Universidad de San Andrés

Escuela de Educación

Doctorado en Educación

Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática : la función exponencial, el razonamiento matemático y la intervención docente en la escuela media

Autor: Duarte, Ma. Betina

Director de Tesis: Sadovsky, Patricia

Septiembre de 2010

CUESTIONES DIDÁCTICAS A PROPÓSITO DE LA ENSEÑANZA

DE LA

FUNDAMENTACIÓN

EN MATEMÁTICA

La Función Exponencial, el Razonamiento Matemático y la Intervención Docente en la Escuela Media

Directora: Dra. Patricia Sadovsky
Tesista: Ma. Betina Duarte

Septiembre de 2010

TABLA DE CONTENIDOS

AGRADECIMIENTOS

“Mamá, ¿viste que cuando estás pensando
un problema de matemática, se te pasan
muchas cosas por la cabeza: números,
dibujos, fórmulas y.... de repente decís .... ¡Sí!,
y todos esos pensamientos se ordenan
y ... lo resolviste?”
Lautaro Gallo, 12 años.
Bs. As. Octubre de 2005

Cuando se llega al final de un camino recorrido durante tanto tiempo y atiborrado de experiencias intensas, mirar hacia atrás también parece una tarea infinita. Cuando además se sabe con certeza que uno ha llegado a la tercera y última tesis que piensa escribir en su vida la tentación de hacer un cierre que todo lo englobe es grande. Si además esta tesis en Educación Matemática viene a reunir caminos anteriores, inicialmente planteados como una bifurcación de la historia personal que a diario escribimos, la tentación se convierte en un mandato.

Es que la Matemática fue, en un principio, el escenario que dio origen no solo a la primera tesis sino también a los primeros grandes momentos de estudio y producción en un campo disciplinar ciertamente desafiante. Por aquel entonces la belleza de los números me fue transmitida y contagiada por gente que hoy quiero incluir en este espacio por el simple hecho de que sus palabras, sus enseñanzas, sus ilusiones se me hicieron carne y permanecieron intactas hasta hoy. Así tengo en mi mente las increíbles clases de Gustavo Corach, Norberto Fava, Carlos Sánchez, Malena Becker, Carlos Cabrelli, Demetrio Stojanov, Esteban Andruchow, Misha Cotlar, Ignacio Zalduendo, Ricardo Noriega y Adrián Paenza.

Para el año 2001 motivada por desafiantes discusiones con Silvina Gvirtz sobre temas de educación - que siempre surgían a propósito de nuestra compartida área de trabajo sobre el ingreso a la universidad - un nuevo escenario se abrió frente a mí y me dio la bienvenida al mundo de las ciencias sociales. Estoy en deuda con aquellas personas que me mostraron que una infinidad de cuestiones, problemáticas y temas estaban presentes en el mundo de la educación entramando enseñanza y aprendizajes y tuvieron la generosidad de presentármelos: Catalina Wainerman, Silvina Gvirtz, Inés Dussel, Mariano Narodovsky, Inés Aguerrondo, Jürgen Schriever, Graciela Frigerio y Fabián Repetto, entre otros.

Llegado el momento de la decisión de una tesis doctoral que terminó amalgamando estos caminos bifurcados tengo que agradecer en primer lugar a Analía Bergé por su sabia recomendación. A Patricia Sadovsky, quien ha sido durante estos años de crecimiento mucho más que directora, amiga, consejera, referente, síntesis y análisis de todo este proceso, le debo principalmente su confianza y optimismo. Es muy difícil encontrar un orden en el que pueda mencionar – con algún recorte demás está decir - algunas de las infinitas cosas que tengo para agradecerle. Seguramente puedo decir sin errar demasiado que todas las lecturas compartidas, las interminables y fructíferas sesiones de trabajo, los intercambios de opiniones, sus sesudas observaciones, su apoyo y aliento, su humor inteligente y su infinita generosidad me han dejado innumerables enseñanzas que rebalsan todo lo que me pudiera imaginar alguna vez iba a aprender adentrándome en la investigación en Educación Matemática.

