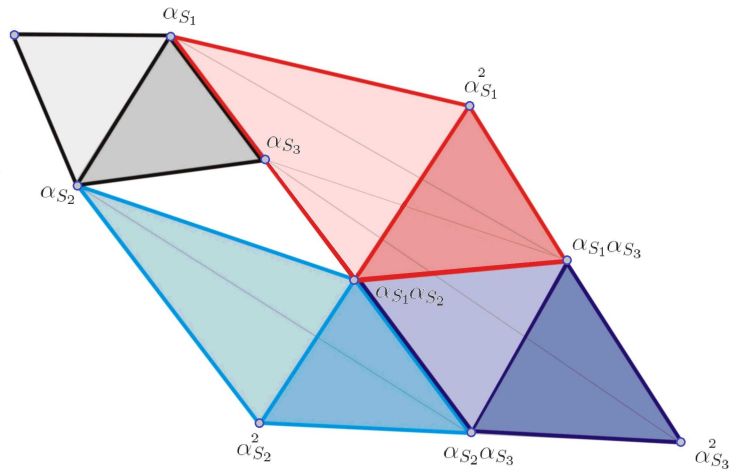


Figura 2: Arbol trinomial de dos pasos para S

	S	h
Valor inicial	100	0.08
<i>Drift</i>	0.05	0.1173
Volatilidad	0.3	0.3
ρ	-0.4	

Tabla 3: Parámetros de S y h para el ejemplo numérico de la construcción de los árboles

para las constantes y luego los multiplicamos por los valores iniciales de S and h , respectivamente. En la Figura 5 se muestran los árboles obtenidos para S y h .

Notar que el número de nodos en cada paso temporal k es $(k + 1)(k + 2)/2$. Esta construcción se puede extender a n pasos. Las constantes en cada nodo, dadas por (4.8), se pueden escribir como $\alpha_1^j \alpha_2^{i-j} \alpha_3^{k-i}$, for $i = 0, \dots, k; j = 0, \dots, i$.

Paso k	1	2	3		1	2	3
			0.32				3.10
			0.49				1.55
			0.75				0.77
			1.16				0.39
		0.47	0.66			2.13	2.48
		0.72	1.02			1.06	1.24
		1.10	1.56			0.53	0.62
	0.68	0.97	1.37		1.45	1.70	1.98
	1.05	1.49	2.11		0.73	0.85	0.99
1	1.42	2.01	2.85	1	1.16	1.36	1.58

(a)
(b)

Figura 3: Árboles para las constantes de (a) S y (b) h

4.3 Arbol trinomial de dos factores y algoritmo de *backward induction*

Una vez que se construyen los árboles para S y h , para calcular el precio del CB, V , procedemos según los siguientes pasos

1. Dados los valores terminales de S y h comenzamos por los nodos finales computando el valor de V , dado por (3.12) si no ocurrió el *default* hasta el vencimiento, y por (3.11) si ocurrió, es decir en el vencimiento algún nodo cumple que $h > H$,
2. *Backward induction*: Iteramos desde $k = (n-1)$ hasta $k = 1$ calculando el valor $V_{i,k}$ del CB en el nodo i del paso temporal k según

$$V_{i,k} = \max \left(nS, P, \min \left(C, \widehat{V}_{i,k} \right) \right) \text{ for } h_{i,k} < H,$$

$$V_{i,k} = \max (n\varepsilon S_{i,k}, Q) \text{ for } h_{i,k} \geq H,$$

Paso k	1	2	3		1	2	3
			31.80				0.2483
			48.92				0.1240
			75.25				0.0619
			115.76				0.0309
		46.59	66.04			0.1702	0.1982
		71.67	101.59			0.0850	0.0990
		110.25	156.27			0.0424	0.0494
	68.26	96.76	137.14		0.1167	0.1359	0.1583
	105.00	148.83	210.95		0.0583	0.0679	0.0790
100.00	141.74	200.90	284.77	0.0800	0.0932	0.1085	0.1264

(a)

(b)

Figura 4: Árboles para (a) S and (b) h

si $1 \leq i \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, donde $\widehat{V}_{i,k}$ es el promedio entre los tres nodos hijos del nodo i en el paso temporal $(k+1)$, descontado a la tasa libre de riesgo r . Durante el periodo sin provisión *Put*, $P = 0$, y durante un periodo sin *Call*, $C \rightarrow \infty$. Cuando k coincide con una fecha de pago de cupón, se incorpora esta discontinuidad en los nodos correspondientes.

4.4 Resultados numéricos

En primer lugar analizamos la convergencia (ver Figura 6) de este método para un CB sin opcionalidades, y cuyos parámetros se especifican en la Figura 5. La oscilación inicial antes de que se alcance la convergencia se debe a la presencia de la barrera en el *spread*, y es una característica típica en los modelos de árbol con una barrera (ver por ejemplo [Derman(1995)]).

Radio de conversión	1.0
Tasa de recupero R	0.1
Face value F	100
Tasa de cupón	0.05 anual
Frecuencia de cupón	2 pagos por año
r	0.05
S_0	100
σ_S	0.3
μ_S	0.08
h_0	0.08
μ_h	0.03
σ_h	0.3
ρ	-0.7
η	0.1
$H_{default}$	0.15
λ	0.01

Figura 5: Parámetros para el primer ejemplo numérico

En el segundo ejemplo numérico incorporamos el pago de cupones, así como también opciones call y put. Los parámetros del modelo para este ejemplo se muestran en la Figura 7, y constituyen el caso base para analizar las sensibilidades a r , σ_S y σ_h que se muestran en la Figura 8.

Como es de esperarse, incrementos en r conllevan a un precio del CB decreciente, pero con una variación menor que las obtenidas al perturbar σ_S y σ_h . Este resultado convalida nuestro proceso de selección de modelo en el cual consideramos a S y h como los únicos factores de riesgo estocásticos, dejando a la tasa libre de riesgo como un parámetro constante. Además, en la tabla de sensibilidades se puede observar que el precio del CB se incrementa junto con σ_S , debido a que incrementos en σ_S conlleva a valores de S más grandes y por lo tanto mayores valores de conversión. Por otra parte, podemos observar

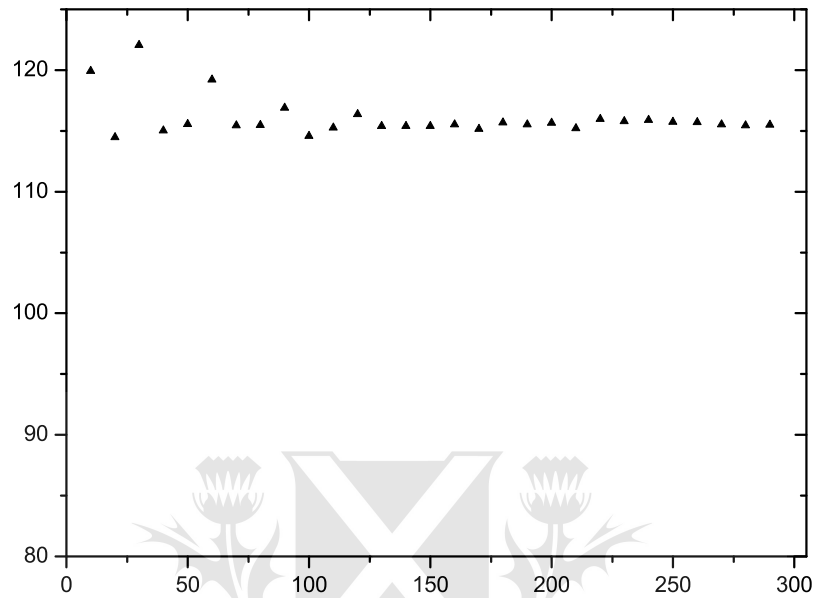


Figura 6: Precio del CB en función del número de intervalos temporales n

que el precio del CB decrece al incrementarse σ_h , debido a que a mayor volatilidad del *spread* se esperan mayores *hits* a la barrera de default H .

Si bien la convergencia de este método se alcanza para alrededor de 150 intervalos temporales, el tiempo de cómputo para dicha cantidad de intervalos es de alrededor de 2 horas. Este resultado hace que el método numérico propuesto sea inviable para aplicaciones reales más allá del ámbito académico, y motiva la investigación de otros métodos numéricos que permitan reducir el tiempo de cálculo.

