Universidad de San Andres

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Existencia de equilibrios con ordenamientos parciales de preferencias

Fernando Tohmé
Universidad Nacional del Sur

CICLO DE SEMINARIOS 1993
Cuaderno 93/22
Día: Martes 2 de noviembre
9:15 hs

Existencia de Equilibrios con Ordenamientos Parciales de Preferencias

Fernando Tohmé
Departamento de Economía
Universidad Nacional del Sur

Setiembre 1993

En esta breve nota discutiremos la posibilidad de demostrar la existencia de equilibrios de mercado cuando los ordenamientos de preferencias de los consumidores, en una economía pura de intercambio, son *parciales* [1] [2]. Para ello las siguientes definiciones previas son útiles [3]:

Definición 1 *Un consumidor i, con preferencias parciales, puede ser representado por la tupla (X_i, U_i, w_i) donde $X_i \subseteq R^l$ es el* conjunto de consumo *bajo los siguientes supuestos:*

- $X_i \neq \emptyset$
- X_i *es cerrado*
- *si $x_1 \in X_i$ y $\exists x_2, x_1 \leq x_2$ entonces $x_2 \in X_i$ (libre disponibilidad)*
- X_i *es convexo*

$U_i : X_i \to R$ es una función continua, más no cuasicóncava de utilidad y w_i es la dotación inicial de i. Suponemos además que si $x < y$ entonces $U_i(x) < U_i(y)$ (monotonicidad).

En estos términos el problema del consumidor es entonces:

Definición 2 *Determinar $x_i^0 \in X_i$ tal que x_i^0 maximice U_i en el conjunto $\{x \in X_i : p \cdot x \leq p \cdot w_i\}$ donde p es el vector de precios (dado).*

Debido a la no cuasiconcávidad de la función de utilidad, la solución al problema del consumidor, x_i^0, no es única. Conviene discutir, entonces, el marco en que los consumidores interactúan, para determinar los distintos resultados globales que provienen de las posibles elecciones de los consumidores:

Definición 3 *Una* economía pura de intercambio *es una tupla*
$\varepsilon = ((X_i, U_i, w_i)_{i=1}^n, w)$
donde n es el número de consumidores en la economía, $w = \sum_{i=1}^n w_i$

Las nociones de asignación y de equilibrio de mercado se definen:

Definición 4 • *Una* asignación *es un vector $(x_1, \ldots, x_n)$; es* factible *si $x_i \in X_i$ para $i = 1, \ldots, n$ y $\sum_{i=1}^n x_i \leq w$*

- *Un* equilibrio de mercado *es un vector* $(x_1^0, \ldots, x_n^0, p)$ *tal que* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *es factible y* $\forall i$, x_i^0 *maximiza* U_i *sobre el conjunto* $\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot w_i\}$

El teorema usual que enuncia la existencia de un equilibrio de mercado no se sigue aquí, ya que parte del requisito de que la función de utilidad sea cuasi-cóncava. En este caso la cuasi-concavidad asegura la hemicontinuidad de la correspondencia de demanda, con lo cual se puede aplicar el Teorema de punto fijo de Kakutani para proveer una asignación y un sistema de precios de equilibrio [4].

Por lo discutido anteriormente, a un sistema de precios dado p, pueden existir varias asignaciones $\{x_i^0\}_{i=1}^n$ tal que cada x_i^0 maximice U_i en el conjunto $\{x \in X_i : p \cdot x \leq p \cdot w_i\}$ pero no se puede asegurar que ninguna de las asignaciones alternativas verifique que $\sum_{i=1}^n x_i^0 \leq \sum_{i=1}^n w_i$, es decir que provea un equilibrio de mercado.

Por lo tanto, para demostrar la existencia de un equilibrio basta probar que existe un sistema de precios al que se da una asignación factible, maximizadora de utilidades. Como requisitos para dicha demostración, que utiliza una variante del teorema de punto fijo de Tarski, se necesitan algunas definiciones adicionales [5]:

Definición 5 *Sea* Υ *un conjunto de tuplas de la forma* $(p, x^{01}, \ldots, x^{0\alpha})$ *donde* p *es un sistema de precios y los vectores* x^{0j}, *para* $j = 1 \ldots \alpha$ *son las distintas asignaciones que provienen de todas las posibles soluciones a los problemas de los consumidores a dicho sistema de precios.*

El conjunto Υ *puede ser provisto de un orden* $\prec$ *definido como* $(p, x^{01}, \ldots, x^{0\alpha}) \preceq (q, y^{01}, \ldots, y^{0\beta})$ *sssi* $min(|x^{01} - w|, \ldots, |x^{0\alpha} - w|) \geq min(|y^{01} - w|, \ldots, |y^{0\beta} - w|)$, *donde* $w = \sum_i^n w_i$ *y* $|\cdot|$ *es la norma euclídea l-dimensional.*

Definición 6

- *Un conjunto parcialmente ordenado* A *se llama un* reticulado *si para cualquier par de elementos* $x, y \in A$, *existen* $x \wedge y \in A$ *y* $x \vee y \in A$.
- *Un reticulado* A *se dice un* reticulado completo *si para todo* $B \in A$ *existen* $\bigvee B \in A$ *y* $\bigwedge B \in A$.