Un lugar especial necesito para agradecer a Horacio Itzcovich su entusiasmo visceral con este proyecto lo que me permitió trabajar en el Marco de la Dirección de Currícula, contando así con un equipo de profesoras de Escuela Media de la Ciudad de Buenos Aires cuya participación ha sido la prueba más contundente del enorme potencial humano del que disponemos para construir proyectos que mejoren la enseñanza de la matemática junto a los docentes en este país. En estricto orden alfabético menciono y agradezco el aporte de las profesoras: Cristina Carpintero, Estela Jeanne, Fabiana Marcovich, Silvia Veiga y Gabriela Waingarten. A Horacio quiero expresarle, además, un agradecimiento especial por tantas horas de lectura compartida y escritura siempre disfrutada y amenizada con la música de esa murga que, sabemos ahora, no es uruguaya.

Las observaciones recibidas por el jurado durante la defensa del proyecto fueron indispensables para delimitar el inconmesurable espacio de investigación que me había propuesto con descabellado entusiasmo. Agradezco todos los comentarios recibidos de Carmen Sessa y Abraham Arcavi. Para llegar a esta instancia conté con la generosa colaboración de Marcelo Leiras quien me facilitó el acceso a lecturas que resultaron claves y enriquecedoras de este proyecto. También Gema Fioriti tuvo la gentileza de cargar su "valija mágica" con libros que contribuyeron a la consolidación de ideas en esta investigación.

Quiero mencionar y agradecer a Ruth Sautu que dio impulso en los inicios a los primeros escritos del taller de tesis doctoral donde, como se sabe, siempre se sufre la concepción de esa necesaria e imperfecta primera idea. También a los compañeros de ruta: Cristina Carriego, Daniel Brailovsky, Ana Bartolini, Luli Cardini, Ana María Mass y Ángela Corengia, con quienes espero un encuentro pronto "solo a celebrar". Será extraño.
Durante el trabajo de desgrabación y registro conté con la invalorable asistencia de Manuel Puente quien produjo transcripciones impecables obsequiándome además su vitalidad contagiosa, su ingenio siempre en acción y una cálida recepción a todas mis objeciones. En el ámbito laboral conté con el apoyo incondicional de Claudia Torre con quien disfruto el día a día de nuestro trabajo. La Fundación Bunge y Born me ha dado soporte a través de becas de formación, a ella le estoy enormemente agradecida.

Este trabajo tiene aún más raíces que las ya mencionadas, aquellas que se remontan a otros tiempos donde las matemáticas se asociaban más a un juego que a un oficio. Tengo en mi memoria las asombrosas clases de Nuria Susmel, en el Comercial Nº2 "Antonio Bermejo" tentando a sus alumnas de segundo año a demostrar cada día nuevos problemas de geometría donde los ángulos y triángulos, rectas y polígonos venían arrugados en pequeños papeles que garabateaba en sus viajes en colectivo. Entusiasmo que se consolidaba al escuchar mis ideas para una demostración más corta o más directa. Girando la llave del tiempo unos centímetros más tengo que mencionar a Alejandro Kuperman que allá por el año 1976, mientras el país se oscurecía en sombras tuvo la insólita ocurrencia de armar con sus alumnos de séptimo grado de la escuela pública Nº3, D.E. 3º de la Ciudad de Buenos Aires, una "Máquina de sumar en sistema binario", que si bien no fue adquirida por ninguna empresa de calculadoras de bolsillo, nos enredó a los alumnos de aquella división en el estudio de distintos sistemas de numeración mientras aprendíamos a soldar lamparitas. Rindo así homenaje a la educación pública que me ha brindado todo el conocimiento matemático que tengo hoy.

Lo que queda en estas líneas es personal y he decidido hacerlo público con el cuidado y el cariño necesario. A los amigos que en este tiempo (y en anteriores también) me escucharon tantas veces decir "no, no, falta más que antes" y con sonrisa en mano me acercaron cariño y apoyo necesito convocarlos una vez más: a Claudia Betoldi, amiga del alma, a prueba de distancias, a Vivian Cahn con quien batallé codo a codo desde la matemática hasta la maternidad primera, a Roxana Pozuolli que me ayuda a cultivar la sabiduría hecha risa, les

debo tanta lealtad. Al Maestro Marcelo Silberleib no puedo hacerle faltar un contrapunto en esta sinfonía interminable de otras notas, su música ha hecho milagros y él lo sabe. A Carola Frydman y Lucila Minvielle, alumnas de antes y amigas desde algún momento en el que el afecto continúa cuando la docencia termina, les debo muchas lecciones.