T	3 años
Call	115 en el año 1 y 2
Put	110 en el año 2
r	0.05
Radio de conversión	1.0
Tasa de recupero R	0.1
Face value F	100
Tasa de cupón	0.05 anual
Frecuencia de cupón	2 pagos por año
η	0.1
S_0	100
σ_S	0.3
μ_S	0.15
h_0	0.08
μ_h	0.1
σ_h	0.3
ρ	-0.4
$H_{default}$	0.15
λ	0.01

Figura 7: Parámetros para el segundo ejemplo numérico

r	CB Price	σ_S	CB Price	σ_h	CB Price
0.030	112.9145	0.22	109.0792	0.22	121.6614
0.035	112.9125	0.24	110.0550	0.24	117.8221
0.040	112.9105	0.26	110.9816	0.26	115.8134
0.045	112.9085	0.28	111.9257	0.28	114.2507
0.050	112.9071	0.30	112.9071	0.30	112.9071

Figura 8: Análisis de sensibilidades

Capítulo 5

Modelo de valuación mediante el método de *Least-Squares* Monte Carlo

5.1 Introducción

El **método de Monte Carlo** es un método probabilístico utilizado para la evaluación aproximada de fórmulas matemáticas cuya solución analítica es difícil de hallar, tanto determinísticas como estocásticas.

La aplicación de este método en la valuación de derivados consiste en la simulación de las trayectorias de los subyacentes, en la medida libre de riesgo, para luego evaluar el *payoff* de los derivados en cada trayectoria. Luego se promedian todos los *payoffs* descontados a la tasa libre de riesgo, y así se obtiene el precio del derivado. Para esto último, resulta útil la conexión entre la solución de una *PDE* (como puede ser la desigualdad de Black-Scholes para una opción americana) y el valor esperado de una ecuación diferencial estocástica, conocida como fórmula de Kac-Feynman.

Fórmula de Kac-Feynman: Supongamos que $u = u(x, t)$ satisface la

siguiente *PDE* en $t \in [0, T]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - V(x, t)u + f(x, t) = 0,$$

sujeto a la condición final $u(x, T) = \Psi(x)$. Entonces,

$$u(x, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s V(X_\tau) d\tau} f(X_s, s) ds + e^{-\int_t^T V(X_\tau) d\tau} \Psi(X_T) \mid X_t = x \right]$$

bajo la medida de probabilidad \mathbb{Q} tal que X es un proceso estocástico caracterizado por

$$dX = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dW,$$

y W es un proceso de Wiener bajo \mathbb{Q} , tal que $X(t=0) = x$.

Esta forma de utilizar Monte Carlo para valorar opciones a partir de valor esperado es útil para opciones de tipo europeas, en donde únicamente es necesario evaluar el *payoff* en los nodos finales de las trayectorias.

La aplicación de este método se complica en la valuación de opciones de tipo americana. Consideremos por ejemplo una opción *Put* americana, para la cual se generaron M trayectorias (típicamente se usa un número grande de trayectorias para asegurar la convergencia de este método) del precio de la acción subyacente

$$dS(t) = f(S(t))dt + g(S(t))dW(t),$$

donde f y g pueden ser el drift y volatilidad, respectivamente, de la acción,

aunque en general pueden ser funciones escalares con la condición inicial S_0 como variable aleatoria. Discretizando el tiempo en N pasos, según $\Delta t = T/N$, $\tau_j = j\Delta t$, y usando la notación $S(\tau_j) = S_j$, $W(\tau_j) = W_j$, el **método de Euler-Maruyama** para la discretización de procesos estocásticos toma la forma

$$S_j = S_{j-1} + f(S_{j-1})\Delta t + g(S_{j-1})(W_j - W_{j-1}), j = 1, 2, \dots, N.$$

Dado que el tenedor de un *Put* americano puede ejercerlo en cualquier momento durante la vida del contrato hasta su vencimiento en T , la aplicación directa del método de Monte Carlo requeriría que en cada instante temporal t , $0 \leq t \leq T$, y para cada trayectoria k , $0 \leq k \leq M$, se estimara el **valor de continuación** de la opción (esto es, el valor de la opción si la misma no se ejerció hasta el instante t). Para esto sería necesario generar muchas trayectorias para todos los nodos dentro de una misma trayectoria, lo cual resulta inviable computacionalmente. Esta complicación se torna más problemática cuando el derivado que se quiere valorar depende de varios factores y es de tipo americano. Broadie y Glasserman (1997) desarrollaron un modelo para valorar una opción americana que depende como máximo de 5 subyacentes incorrelacionados, mediante un método de *stochastic-mesh approach Monte Carlo*, el cual requiere al menos unas 20 horas de cálculo para precios con intervalos de confianza del 90

5.2 Método de *least-squares* Monte Carlo

El trabajo de [Longstaff(2001)] introduce una nueva metodología en la valoración de derivados por simulación de Monte Carlo. Consiste en utilizar la información de corte transversal de todas las trayectorias simuladas para estimar el valor esperado del valor de continuación. El método que utilizan para esta estimación es el de regresión por cuadrados mínimos (*Least-squares*). La idea principal de este método radica en el hecho de que la esperanza condicional es una función doblemente integrable, es decir que pertenece al espacio \mathcal{L}^2 , que es un espacio de Hilbert y por lo tanto posee un conjunto numerable de *funciones base* ortonormales. Ejemplos típicos de estas funciones son los polinomios de Legendre, Laguerre y Jacobi. De esta forma, la esperanza condicional puede representarse como una combinación lineal de estas funciones base. En Clément, Lamberton y Protter (2001) se prueba de forma rigurosa la convergencia casi-segura del método de Longstaff y Schwartz (2001).

El algoritmo¹ de este método es el siguiente:

- 1. Generar M trayectorias para los subyacentes, a partir de sus ecuaciones diferenciales estocásticas discretizadas o bien a partir de las soluciones de éstas.
- 2. Supongamos que conocemos el vector del *payoff* en el paso $k + 1$, F_{k+1} . Para el paso anterior, k , este *payoff* vale $Y_k = e^{-r_k \Delta T} F_{k+1}$. Luego, se efectúa la regresión de Y como función de un conjunto finito

¹Para una descripción en detalle y con excelentes ejemplos, referimos al lector al trabajo original de [Longstaff(2001)]

de funciones base del espacio de Hilbert. Por ejemplo, Longstaff y Schwartz utilizan funciones polinómicas de los subyacentes, es decir regresan Y_k contra S , S^2 , S^2 , etc., y contra una constante (sin embargo se puede elegir cualquier otra clase de funciones base como las mencionadas anteriormente),

$$\hat{Y}_k = \sum_{j=0}^J \alpha_j S_k^j,$$

estimando los coeficientes $(\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_J)$ mediante cuadrados mínimos.

- 3. Computar el vector del valor de continuación aproximado en el paso k según

$$\hat{F}_k = \sum_{j=0}^J \hat{\alpha}_j S_k^j,$$

Este vector \hat{F}_k incluye el valor de continuación para cada trayectoria, por lo tanto se puede evaluar el *payoff* del derivado en cada una de ellas, y de esta forma establecer los *stopping times* que maximizan el precio de la opción.

La ventaja de este método no sólo es que produce resultados precisos con un costo computacional bajo (en su trabajo, Longstaff y Schwartz resuelven el mismo problema que Broadie y Glasserman (1997) mencionado anteriormente, pero reduciendo el tiempo de cálculo a dos minutos aproximadamente), sino que también permite valuar derivados cuyos subyacentes

tengan cualquier tipo de dinámica, lo cual resulta inviable en el caso de árboles multinomiales por cuestiones de recombinación. Por este motivo empleamos esta herramienta para resolver el problema del CB que incluye reversión a la media para la tasa libre de riesgo y el *spread* de crédito, así como también la posibilidad de que este último efectúe saltos discontinuos.

Si bien existen trabajos que utilizan el método de Monte Carlo para la valuación de CBs (Kimura y Shinohara (2003), Kind y Wilde (2005)), el único trabajo que encontramos al día de la fecha en el que se valúa un CB mediante el método de *Least-squares* Monte Carlo es el de Lvov, Yigitbasioglu y El Bachir (2004). Consideran un modelo de dos factores correlacionados (la acción subyacente y la tasa libre de riesgo) e introducen al *default* a partir de un proceso con intensidad constante.