Entonces vale la siguiente:

Proposición 1 *El conjunto Υ con el orden $\prec$ constituye un reticulado completo.*

Demostración 1 *El conjunto Υ resulta ordenado débilmente por $\prec$ dado que este orden se determina por el epimorfismo $min : J \to R$ definido anteriormente. Dado que el cuerpo de los reales, R es un conjunto linealmente ordenado también es un reticulado completo donde dado un conjunto $B \in R \bigvee B = max\{x \in B\} \in R$ y $\bigwedge B = min\{x \in B\}$. Esta propiedad válida para R resulta también válida para Υ, con la salvedad de que en este caso $\bigwedge B$ y $\bigvee B$ no son necesariamente únicos, pero apelando al* Axioma de Elección, *de cada uno de estos conjuntos se puede escoger un elemento al que se considera el mínimo o el máximo respectivamente.*

Sobre el reticulado completo Υ se puede definir un operador μ:

Definición 7 *Sea $\mu : J \to J$ dado por $\mu(p, x^{01}, \ldots, x^{0\alpha}) = \{(q^*, y^{01}, \ldots, y^{0\beta})$ tal que q^* da el $max_q\{q \cdot (x^{01} - w); \ldots ; q \cdot (x^{0\alpha} - w)\}\}$*

Algunas definiciones acerca de operadores sobre ordenes parciales son útiles aquí:

Definición 8

- *las* potencias en sentido débil *de un operador $T : A \to A$, donde A es un conjunto ordenado parcialmente se definen inductivamente:*
  - $T \uparrow^0 (a) = a$ *para todo* $a \in A$
  - $T \uparrow^{n+1} (a) = T(T \uparrow^n (a)) \vee T(a)$
  - $T \uparrow^\omega (a) = \bigvee_n T \uparrow^n (a)$
- *Un operador T es* finitario *sssi para toda sucesión $a_0 \preceq a_1 \preceq \ldots a_n \ldots$ vale que $T(\bigvee_n a_n) \preceq \bigvee_n T(a_n)$*

Valen las siguientes proposiciones:

Proposición 2 *Si T es un operador finitario, para cualquier $a \in A$ vale que $T(T \uparrow^\omega (a)) \preceq T \uparrow^\omega (a)$*

Demostración 2 *ver [6]*

Proposición 3 *El operador μ es finitario*

Demostración 3 *Consideremos una sucesión $a_0 \preceq a_1 \preceq \ldots$ en Υ, $\bigvee_n a_n$ es el elemento de la sucesión $a_{j*} = (p_j; x^{01}_{j*}; \ldots)$ tal que tiene el $min_j min_i\{|x^{0i}_j - w|\}$ Luego, como para cualquier a_j en la sucesión vale que $\mu(a_{j*}) \preceq \bigvee_j \mu(a_j)$*

Proposición 4 $\mu \uparrow^{\omega} (a) \preceq a \vee \mu(\mu \uparrow^{\omega} (a))$ *para todo $a \in \Upsilon$*

Demostración 4 *Sea $b = \mu \uparrow^{\omega} (a)$. Entonces vale que $b = a$ o para algún $n > 0$ $b = \mu \uparrow^{n} (a)$. Luego, para algún $n' < n$, $b = a$ o $b = \mu(\mu \uparrow^{n'} (a))$. Por lo tanto $b \preceq a \vee \mu(\mu \uparrow^{\omega} (a))$.*

Con estos conceptos se puede ahora demostrar el siguiente

Teorema 1 *Existe un equilibrio de mercado en la economía $\varepsilon = ((X_i, U_i, w_i)_{i=1}^{n}, w)$.*

Demostración 1 *Falta ver que existe un $(p, x^{01}, \ldots, x^{0\alpha}) \in \Upsilon$ tal que por lo menos uno de los x^{0i} sea factible, esto es, que $x^{0i} - w \leq 0$ Vimos que el operador μ verifica que: $\mu(\mu \uparrow^{\omega} (a)) \preceq \mu \uparrow^{\omega} (a) \preceq a \vee \mu(\mu \uparrow^{\omega} (a))$ tomando $a = min\Upsilon$ resulta que: $\mu(\mu \uparrow^{\omega} (a)) = \mu \uparrow^{\omega} (a)$ esto es, que $\mu \uparrow^{\omega} (a)$ es un punto fijo del operador μ, llamemoslo b. Luego, como $\mu(b) = b$ y $b = (p, x^{01}, \ldots, x^{0\alpha})$, por ser un elemento de Υ significa que: $p = max_{q \in S}\{p \cdot (x^{0i} - w)\}_{i=1}^{\alpha}\}$ pero por definición de Υ vale que $p \cdot (x^{0i} - w) \leq 0$ para cualquier x^{0i} en $(p, x^{01}, \ldots, x^{0\alpha})$. Luego al sistema de precios p existe algún x^{0i} tal que $x^{0i} - w \leq 0$. Es decir, que existe alguna asignación factible y por lo tanto un equilibrio de mercado.*

References

[1] Tohmé,F. Partial Preferential Orderings and Rationality, *Anales de la XXVII reunión anual de la AAEP*, 1992.

[2] Tohmé,F. Consumer Choice in a Pure Exchange Economy, resúmen en los *Abstracts del XII Encuentro Latinoamericano de la Sociedad Econométrica*, 1993.

[3] Blad.M. - Keiding,H. *Microeconomics: institutions, equilibrium and optimality*, North-Holland, Amsterdam 1990.

[4] Debreu,G. *Theory of Value*, Wiley, New York 1959.

[5] Tarski, A. A Lattice-theoretical Fixpoint Theorem and Its Applications, *Pacific Journal of Mathematics* 5(2) junio 1955.

[6] Apt, K., Blair, H.- Walker,A. Towards a Theory of Declarative Knowledge, en *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*, Minker,J. (ed.), Morgan Kaufmann Publishers, Los Altos CA. 1988.