Quitando el último velo llego al corazón en sí mismo. En estos años de tesis doctoral he tenido en mi familia un incondicional apoyo para esta exorbitante empresa. Mis hijos han sido mis primeros aliados. La cálida sonrisa de Guadalupe, la sutil inteligencia de Lautaro y la desbordante energía de Eugenia fueron mis mejores armas y es a ellos a quienes dedico este trabajo. A Marita, hermana y compañera de la vida, le quiero advertir que de no tener cuidado la "cultura hormiga" se puede volver costumbre y recordarle que su luz me es imprescindible. A mi madre Beatriz, maestra argentina de aquellas a quien vi tantas veces sus manos blancas llenas de tiza y su éxtasis en el disfrute de la enseñanza, necesito agradecerle la libertad con la que me enseñó a vivir. Y a mi padre Alejandro contarle que, aunque partió cuando todo este proyecto se estaba gestando, su legado - presente en mí - me permitió llegar hasta aquí. Algunos hechos en la vida se comprenden luego de mucho tiempo, tanto, que a veces hay que quitarles el polvo. Hoy está tan claro el significado de aquella muñeca de tela que llegó a mis manos el día que nací, de la mano de su amigo David. Ella está conmigo.

Bs. As. Septiembre de 2010

1. INTRODUCCIÓN

1.1. SOBRE LA ESENCIA DE ESTE TRABAJO

Este trabajo está orientado por una pregunta fundamental: ¿cómo se introduce a los alumnos en el quehacer matemático? Es decir, cómo se acerca a los alumnos a un tipo de prácticas que tengan correlato con el trabajo del matemático, de la producción de ideas en este campo. Este planteo inicial conduce a otros interrogantes (como suele ocurrir en el trabajo en cualquier campo disciplinar en el cual una pregunta sobre un elemento dispara otras que van formulando un camino de ideas). La pregunta en este caso es ¿y en qué consiste el trabajo matemático? Y refinando la pregunta ¿en qué puede consistir el trabajo matemático en la escuela? ¿Consiste en hacer cuentas? ¿En estimar o aproximar valores? ¿En averiguar el valor de incógnitas que figuran en ecuaciones? ¿En producir fórmulas que no tienen ni desean tener aplicación en la vida diaria? ¿En conjeturar? ¿En comprobar hipótesis?

Para los alumnos de la escuela media el quehacer matemático está más cerca del aprendizaje-estudio de propiedades y la aplicación de las mismas que de la producción de conjeturas y su validación, o, dicho con un poco más de especificidad, que de la producción y enunciado de propiedades referidas a objetos matemáticos y de la consecuente investigación sobre su veracidad. La escuela se ha encargado de montar este escenario. La escuela, los programas, los libros, no necesariamente los docentes.

En este trabajo intentamos poner en primer plano el trabajo docente destinado a la producción de ideas en la comunidad matemática "aula". Creemos que la enseñanza de la matemática en la escuela media no puede dejar de contemplar este aspecto vital de la Matemática como disciplina productora de ideas. Pensamos también que los alumnos de la escuela media son capaces de acercarse a este modo de trabajo. Sostenemos además que los docentes de la escuela media tienen las herramientas necesarias y suficientes para llevar adelante esta tarea. Creemos, en definitiva, que la complejidad de esta actividad es abordable en este contexto de enseñanza, que un estudio que de cuenta de las condiciones que requiere un trabajo de esta índole, sus posibilidades y sus límites puede trazar un camino. Aquí vamos.