5.3 *Least-squares* Monte Carlo aplicado a bonos convertibles

5.3.1 Modelo

El modelo aquí propuesto considera como factores de riesgo a S , r y h siguiendo la dinámica dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dW_S, \\ dr = \alpha_r (R_\infty - r) dt + \sigma_r \sqrt{r} dW_r, \\ dh = \alpha_h (H_\infty - h) dt + \sigma_h h dW_h + h(1 - q) dJ, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} dW_S dW_h = \rho_{Sh} dt, \\ dW_S dW_r = \rho_{Sr} dt, \\ dW_r dW_h = \rho_{rh} dt, \end{array} \right.$$

$J \sim Poi(\lambda dt)$ sigue un proceso de Poisson de intensidad λ , la magnitud del salto $(1 - q)$ es tal que $q \sim N(1, var_q)$ siendo var_q una constante real positiva, y según el Supuesto (4) $h(t)$ está acotado por una barrera superior finita $0 < h(t) \leq H < \infty \forall t$, a partir de la cual se produce el *default* de la compañía. Cabe mencionar que el proceso que sigue la tasa de interés r es de tipo CIR (ver [Cox(1985)])

Para obtener un precio de no-arbitraje es necesario expresar estos procesos en la medida equivalente de martingala \mathbb{Q} :

$$\left\{ \begin{array}{l} dS = rSdt + \sigma_S dZ_1, \\ dr = [\alpha_r(R_\infty - r) - \sigma_r \sqrt{r} \rho_{Sr} \lambda_1 - \sigma_r \sqrt{r} \sqrt{1 - \rho_{Sr}^2} \lambda_2] dt + \\ \quad + \sigma_r \sqrt{r} \rho_{Sr} dZ_1 + \sigma_r \sqrt{r} \sqrt{1 - \rho_{Sr}^2} dZ_2, \\ dh = [\alpha_h(H_\infty - h) - \sigma_h h \rho_{Sh} \lambda_1 - \sigma_h h (a\lambda_2 + b\lambda_3)] dt + \\ \quad + \sigma_h h \rho_{Sh} dZ_1 + \sigma_h h a dZ_2 + \sigma_h h b dZ_3, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

donde Z_1, Z_2 y Z_3 son movimientos Brownianos estándar incorrelacionados, y las constantes a y b , que surgen de la descomposición de Cholesky, se definen como

$$a = \frac{\rho_{Sr} - \rho_{Sh}\rho_{Sr}}{\sqrt{1 - \rho_{Sr}^2}},$$

$$b = \sqrt{\frac{1 + 2\rho_{Sr}\rho_{rh}\rho_{Sh} - \rho_{Sr}^2 - \rho_{Sh}^2 - \rho_{rh}^2}{1 - \rho_{Sr}^2}}.$$

5.3.2 Esquema de cálculo

El método consiste en simular las trayectorias de S , r , h y ν según las ecuaciones (5.2). A diferencia de la aplicación de este método a una opción del tipo Put americana, en donde [Longstaff(2001)] seleccionan únicamente las trayectorias *in the money* para estimar vía *least-squares* el valor de continuación (argumentan que de esta forma aumenta la eficiencia del método), en el caso del bono convertible esta simplificación no es tan directa. Esto es debido a las distintas "regiones" en las que puede encontrarse un CB en función del precio de la acción, es decir puede comportarse más como un bono o como una acción, y por lo tanto el valor de continuación dependerá de esta región en la que se encuentre el CB. Para considerar las regiones en las que se estimará el valor de continuación, hacemos uso del , que pasaremos a enunciar (y cuya demostración se encuentra en dicho trabajo):

Lema 1: Nunca será óptimo convertir un CB que no está siendo *called* excepto inmediatamente antes de una fecha de pago de dividendos o ante cambios adversos en los términos de conversión, o en la fecha de vencimiento.

Este lema sirve para simplificar el algoritmo computacional, debido a que

únicamente se va a tener en cuenta la conversión en las fechas de pago de dividendos o cuando el emisor ejerce el *Call* (no consideraremos la simulación de cambios adversos para el tenedor en los términos de conversión). De esta forma, en nuestro esquema computacional quedan definidas tres zonas, y únicamente en dos de ellas se hacen regresiones para estimar el valor de continuación del CB. Estas zonas son:

- **Región 1.** $Effective\ Put < nS < Effective\ Call$: se efectúa una regresión para estimar el valor de continuación y determinar si se ejerce el *Call*.
- **Región 2.** $nS < Effective\ Put$: se efectúa una regresión distinta para estimar el valor de continuación y determinar si se ejerce el *Put*.
- **Región 3.** $Effective\ Call < nS$: no es necesaria ninguna regresión. El CB se convierte a acciones instantáneamente cuando se cumple esta condición.

donde se definen los *Call* y *Put* efectivos como

$$Effective\ Call_{(t)} = Call + Accrued\ Interest_{(t)} ,$$

$$Effective\ Put_{(t)} = Put + Accrued\ Interest_{(t)} ,$$

los Intereses Corridos (*Accrued Interest*) se definen como

$$Accrued\ Interest_{(t)} = Coupon_{t_n} \frac{t - t_c}{t_n - t_c}$$

y $Cupon_{t_n}$ es el cupón que se paga en el instante t_n y t_c es el último periodo en el que se efectuó un pago de cupón. Además, también se efectúa una regresión en cada fecha de pago de dividendos para determinar si se convierte el CB en acciones o no según el valor de continuación. Por lo tanto, para considerar todas las posibilidades que llevan a la estrategia óptima para el tenedor del CB se deben efectuar al menos tres regresiones para estimar el valor de continuación.

En nuestro algoritmo, luego de que se determinó el precio del CB todas las trayectorias simuladas en un determinado paso temporal k , evaluamos la posibilidad del *default* según el valor que toma el spread en cada una de las trayectorias. Si para alguna trayectoria en el paso k se cumple la condición $h(t_k) > H$, entonces imponemos $V_k = \max(nS\eta, QF)$ para esa trayectoria.

Computacionalmente, en primer lugar se simulan las trayectorias para S , h y r según (5.2). El algoritmo de valuación se inicia creando una matriz de *cashflows* de dimensión $Npaths * N$, donde $Npaths$ es la cantidad de trayectorias simuladas, y N es la cantidad de tiempos en los cuales se estima el valor de continuación. Dado que es un bono, en el último paso temporal se tendrá un *payoff* dado por (3.12). Luego, de forma iterativa se procede según un esquema de *backward induction* estimando en cada paso temporal el valor de continuación y estableciendo el valor del CB en cada nodo según la región y condiciones para ese dado paso temporal. En caso de ejercer un *Call*, un *Put*, convertir el CB en acciones o bien que ocurra el *default* en alguna trayectoria en un paso temporal k , se fija ese nodo como un *stopping time* (con el *payoff* correspondiente) y por lo tanto todos los restantes nodos,

desde $k + 1$ hasta N , se fijarán en 0. Una vez que termina el algoritmo de *backward induction*, lo que se tiene es una matriz con todos los *cashflows* en cada trayectoria, que dependiendo de la evolución de S , h y r pueden estar en el vencimiento del CB, o bien antes debido a que la estrategia óptima fue la conversión, o ejercer el *Call* o un *Put*. Finalmente, el precio del CB se obtiene promediando todos los *cashflows* descontados a $t = 0$.

5.4 Resultados numéricos

Utilizando el mismo CB (teórico) que en 4.4, pero con un nivel de default para el *spread* de $H = 0.15$ (1500 *basis points*), se encontró que el precio del CB converge para aproximadamente 100,000 trayectorias, 60 intervalos temporales y el siguiente polinomio ² como función de regresión en la estimación del valor esperado durante el algoritmo de *LSMC*:

$$\hat{S}_k = \alpha_1 + \alpha_2 S_k + \alpha_3 h_k + \alpha_4 r_k + \alpha_5 r_k S_k + \alpha_6 S_k^2 \quad (5.3)$$

donde \hat{S}_k es el valor estimado de la acción para el intervalo temporal k . Además, se utilizaron los mismos parámetros que en 4.4, y junto con los parámetros propios de este ejemplo son mostrados en la Figura 5.4. El número de intervalos temporales es fijado en 60 para todas las simulaciones (tanto en el estudio de convergencia como sensibilidades). Los MPR de $h(t)$ y $r(t)$ se fijaron en cero ³.

²Este polinomio es el resultado de diferentes pruebas cambiando el orden y el grado de interacción entre los factores de riesgo.

³El nivel en el cual se testean los MPRs en este ejemplo numérico es irrelevante, debido a que por lo general su valor es muy bajo y además no se trata de un ejercicio de calibración

En la Figura 5.4 se observa que el precio converge para 1×10^5 simulaciones, con un tiempo de cómputo alrededor de cinco segundos, el cual resulta varios órdenes de magnitud menor que en el caso del árbol binomial presentado en el Capítulo 4. El número de intervalos temporales es fijado en 60 para todas las simulaciones (tanto en el estudio de convergencia como sensibilidades). El valor al que converge el precio del CB no es exactamente igual al obtenido en los resultados numéricos en 4.4 debido a que se utilizaron diferentes parámetros, sin buscar dicha igualdad en los resultados entre métodos⁴.



a valores de mercado. Más aún, en el caso de calibrar este modelo se deberían hacer supuestos sobre muchos de sus parámetros, siendo una elección habitual la de igualar parámetros a cero

⁴Cabe recordar el objetivo de este trabajo es el de estudiar diferentes modelos y no la calibración a instrumentos del mercado

T	3 años
Call	115 en el año 1 y 2
Put	110 en el año 2
Radio de conversión	1.0
Tasa de recupero R	0.1
Face value F	100
Tasa de cupón	0.05 anual
Frecuencia de cupón	2 pagos por año
η	0.1
S_0	100
σ_S	0.3
μ_S	0.15
r_0	0.01
σ_r	0.03
R_{inf}	0.01
α_r	0.8
h_0	0.08
μ_h	0.1
σ_h	0.3
α_h	0.1
H_{inf}	0.08
$\rho_{S,r}$	0.1
$\rho_{S,h}$	-0.4
$\rho_{r,h}$	0.1
$H_{default}$	0.15