Este estudio no aborda directamente las cuestiones relacionadas con la enseñanza de la demostración. Muchos otros trabajos de autores conocidos se encargan de ello. Hemos preferido trabajar un aspecto más genérico y tal vez previo al de la enseñanza de la demostración que es la producción de fundamentaciones, (adelantamos que las fundamentaciones son ciertos argumentos en un contexto matemático). Entendemos que fundamentar la producción de ideas, de respuestas, de procedimientos muestra un claro - oscuro de la matemática tantas veces entendida como una actividad mecánica de aplicación de reglas y algoritmos. Cuando el alumno aprende a fundamentar encuentra, dentro del lenguaje matemático, la forma de dar el por qué de sus actos y este recurso le da autonomía.

Tendremos nuestra mirada puesta en el docente, en el alumno y en la comunidad clase. Estas tres unidades de análisis formarán un triángulo de preguntas y de relaciones que esperamos nos conduzcan a una mejor comprensión sobre las condiciones didácticas necesarias para un proceso de enseñanza aprendizaje de la fundamentación en matemática.

1.2 UN CONJUNTO DE PREGUNTAS COMO MOTOR DE BÚSQUEDA

A continuación precisamos aquellas preguntas que estuvieron presentes a lo largo de toda la investigación (necesariamente mutando y esclareciéndose a lo largo del proceso) guiando la búsqueda de trabajos anteriores, el diseño de la investigación y finalmente el análisis de los datos recogidos.

1.- ¿Cómo se enseña a demostrar? Esta es la pregunta que se hicieron matemáticos y pedagogos desde siempre y sin llegar a la respuesta total han surgido diferentes propuestas de enseñanza tales como la enseñanza de técnicas de demostración en geometría (la doble columna para distinguir afirmaciones de validaciones) o los pasos que propone Polya para pensar en la resolución de problemas matemáticos o el desarrollo de pruebas y refutaciones que analiza Lakatos.

2.- ¿Cuáles son las funciones de la demostración? ¿cómo podría comprender/sostener un alumno su necesidad y su utilidad? ¿cuáles son las funciones para la comunidad matemática y cuáles de estas funciones son trabajables en el aula?

3.- ¿Cuáles son las dificultades cognitivas asociadas al aprendizaje de la demostración, de la fundamentación y de otras formas de explicaciones matemáticas?

4.- ¿Puede existir alguna forma de transposición didáctica para la demostración en el aula?

5.- Si esta forma es la fundamentación ¿qué se conserva y que se pierde de la demostración al trabajar la fundamentación con los alumnos?

6- ¿Hay formas más o menos estructuradas asociadas a la fundamentación? Toda argumentación ¿es una fundamentación? ¿Cómo puede un docente decidir qué tomará como una fundamentación y qué no alcanzará a serlo? ¿Vale la pena definir taxativamente con los alumnos qué se entenderá por una fundamentación?

7.- ¿Cómo puede un docente monitorear los procesos deductivos de sus alumnos? ¿Cómo seguirlos, corregirlos, interpelarlos? ¿Qué conflictos se le plantean y tiene que resolver para gestionar la enseñanza de la fundamentación?

1.3 EL OBJETIVO DE ESTA INVESTIGACIÓN

Las investigaciones realizadas hasta el momento toman situaciones de clase para entender las dificultades de los alumnos en la comprensión de las características del trabajo matemático y estudian las respuestas de los estudiantes a raíz de las consignas recibidas sin poner el foco en la interacción con el docente. Creemos que una investigación que aporte el análisis de la gestión docente triangulando el análisis "alumno - propuesta de clase" puede contribuir a comprender el problema de la enseñanza de la fundamentación. Si bien analizaremos el rol del docente en la clase de matemática, el análisis tendrá en cuenta tanto a los alumnos como al medio utilizado. En tal sentido la mirada estará puesta en todo el sistema didáctico en conjunto[1].

En esta tesis nos proponemos abordar el proceso de emergencia de la fundamentación como parte del trabajo matemático en clases de la escuela media. Procuramos investigar la perspectiva de la enseñanza a partir de una experiencia construida junto a docentes y estudiada luego en clase. Se espera de este modo abordar la complejidad del tema y así poner en evidencia **condiciones didácticas** para un proceso de enseñanza-aprendizaje de la fundamentación.

Más específicamente nos proponemos:

Estudiar qué estrategias ponen en juego los docentes para promover un trabajo de fundamentación en sus clases que permita compatibilizar su concepción acerca de esta actividad (en referencia a su utilidad, necesidad y problemática) con las dificultades que emergen en virtud del conocimiento de sus alumnos y de la propia gestión de la clase de matemática.

Analizar cómo emergen en la clase ideas clave para el trabajo de fundamentación, cómo las tratan los profesores en sus interacciones con los estudiantes y qué operaciones realizan para que sean consideradas por los alumnos como base para la producción de argumentos.

1.4 ESTRUCTURA DE ESTA TESIS

En el Capítulo 2 realizamos una revisión de la literatura existente sobre la producción de distintas formas de razonamientos matemáticos: la argumentación, la prueba, la demostración, entre otras. Presentaremos aquellas investigaciones que habiendo abordado cuestiones relativas a la enseñanza de estas formas de razonamiento nos han permitido ahondar en nuestras preguntas iniciales y precisarlas.

[1] Brousseau (1986: 34).

En el Capítulo 3 desplegaremos el Marco Teórico de esta investigación tomando en primer lugar aquellos elementos de la Teoría de Situaciones que nos han aportado las ideas centrales acerca de cómo entendemos la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Luego desarrollaremos la noción de Fundamentación a partir de un proceso de análisis de otras nociones que fueron desarrolladas en investigaciones anteriores discutiendo sus posibilidades y sus límites. Finalizamos el Marco Teórico exponiendo aquellas condiciones didácticas que hemos desarrollado para analizar la emergencia de la fundamentación en clase, en un proceso de interacción entre el docente y los alumnos.

En el Capítulo 4 describiremos los aspectos metodológicos de esta investigación. En tal sentido daremos cuenta de las decisiones tomadas sobre el diseño de la misma y los vínculos que ellas tienen con nuestras concepciones teóricas.

En el Capítulo 5 abordaremos uno de los escenarios principales sobre los que se sostiene la investigación. Presentaremos la problematización de la enseñanza de la fundamentación llevada adelante con los docentes en El Taller. Daremos cuenta de este modo como se fue gestando la intencionalidad docente necesaria para promover la enseñanza de la fundamentación.

En el Capítulo 6 desarrollaremos el conjunto de problemas desarrollados en el Taller en forma conjunta con los docentes del proyecto presentando para cada uno de ellos el análisis a priori y algunas producciones de los alumnos para así poder enriquecer y profundizar nuestro primer análisis.

En el Capítulo 7 analizaremos la gestión docente en clase a partir del micro análisis. De este modo tomaremos como unidad de análisis algunas expresiones de los docentes y el sentido que con ellas el docente le confiere a la fundamentación. Nuestra pregunta motora es: cuáles son aquellas intervenciones docentes que resultan fértiles de cara a la emergencia de la fundamentación. Este análisis continuará en el Capítulo 8 a partir del mezzo análisis.

En el Capítulo 9 expondremos las conclusiones de esta investigación.

2. ESTADO DEL ARTE

> Maestro: "Ciertamente las conjeturas ignoran desagrados y sospechas pero no pueden ignorar los contraejemplos"
> Lakatos, Pruebas y Refutaciones

2.1 INTRODUCCIÓN

Un número importante de investigadores provenientes del campo disciplinar de la matemática se ha abocado desde tiempo atrás a investigar, la problemática de la demostración – dándole un lugar privilegiado en el conjunto más amplio de las **formas de razonamiento matemático**. Existe un núcleo de textos clásicos, a menudo citados, (Polya, 1945, Bell, 1976, 1979 y Lakatos, 1976) que analizan la complejidad de este objeto "la demostración". En ellos distinguimos dos planos de consideración: uno de ellos dado por el análisis de la demostración como forma de razonamiento matemático y como medio específico para producir conocimiento y el otro plano vinculado a su enseñanza. Si bien todos toman el contexto de clase su interés por las cuestiones didácticas y el abordaje de las mismas es disímil. Veamos un panorama de la producción de estos tres autores que han constituido una referencia básica para quienes de distintas maneras han estudiado este problema de cara a la enseñanza.