Figura 9: Parámetros para el ejemplo numérico utilizando *LSMC* (caso base)

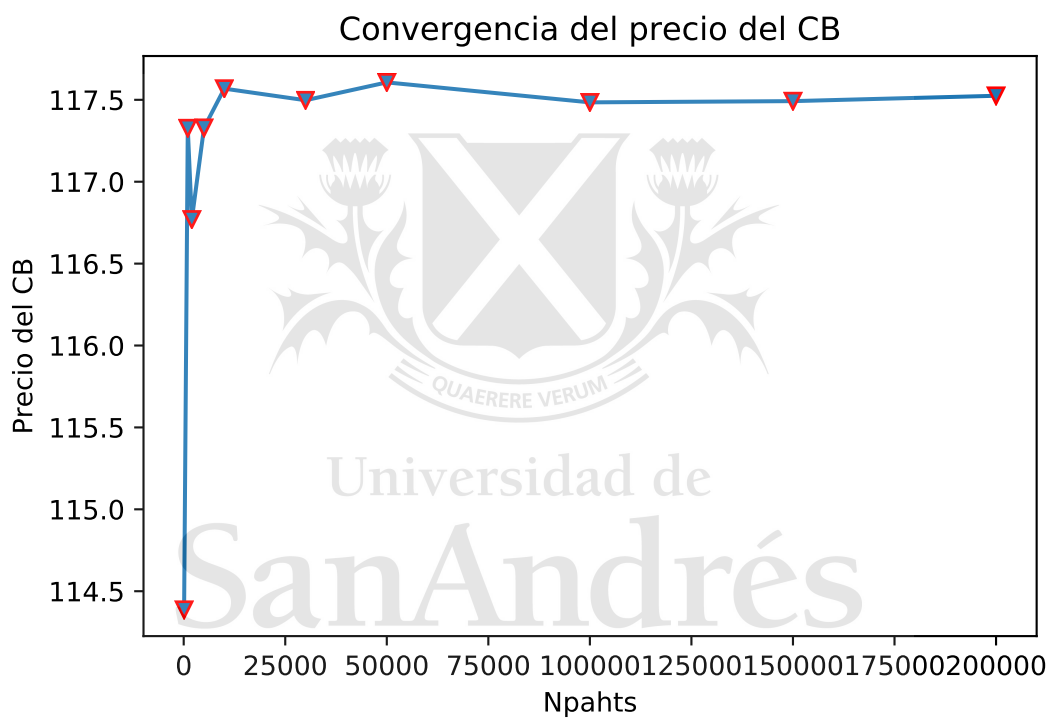


Figura 10: Convergencia del precio del CB como función del número de trayectorias

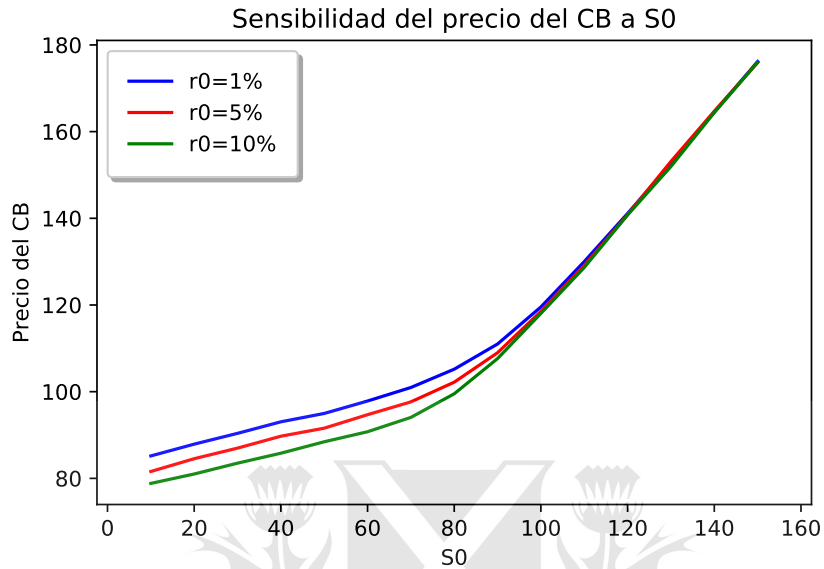


Figura 11: Sensibilidad del precio del CB como función del precio inicial de la acción S_0 para diferentes valores de tasa de interés

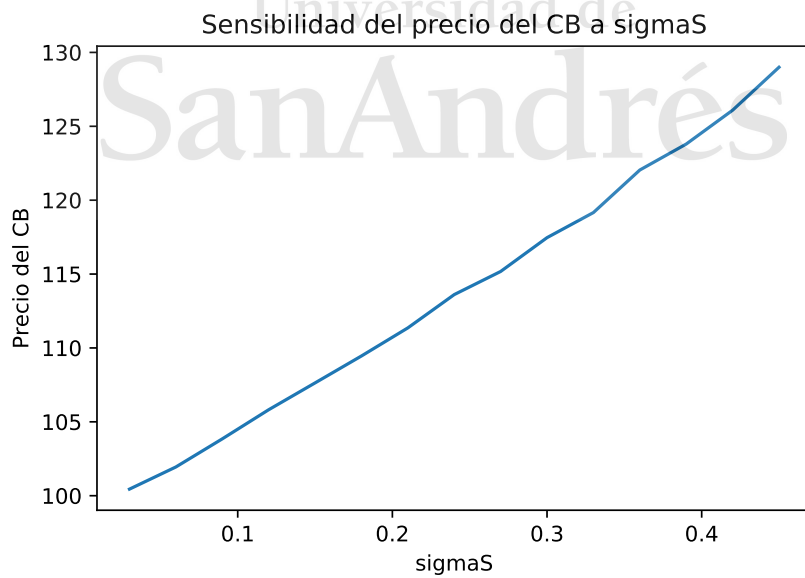


Figura 12: Sensibilidad del precio del CB como función de la volatilidad de la acción σ_S

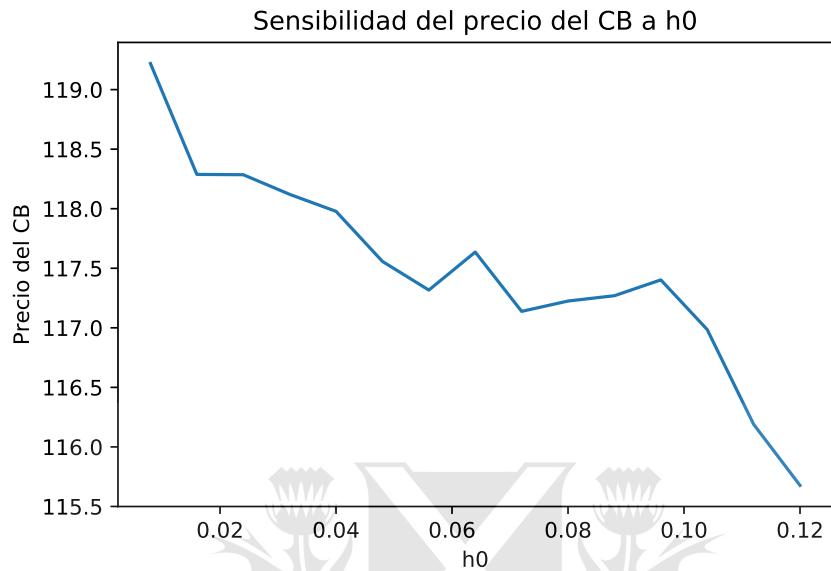


Figura 13: Sensibilidad del precio del CB como función del *spread* de crédito inicial h_0

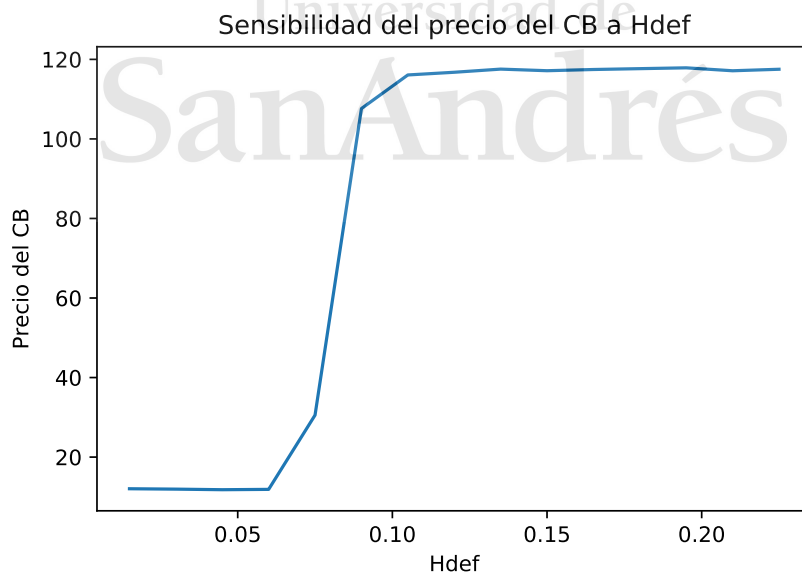


Figura 14: Sensibilidad del precio del CB como función de la barrera de default H_{def}