Polya concentra su atención en las fases de descubrimiento durante los procesos de resolución de problemas y en los momentos que se desarrollan durante la producción de resultados matemáticos. Uno de los aspectos que nos interesan del trabajo de Polya es la certeza que el autor manifiesta sobre la necesidad de conocer los problemas que dieron origen a una teoría para poder así comprender el contenido de la misma. Del mismo modo encontramos en Polya la necesidad de involucrar a los estudiantes en los procesos de producción de las nociones que se van a enseñar. Además el autor menciona algunos recomendaciones para el docente a la hora de ayudar a sus alumnos que, entendemos, están en sintonía con algunos aspectos de la Teoría que enmarcará nuestro trabajo. Para citar solo algunos digamos que Polya destaca la necesidad de que el docente trabaje de forma tal que el alumno construya una autonomía para pensar y resolver problemas a lo largo de su proceso de aprendizaje y que para que esto ocurra es necesario - ya no que el docente deje solo al alumno lo que puede ser, en términos de Polya una situación de soledad improductiva - sino que le acerque una serie de preguntas y de sugerencias que resulten "naturales" y "no intrusivas".

Para estudiar la actividad de los alumnos durante la resolución de problemas y la producción de pruebas y explicaciones, Bell presenta un conjunto de fases distinguiendo en ellas aspectos que las acercan y las alejan de las que podría realizar el matemático profesional. Dialoga durante esta descripción con la producción de Polya sobre la heurística en los procesos de resolución de problemas. Entiende que la prueba matemática o demostración tiene tres sentidos o significados matemáticos. En primer lugar propone el de **justificación o validación** concerniente al establecimiento de la validez de la proposición en juego, en segundo lugar propone el de **iluminación** ya que, según Bell, se puede esperar de una buena prueba que ésta permita descubrir el por qué de la proposición en juego. Finalmente propone como tercer sentido el de **sistematización**, en relación con la organización sistemática del conocimiento matemático en conjuntos de axiomas y resultados derivados.

Lakatos acerca a los lectores al proceso de producción de conjeturas y su diálogo intermitente con pruebas y refutaciones a partir de una parodia de discusión entre un maestro imaginario y sus alumnos de matemática[2]. Desmitifica, a partir de este escenario, la producción en el campo de la matemática, pensada a veces como un devenir de axiomas bien organizados seguidos de teoremas y corolarios producidos todos mediante un ejercicio de la deducción – con o sin conflictos - por alguna mente solitaria y brillante y la representa como un escenario de producción colectiva donde el aporte de unos y otros se amalgama, se confronta, o se articula engendrando el conocimiento matemático . Propone el término prueba para dar cuenta de un conjunto de explicaciones que no podrían ser consideradas, por diversas razones, como demostraciones pero que, sin embargo en términos de Lakatos encierran la comprensión del problema que está en cuestión. De este modo la figura del Maestro responde al alumno quie le pide que se rinda ante la construcción de un contraejemplo:

[2] Fue Polya quién sugirió a Lakatos la conjetura de Euler en su tema de investigación, el que finalmente dio lugar a "Pruebas y Refutaciones".

> Maestro: Coincido con usted en que la *conjetura* ha recibido una severa crítica mediante el contraejemplo de Alfa, pero no es cierto que la *prueba* haya "errado completamente el tiro". Si, por el momento, está usted de acuerdo con mi anterior propuesta de usar la palabra "prueba" para referirnos a un "experimento mental que conduce a la descomposición de la conjetura original en subconjeturas", en vez de usarla en el sentido de una "garantía de determinada verdad", no hay por qué sacar esa conclusión. Mi prueba demostró ciertamente la conjetura de Euler en el primer sentido, aunque no necesariamente en el segundo. Usted está tan sólo interesado en pruebas que "demuestren" aquello que se han propuesto probar. Yo, por mi parte, estoy interesado en las pruebas aun cuando no cumplan su pretendido fin. Colón no descubrió la India, pero descubrió algo bastante interesante. (Lakatos: 1963, 30. La bastardilla es del autor)

De este modo encontramos en Lakatos algunas ideas precursoras respecto de razonamientos que conducen a una mayor comprensión de conjeturas elaboradas aun cuando no producen las demostraciones que la comunidad matemática espera. También aparece en este mismo párrafo la noción de **experimento mental** que será luego reutilizada tanto como ésta de la **prueba** por Ballacheff.