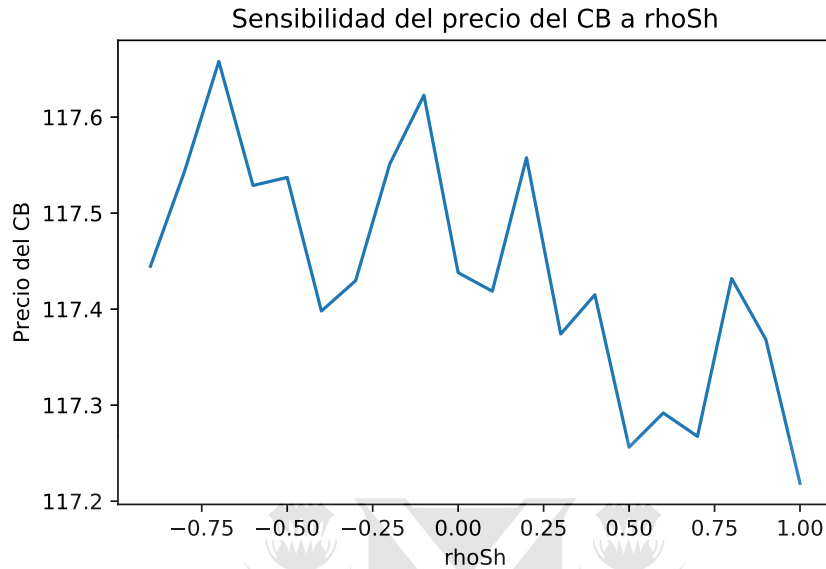


Figura 15: Sensibilidad del precio del CB como función de la correlación $\rho_{S,h}$ entre el precio de la acción y el *spread*

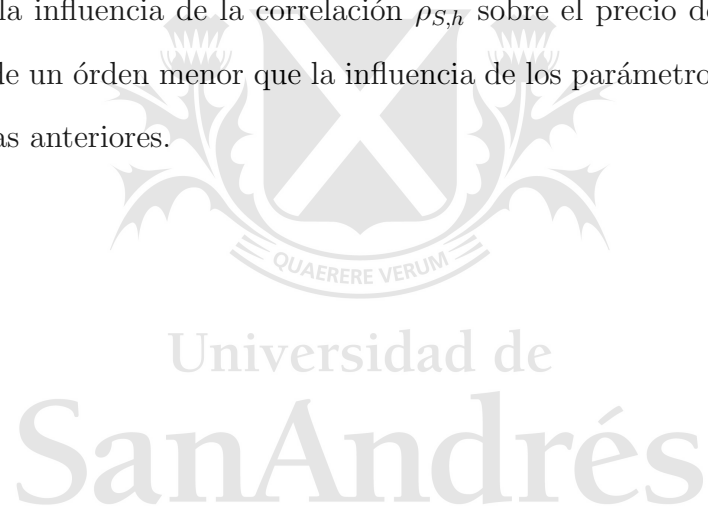
En las Figuras 11 a 15 se estudia la sensibilidad del precio del bono convertible a un conjunto⁵ de parámetros que consideramos que son los que más influyen sobre dicho precio. Todas las sensibilidades se obtuvieron utilizando 10,000 trayectorias.

En la Figura 11 podemos observar el comportamiento "híbrido" del bono convertible, dominado por la tasa de interés para valores bajos de S_0 , y dominado por el precio de la acción para valores altos. Por su parte, en la Figura 12 observamos que la volatilidad de la acción influye notablemente en el precio del CB, y como es de esperarse dicho precio es una función creciente respecto de σ_S .

⁵Debido al gran número de parámetros de este modelo (comparado con los modelos utilizados en la práctica con un máximo de 3 o 4 parámetros), seleccionamos estos parámetros para el análisis de sensibilidades basándonos en nuestra intuición sobre cuáles son más importantes que otros

En la Figura 13 observamos que, como es de esperarse, el precio del bono convertible es decreciente con el *spread* inicial h_0 , mientras que el comportamiento respecto de la barrera máxima en la Figura 14 indica tres regímenes diferentes: el regimen de *default* para barreras por debajo del *spread* inicial, un regimen "mixto" donde los valores de la barrera y el *spread* son similares, y un regimen *default - free* para barreras muy altas respecto al nivel del *spread*.

Por último, en la Figura 15 se observa que, más allá de oscilaciones numéricas, la influencia de la correlación $\rho_{S,h}$ sobre el precio del bono convertible es de un orden menor que la influencia de los parámetros estudiados en las figuras anteriores.



Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un modelo de valuación de bonos convertibles en el cual la principal innovación fue incorporar al *spread* de crédito como factor de riesgo. Se caracterizó la dinámica del *spread* a partir de un proceso log-normal con saltos, y con una cota superior H la cual se utilizó como *signaling* para el evento de default. Se formuló el problema general de valuación y se estudiaron dos métodos discretos para la solución de dicho problema.

El primer método utilizado consiste en árboles trinomiales. Se utilizó para el caso particular en el cual los únicos factores de riesgo modelados son el precio de la acción S y el *spread* crediticio h , ambos siguiendo una dinámica log-normal. Esto se debe a que una limitación de este método numérico es que todos los procesos subyacentes deben ser log-normales para así resultar en árboles recombinantes. Se valuó un bono convertible teórico y se estudió la convergencia y sensibilidades a parámetros, obteniendo resultados en línea con el comportamiento esperado. Sin embargo, se notó que el tiempo de cálculo necesario para alcanzar la convergencia es excesivamente alto (alrededor de dos horas) comparado con aplicaciones comerciales o mod-

elos utilizados por los equipos de *front office* en los bancos de inversión, en los cuales incluso un segundo ya resultaría inviable. Por este motivo se investigó otro método numérico.

El segundo método numérico utilizado es el de *Least-Squares Monte Carlo*. Este método no impone ninguna limitación en la dinámica de los procesos estocásticos simulados, por lo tanto también se incorporó a la tasa libre de riesgo r como factor de riesgo, siguiendo un proceso de tipo *Cox-Ingerson-Ross*. Se pudo verificar que la convergencia de este método es varios órdenes de magnitud más rápida que en el caso del árbol trinomial, convergiendo para un tiempo de cálculo de cuatro segundos. Se pudo comprobar numéricamente el comportamiento híbrido de los bonos convertibles, y se estudió la sensibilidad del precio a un conjunto de parámetros del modelo, obteniendo resultados en línea con las expectativas.

En la comparación de ambos métodos, el método de *Least-Squares Monte Carlo* se impone al árbol trinomial debido a la mayor flexibilidad y menor tiempo de cálculo. Cabe destacar, sin embargo, que ambos métodos resuelven problemas basados en los mismos supuestos y por lo tanto su única diferencia es el esquema numérico y el modelo en ambos casos es esencialmente el mismo. Sin embargo, la aplicación de este modelo en un *pricing engine* se ve limitada por dos motivos. En primer lugar, se espera que un modelo de valuación sea lo más rápido posible, ya que se espera valuar miles o cientos de miles de *trades* por día. En este sentido, una posible mejora sería implementar el método de *LSMC* utilizando procesamiento paralelo, que es una

técnica moderna en los sistemas de *fast-pricing* de los bancos de inversión. En segundo lugar, el gran número de parámetros de este modelo impone en la práctica condiciones muy restringidas para la calibración del mismo, y en la mayoría de los casos resulta en *overfitting*. Entonces, una posible continuación de este trabajo podría ser reducir el número de factores de riesgo (reduciendo así la cantidad de parámetros del modelo) y estudiar estrategias de calibración a bonos convertibles que se comercializan en el mercado.



Universidad de
San Andrés

Bibliografía

- [Ayache(2003)] Forsyth P. y Vetzal-K. Ayache, E. The valuation of convertible bonds with credit risk. *Journal of Derivatives*, 11(3):9–29, 2003.
- [Bardhan(1994)] Bergier A. Derman E.-Dosembet. D. Kani I. Bardhan, I. Valuing convertible bonds as derivatives. 1994.
- [Baxter and Rennie(2003)] M. Baxter and A. Rennie. *Financial Calculus: An Introduction to derivative Pricing*. Princeton Series in Finance. Princeton University Press, Princeton, USA, 2003.
- [Black(1973)] F. y Scholes M. Black. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):907–929, 1973.
- [Brennan(1977)] E. S Brennan, M. J. y Schwartz. Convertible bonds: Valuation and optimal strategies for call and conversion. *The Journal of Finance*, 32(5):1699–1715, 1977.
- [Brennan(1980)] E. S Brennan, M. J. y Schwartz. Analyzing convertible bonds. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15(4):907–929, 1980.
- [Cathcart(1998)] L. Cathcart, L. y El-Jahel. Valuation of defaultable bonds. pages 65–78, 1998.

- [Cathcart(2002)] L. Cathcart, L. y El-Jahel. A pde approach for pricing defaultable bonds. *Working paper, Imperial College*, 2002.
- [Chambers(2007)] Q. Chambers, D. y Lu. A tree model for pricing convertible bonds with equity, interest-rate and default risk. *The Journal of Derivatives*, 14:21–46, 2007.
- [Chen(2002)] Chung S. y Yang T. Chen, R. Option pricing in a multi-asset, complete market economy. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37(4):1–20, 2002.
- [Cox(1985)] Ingersoll J.E. y Ross S.A. Cox, J.C. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985.
- [Cox(1979)] S. y Rubinstein M. Cox, J.. Ross. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7:229–264, 1979.
- [Davis(1999)] F.R. Davis, M. y Lischka. Convertible bonds with market and credit risk. Technical report, Tokyo-Mitsubishi International plc, 1999.
- [Derman(1995)] Bardhan I. Kani I. Ergener D. Derman, E. Enhanced numerical methods for options with barriers. 1995.
- [Duffie(1996)] K. Duffie, D. y Singleton. *Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
- [Grimwood(2002)] S. Grimwood, R. y Hodges. The valuation of convertible bonds: A study of alternative pricing models. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37(4):1–20, 2002.

- [Harrison(1983)] P.T Harrison, J.M y Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, 11:313–316, 1983.
- [He(1990)] H. He. Convergence from discrete to continuous time contingent claims prices. *Review of Financial Studies*, 3:523–546, 1990.
- [Heston(1993)] S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6:327–343, 1993.
- [Ho(1986)] T. S. Y. y S.-B. Lee Ho. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance*, 41(5):1011–1029, 1986.
- [Hung(2002)] J.Y. Hung, M.W. y Wang. Pricing convertible bonds subject to default risk. *The Journal of Derivatives*, 6:75–87, 2002.
- [Ingersoll(1977a)] J. Ingersoll. A contingent-claims valuation of convertible securities. *Journal of Financial Economics*, 4:289–321, 1977a.
- [Ingersoll(1977b)] J. Ingersoll. An examination of corporate call policies on convertible securities. *Journal of Financial Economics*, 32(2):463–478, 1977b.
- [Jarrow(2001)] S. M. Jarrow, R. A. y Turnbull. Pricing derivatives on financial securities to credit risk. *Journal of Finance*, 50:53–85, 2001.

- [Longstaff(2001)] E. Longstaff, F. y Schwartz. Valuing american options by simulation: a simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, 14(1):113–147, 2001.
- [Merton(1974)] R. Merton. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29(2):449–470, 1974.
- [Muromachi(1999)] Y. Muromachi. The growing recognition of credit risk in corporate and financialbond markets. Technical report, NLI Research Institute, 1999.
- [Tsiveriotis(1998)] C. Tsiveriotis, K. y Fernandes. Valuing convertible bonds with credit risk. *The Journal of Fixed Income*, 8(3):95–102, 1998.
- [Wilmott and Howison(1993)] J. Wilmott, P. y Dewinne and S. Howison. *Option Pricing: Mathematical models and computation*, volume 209 of *Graduate Texts in Mathematics*. Oxford Financial Press, Oxford, England, 1993.
- [Ygitbasioglu(2006)] C. Ygitbasioglu, A. y Alexander. Pricing and hedging convertible bonds: Delayed calls and uncertain volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 9(3):415–453, 2006.

Apéndice

Apéndice A: deducción de la *PDI* para el bono convertible

Consideremos un portafolio Π constituido por una unidad *long* en el bono convertible de vencimiento T , $V(S, r, h, t, T)$, y cantidades Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 *short* en acciones $S(t)$, bonos libres de riesgo de vencimiento T_1 , $B(r, t, T_1)$, y bonos *defauteables* de vencimiento T_2 , $P_1(r, h, t, T_2)$, respectivamente:

$$\Pi = V(S, r, h, t, T) - \Delta_1 S(t, r, h) - \Delta_2 B_1(r, t, T_1) - \Delta_3 P_1(r, t, h, T_2),$$

Entonces, el diferencial del portafolio Π está dado por

$$d\Pi = dV - \Delta_1 dS - \Delta_2 dB - \Delta_3 dP$$

donde dS representa el proceso difusivo de la acción (según (3.8)), y los otras diferenciales resultan de aplicar el lema de Ito:

$$\begin{aligned}
dV = & \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \\
& + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dt + \frac{1}{2} \sigma_h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial h^2} dt + \frac{1}{2} \sigma_S \sigma_h S \rho_{Sh} \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial h} dt + \\
& + \frac{1}{2} \sigma_S \sigma_r S \rho_{Sr} \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} dt,
\end{aligned}$$

$$dB = \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{\partial B}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} dt,$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial h} dh + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} dt + \frac{1}{2} \sigma_h^2 \frac{\partial^2 P}{\partial h^2} dt,$$

Para eliminar la aleatoriedad de $d\Pi$, eligiendo los siguientes valores para Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 de forma tal de eliminar la parte aleatoria de $d\Pi$

$$\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S},$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial V}{\partial h},$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{\frac{\partial B}{\partial r}} \left[\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\frac{\partial V}{\partial h}}{\frac{\partial P}{\partial h}} \frac{\partial P}{\partial r} \right]$$

y considerando que este portafolio no es arbitrable,

$$d\Pi \leq r\Pi dt,$$

resulta

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial h^2} + \frac{1}{2}\sigma_S \sigma_h S \rho_{Sh} \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial h} + \\
& + \frac{1}{2}\sigma_S \sigma_r S \rho_{Sr} \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} - rV - \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + rB \right) \Delta_2 - \\
& - \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_h^2 \frac{\partial^2 P}{\partial h^2} + rP \right) \Delta_3 = 0.
\end{aligned}$$

Definiendo los operadores

$$\begin{aligned}
L_B(\cdot) &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r, \\
L_P(\cdot) &= L_B + \frac{1}{2}\sigma_h^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_V(\cdot) &= L_P + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_S \sigma_h S \rho_{Sh} \frac{\partial^2}{\partial S \partial h} + \\
& + \frac{1}{2}\sigma_S \sigma_r S \rho_{Sr} \frac{\partial^2}{\partial S \partial r} - 2r,
\end{aligned}$$

se puede reescribir el problema como

$$L_V(V) - \Delta_2 L_B(B) - \Delta_3 L_P(P) = 0.$$

Reemplazando Δ_2 y Δ_3

$$L_V(V) - \frac{\frac{\partial V}{\partial h}}{\frac{\partial P}{\partial h}} L_P(P) - \frac{1}{\frac{\partial B}{\partial r}} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\frac{\partial V}{\partial h}}{\frac{\partial P}{\partial h}} \frac{\partial P}{\partial r} \right) L_B(B) = 0,$$

y despejando se obtiene

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial h} - \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial P}{\partial r} \right)^{-1} \left[\frac{\partial P}{\partial h} L_V(V) - \frac{\partial V}{\partial h} L_P(P) \right] = \frac{L_B(B)}{\frac{\partial B}{\partial r}}.$$

El miembro derecho corresponde a la ecuación diferencial para un bono libre de riesgo ([Wilmott and Howison(1993)]):

$$\frac{L_B(B)}{\frac{\partial B}{\partial r}} = \lambda_r(r, t)\sigma_r(r, t) - \mu_r(r, t)$$

Entonces, se tiene (prescindiendo de la dependencia de λ_r , σ_r y μ_r)

$$\frac{\partial P}{\partial h} L_V(V) - \frac{\partial V}{\partial h} L_P(P) = (\lambda_r \sigma_r - \mu_r) \left(\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial h} - \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial P}{\partial r} \right)$$

Dividiendo ambos miembros por $\frac{\partial P}{\partial h} \frac{\partial V}{\partial h}$

$$\frac{L_V(V)}{\frac{\partial V}{\partial h}} - \frac{L_P(P)}{\frac{\partial P}{\partial h}} = (\lambda_r \sigma_r - \mu_r) \frac{\frac{\partial V}{\partial r}}{\frac{\partial V}{\partial h}} - (\lambda_r \sigma_r - \mu_r) \frac{\frac{\partial P}{\partial r}}{\frac{\partial P}{\partial h}}.$$

Reordenando

$$\frac{L_V(V) - (\lambda_r \sigma_r - \mu_r) \frac{\partial V}{\partial r}}{\frac{\partial V}{\partial h}} = \frac{L_P(P) - (\lambda_r \sigma_r - \mu_r) \frac{\partial P}{\partial r}}{\frac{\partial P}{\partial h}},$$

y como esta igualdad debe valer para cualquier vencimiento T y T_2 , se puede escribir

$$\frac{L_V(V) - (\lambda_r \sigma_r - \mu_r) \frac{\partial V}{\partial r}}{\frac{\partial V}{\partial h}} = \lambda_h \sigma_h - \mu_h$$

Por lo tanto

$$L_V(V) - (\lambda_r \sigma_r - \mu_r) \frac{\partial V}{\partial r} - (\lambda_h \sigma_h - \mu_h) \frac{\partial V}{\partial h} = 0.$$

Definiendo $\phi(r, t)$ y $\psi(h, t)$, como

$$\phi(r, t) = \mu_r(r, t) - \lambda_r(r, t)\sigma_r(r, t),$$

$$\psi(h, t) = \mu_h(h, t) - \lambda_h(h, t)\sigma_h(h, t)$$

y reescribiendo el operador $L_V(V)$ según su definición, se obtiene finalmente la desigualdad (*PDI* por sus siglas en inglés) para el CB

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_h^2(h, t) \frac{\partial^2 V}{\partial h^2} + \frac{1}{2}\rho_{(S,r)}\sigma_S\sigma_r S \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial r} + \\ & + \frac{1}{2}\rho_{(S,h)}\sigma_S\sigma_h S \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial h} + \frac{1}{2}\rho_{(r,h)}\sigma_r\sigma_h \frac{\partial^2 V}{\partial r\partial h} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \phi(r, t) \frac{\partial V}{\partial r} + \\ & + \psi(h, t) \frac{\partial V}{\partial h} - rV \leq 0, \end{aligned}$$

Apéndice B: Códigos de MATLAB

Código para el método de árboles multinomiales

```
close all
clear all

%*****

n=50; %Pasos del árbol

%*****

N=2; %cantidad de Subyacentes
M=(n+1)*(n+2)/2; %dimensión del árbol

%*****
%Parámetros

% Contractuales *****

T=3; %tiempo hasta el vencimiento (en años)
F=100; %face value
cr=1; %factor de conversión
Call=110; %call
Put=100; %put

TiCall=1; %inicio del periodo de Call
TfCall=T; %final

TiPut=1; %inicio del periodo de Put
TfPut=2; %final

cupr=0.05; %Coupon Rate
numcup=2; %Periodicidad anual

dt=T/n; %paso temporal

kic=round(TiCall/dt); %paso comienza Call
kfc=round(TfCall/dt); %paso finaliza Call
```

```

kip=round(TiPut/dt); %paso comienza Put
kfp=round(TfPut/dt); %paso finaliza Put

kcup=[((n/T)/numcup):((n/T)/numcup):(n-1)]; %pasos con pago de cupón

%Condiciones en el default

Q=0.1; %tasa de recuperó del bono
eta=0.1; %tasa de recuperó del stock

% Parámetros de los factores *****

%Stock
S0=100;
muS=0.03;
sigmaS=0.3;

%Spread (en %)
h0=0.08;
muh=0.01;
sigmah=0.30;

%Barrera de default
Hdef=0.2;

%Correlación y lambda
rho=-0.7;

%Tasa de interés
r=0.08

lambdah=0.01;
lambda1=(muS-r)/sigmaS;

%Drifts en la medida Q
bh=muh-lambda1*sigmah*rho-sigmah*lambdah*sqrt(1-rho^2)

% Constantes alfa para el árbol *****

```



Universidad de
San Andrés

```

%Spread
ah1=1+bh*dt+sigmah*sqrt(1-rho^2)*sqrt(dt/2)+sigmah*rho*sqrt(3*dt/2)
ah2=1+bh*dt-2*sigmah*sqrt(1-rho^2)*sqrt(dt/2)
ah3=1+bh*dt+sigmah*sqrt(1-rho^2)*sqrt(dt/2)-sigmah*rho*sqrt(3*dt/2)

%Stock
aS1=1+r*dt+sigmaS*sqrt(3*dt/2);
aS2=1+r*dt;
aS3=1+r*dt-sigmaS*sqrt(3*dt/2);

%*****
% Construcción de los árbol multinomiales

% Stock y Spread *****
stree=zeros(M,n+1); %stock
stree(M,1)=1; %primer nodo

htree=zeros(M,n+1); %spread
htree(M,1)=1; %primer nodo

for k=1:n
    %Construyo In para el paso k
    f=1;
    for j=0:k
        for i=0:j
            I(f,1)= j;
            I(f,2)= i;
            f=f+1;
        end
    end
    %Construyo Pn para el paso k
    f=length(I);
    for i=1:f
        stree(M-i+1,k+1)=(aS3^I(i,2))*(aS2^(I(i,1)-I(i,2)))*(aS1^(k-I(i,1)));
        htree(M-i+1,k+1)=(ah3^I(i,2))*(ah2^(I(i,1)-I(i,2)))*(ah1^(k-I(i,1)));
    end
end
stree=S0*stree;
htree=h0*htree;

```



```

% Default
cbtree(htree(:,k)>=H,k)=max(Q*F,eta*cr*stree(htree(:,k)>=H,k));

end

% Precio en el primer nodo
cbtree(M,1)=(sum(cbtree(:,2))*exp(-r*dt))/3;
disp('Precio del bono convertible')
precio=cbtree(M,1)

```

Códigos para las funciones *powersk* y *findrow*

```

function Pk=powersk(k,n)

%Devuelve la matriz Pk correspondiente al paso k, con la dimensión
%del árbol
M=(n+1)*(n+2)/2;

%Ik
f=1;
for j=0:k
    for h=0:j
        Ik(f,1)= j;
        Ik(f,2)= h;
        f=f+1;
    end
end

%Pk
fk=length(Ik);
Pk=zeros(fk,3);
for j=1:fk
    Pk(j,1)= Ik(j,2);
    Pk(j,2)= Ik(j,1)-Ik(j,2);
    Pk(j,3)= k-Ik(j,1);
end

%Paso Pk a la dimension de cada columna de htree

```

```

aux=zeros(M,3);
for j=(M-fk+1):M
    aux(j,:)=Pk(j-M+fk,:);
end

```

```

Pk=aux;

```

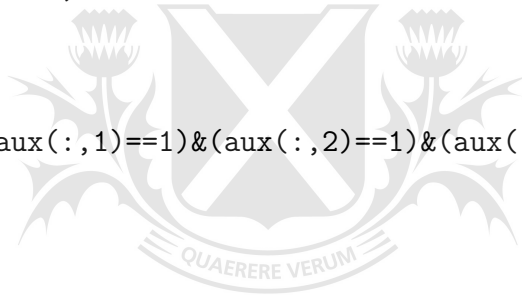
```

function indexrow = findrow(row,A)
N=3; %por ahora está programado para 2 subyacentes
aux=zeros(size(A));
for i=1:N
    aux(:,i)=row(i);
end
aux=(aux==A);

indexrow=find((aux(:,1)==1)&(aux(:,2)==1)&(aux(:,3)==1));

clear aux;
end

```



Universidad de

San Andrés

Código para el método de *least-squares* Monte Carlo

```

% *****
close all
clear all
%clc
% *****

% Simulation parameters *****
N=60; %Number of Sampling points
Npaths=10000 %Number of simulations

% Market parameters

%Stock

```



```

S0=100; % Initial price
d=0.00;% Dividend Yield
sigmaS=0.3; % Stock volatility
muS=0.15; %Stock drift in real measure

%Interest rate
r0=.05; % Initial interest rate
sigmar=.03; % Interest rate volatility
R= 0.1; %Long term interest rate
a_r=0.8; %speed of reversion
lambda2=0.005; %Market price of interest rate risk

%Spread
h0=.08; % Initial spread
sigmah=.3; % Spread volatility
H= 0.08; %Long term spread
a_h=0.1; %speed of reversion
lambda3=0.01; %Market price of spread

%Correlations
rhoSr=0.1;
rhoSh=-0.4;
rhorh=-0.1;

a=(rhorh-rhoSh*rhoSr)/sqrt(1-rhoSr^2);
b=sqrt((1+2*rhorh*rhoSr*rhoSh-rhoSr^2-rhoSh^2-rhorh^2)/(1-rhoSr)^2);

% Contractual parameters *****
T=3;% Time to Maturity
F=100; %Bond Face Value
c=0.05; %Bond Coupon
m=2; %Coupon anual frequency
md=1; %Dividend anual frequency
cr=1; %Conversion rate
C=115; %Call Price
P=110; %Put Price
TiCall=1; %Initial Call Time
TfCall=3; %Final Call Time
TiPut=2; %Initial Put Time
TfPut=3; %Final Call Time

```

```

% Jump parameters *****
lambdaP=0.6; %for Poisson dist
jump_var=20; %percentage of jump variation

% Default parameters *****
Q=0.1; %Bond Recovery Fraction
eta=0.1; %Stock Recovery Fraction
Hdef=0.15; %spread default barrier

% *****
% Monte Carlo Simulations

dt=T/(N-1); %Time interval
rand('seed',100);
%Simulation of Stochastic Process for S, r and h
dW1=sqrt(dt)*randn(Npaths,N); %Wiener process increment
dW2=sqrt(dt)*randn(Npaths,N);
dW3=sqrt(dt)*randn(Npaths,N);
q=1+jump_var*randn(Npaths,N); %jump
dN=poissrnd(lambdaP*dt,Npaths,N); %Poisson distribution
S(:,1)=S0*ones(Npaths,1);
r(:,1)=r0*ones(Npaths,1);
h(:,1)=h0*ones(Npaths,1);
Rinf=R*ones(Npaths,1);
Hinf=H*ones(Npaths,1);
for t=2:N;
%S(:,t)=S(:,t-1).*exp((r(:,t-1)-D-.5*sigmaS^2)*dt+sigmaS*dW1(:,t-1));
S(:,t)=S(:,t-1).*(1+(r(:,t-1)-d)*dt+sigmaS*dW1(:,t));
lambda1=(1/sigmaS).*(muS-r(:,t-1));
r(:,t)=max(0.0001*ones(Npaths,1),r(:,t-1)+(a_r.*(Rinf-r(:,t-1))-...
sigmar.*sqrt(r(:,t-1)).*rhoSr.*lambda1-...
sigmar.*sqrt(r(:,t-1)).*sqrt(1-rhoSr^2).*lambda2).*dt+...
sigmar.*sqrt(r(:,t-1)).*rhoSr.*dW1(:,t)+...
sigmar.*sqrt(r(:,t-1)).*sqrt(1-rhoSr^2).*dW2(:,t));
h(:,t)=max(0.0001*ones(Npaths,1),h(:,t-1)+(a_h.*(Hinf-h(:,t-1))-...
sigmah.*h(:,t-1).*rhoSh.*lambda1-...
sigmah.*h(:,t-1).*a.*lambda2-...
sigmah.*h(:,t-1).*b.*lambda3).*dt+...
sigmah.*h(:,t-1).*rhoSh.*dW1(:,t)+...
sigmah.*h(:,t-1).*a.*dW2(:,t)+...
sigmah.*h(:,t-1).*b.*dW3(:,t)+...

```

```

+h(:,t-1).*(1-q(:,t)).*dN(:,t));
end

% *****
% Computing the value of Convertible Bond

%Coupon payment steps
dncup=round(N/(m*T));
Ncup=[dncup:dncup:(N-1)];
tcup=zeros(1,N);
tcup(Ncup)=1; %steps in which bond pays coupon
tcup(N)=1; %coupon at maturity

%Dividend payment steps
dndiv=round(N/(md*T));
Ndiv=[dndiv:dndiv:(N-1)];
tdiv=zeros(1,N);
tdiv(Ndiv)=1; %steps in which stock pays dividends

%Call and Put exercise steps
kic=round(TiCall/dt)+1; %step at Call starts
kfc=round(TfCall/dt)+1; %step at Call finishes
kip=round(TiPut/dt)+1; %step at Put starts
kfp=round(TfPut/dt)+1; %step at Put finishes

Call=C*ones(Npaths,1);
Put=P*ones(Npaths,1);

% Initialize
Cashflows=zeros(Npaths,N);
CashflowsT=ones(length(S),1).*max(cr*S(:,N),(F*(1+(c*tcup(N)/m)))); %Cashflows V

Cashflows(:,N)=CashflowsT;

% Backward algorithm *****

AccI=zeros(Npaths,1); %Accrued Interest
tacc=0;

for t=N:-1:3;

```

```

%Call region (put region inside Call Region)
if (kic<t)
% Y Matrix at timestep t
if t==N
Y=(exp(-r(:,N).*dt)).*Cashflows(:,t);
else
ndt=ones(Npaths,N-t+1);
for i=1:(N-t+1)
ndt(:,i)=i*dt; %discount times
end
Y=(dot((exp(-r(:,t:N).*ndt))',(Cashflows(:,t:N))'))';
end

%Compute effective Call and Put
if(tcup(t-1)==1)
eCall=Call+c*ones(Npaths,1); %effective Call
ePut=Put+c*ones(Npaths,1); %effective Put
tacc=0;
AccI=zeros(Npaths,1);
else
tacc=tacc+1;
AccI=AccI+(c*tacc/dncup)*ones(Npaths,1); %Accrued Interests
eCall=Call+AccI; %effective Call
ePut=Put+AccI; %effective Put
end

% Strategy algorithm *****
% Region 1: ePut < nS < eCall --->regression needed for Call
% Region 2: nS < ePut --->regression needed for Put
% Region 3: eCall < nS ---> Forced Conversion (no regression is needed)

Cashflows(:,t-1)=0; %all zeros at the begining

%Region 1 *****
Ireg1=find(ePut<cr*S(:,t-1)<eCall);
Isize1=length(Ireg1);
% Project Y at time t onto basis function at time t-1
X=[ones(Isize1,1)*1,S(Ireg1,t-1),h(Ireg1,t-1),S(Ireg1,t-1).*...
h(Ireg1,t-1),S(Ireg1,t-1).^2, r(Ireg1,t-1)];
B=inv(X'*X)*X'*Y(Ireg1);

```

```

Cont=zeros(Npaths,1);
Cont(Ireg1)=X*B*(1+tcup(t)*c/m); %Continuation value

Icall=find(eCall(Ireg1)<Cont(Ireg1));
Cashflows(Icall,t-1)=eCall(Icall);
Cashflows(Icall,t:N)=0;

%Conversion option at Dividend date
if(tdiv(t)==1)
Iconv=find(cr*S(Ireg1,t-1)>Cont(Ireg1));
Cashflows(Iconv,t-1)=cr*S(Iconv,t-1);
Cashflows(Iconv,t:N)=0;
end

%Region 2 *****
Ireg2=find(cr*S(:,t-1)<ePut);
Isize2=length(Ireg2);
% Project Y at time t onto basis function at time t-1
X=[ones(Isize2,1)*1,S(Ireg2,t-1),h(Ireg2,t-1),S(Ireg2,t-1).*...
h(Ireg2,t-1),S(Ireg2,t-1).^2, r(Ireg2,t-1)];
B=inv(X'*X)*X'*Y(Ireg2);

Cont=zeros(Npaths,1);
Cont(Ireg2)=X*B*(1+tcup(t)*c/m); %Continuation value

Iput=find(ePut(Ireg2)>Cont(Ireg2));
Cashflows(Iput,t-1)=ePut(Iput);
Cashflows(Iput,t:N)=0;

%Region 3 *****
Ireg3=find(eCall<cr*S(:,t-1));
Cashflows(Ireg3,t-1)=cr*S(Ireg3,t-1);
Cashflows(Ireg3,t:N)=0;

else %Out of the Call period
if t==N
Y=(exp(-r(:,N).*dt)).*Cashflows(:,N);
else
ndt=ones(Npaths,N-t+1);
for i=1:(N-t+1)
ndt(:,i)=i*dt; %discount times

```

```

end
Y=(dot((exp(-r(:,t:N).*ndt))',(Cashflows(:,t:N))'))';
end

%Select "in the money" paths
I=find(cr*S(:,t-1)>Y);
Isize=length(I);
% Project Y at time t onto basis function at time t-1
X=[ones(Isize,1)*1,S(I,t-1),h(I,t-1),S(I,t-1).*...
h(I,t-1),S(I,t-1).^2, r(I,t-1)];
B=inv(X'*X)*X'*Y(I);

Cont=zeros(Npaths,1);
Conv=zeros(Npaths,1);

Cont(I)=X*B*(1+tcup(t)*c/m); %Continuation value
Conv(I)=cr*S(I,t-1); %Conversion value

% Set Cashflows vector *****
Cashflows(:,t-1)=0; %set all zeros at first
aux=max(Conv,Cont);
Iconv=find((aux==Conv)&(Conv~=0)); %find where holder converts
Cashflows(Iconv,t-1)=Conv(Iconv);
Cashflows(Iconv,t:N)=0;
end

%Default when h hits the Barrier
Idef=find(h(:,t-1)>=Hdef);
Cashflows(Idef,t-1)=max(cr*S(Idef,t-1)*eta,Q*F);
Cashflows(Idef,t:N)=0;

end

% *****
% Results***

%Probability of default
pdefault=sum(sum(h>Hdef))/((N-1)*Npaths)

%Convertible bond price
ndt=ones(Npaths,N-1);

```

```
for i=1:(N-1)
discv(:,i)=exp(-r(:,i+1).*(i*dt)); %discount times
end
final=sum((discv.*Cashflows(:,2:N))')';
Price=mean(final)
```



Universidad de
San Andrés