Hacia fines de los 80 y durante los 90 fundamentalmente, el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración y más en general de las formas del razonamiento matemático ha suscitado interés en el campo de la didáctica (Hanna, 2000). Surgieron de este modo un conjunto de escritos sobre el tema encuadrados en el área de la Educación Matemática.

Estas investigaciones se han concentrado en discutir cuáles son las distintas formas del razonamiento matemático y cuáles son sus características como condición previa y necesaria para comprender qué tipos se pueden tomar como referencia para su enseñanza en la escolaridad básica. Este acercamiento de corte epistemológico se centran en el objeto "formas del razonamiento matemático" para el análisis.
Por otro lado hemos hallado un grupo de trabajos que constituyen investigaciones empíricas y estudian el problema de la enseñanza y aprendizaje de algunos de estos modos de razonamiento en el aula. Estamos distinguiendo entonces entre quienes estudian las formas de razonamiento y quienes se centran en el problema de la enseñanza y el aprendizaje. Así los presentaremos.

2.2 FORMAS DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Cuando se habla de formas del razonamiento matemático se alude, principalmente, a las formas que puede tener el razonamiento de la comunidad productora de conocimientos nuevos. Como síntesis de nuestra búsqueda bibliográfica podemos decir que estas formas se estudian en calidad de un objeto constituido cuyas características se pueden comprender a partir de producciones específicas de la comunidad matemática tomadas por disciplinas como la lógica y - a partir de su conocimiento o de sus características - se hipotetiza acerca de la posibilidad o no de considerarlas para su enseñanza. Este análisis tiene en cuenta entonces tanto los beneficios que su aprendizaje podría tener en la formación del alumno como los obstáculos (en alusión a las dificultades que plantea para la enseñanza y para el aprendizaje). En este grupo de investigaciones encontramos a autores tales como De Villiers, Hanna, Arsac y Mante, Ballacheff, Duval, Pedemonte, Ramán y Heinze.

De Villiers (1990), aporta un conjunto de funciones y propósitos que tiene la **demostración**, (en tanto actividad del productor de matemática) y que, en su opinión, suelen quedar en el olvido tras la más conocida función de validación. Las funciones mencionadas por De Villiers[3] (verificación, explicación, conocimiento, sistematización, descubrimiento, comunicación) fueron luego ampliadas por Hanna(2000) (construcción, exploración), quien destaca el papel privilegiado que tienen aquellas demostraciones que además de validar, **explican** y las propone como las más adecuadas para la enseñanza (reconociendo, no obstante que no se encuentra una demostración de estas características para cada núcleo/concepto de matemática del currículum de la escuela). En un trabajo posterior ambos autores acercan una conceptualización sobre la argumentación, un discurso razonado que no es necesariamente deductivo pero que utiliza elementos de convicción, en tanto que para los autores la demostración puede expresarse como una cadena de inferencias deductivas bien organizadas que utiliza argumentos de necesidad" [4]

Tomamos estas conceptualizaciones por dos motivos. El primero es el de dar cuenta que atrapar estos objetos en definiciones resulta una actividad compleja aunque necesaria en la medida que estas conceptualizaciones, creemos, nos acercan a la problemática de su

[3] De Villiers, a su vez se apoya en la investigación de Bell (1976: 24), que hemos mencionado en la Introducción de este capítulo.
[4] Hanna y de Villiers, (2008: 331).

enseñanza. El matemático se mantiene, muchas veces, fuera de esta discusión[5] y si bien el uso de demostraciones y su producción constituye su actividad permanente, no aparece la necesidad de su conceptualización. Sin embargo para la comunidad educadora - tal como lo señalan Hanna y de Villiers - esto tiene importantes consecuencias en la enseñanza.

Pasemos al segundo motivo por el que la cita nos parece interesante. Como ellos observan, "algunos investigadores ven a la demostración como una producción distinta, de otra índole, con respecto a la argumentación, mientras que otros ven a la argumentación y a la demostración como un continuo más que como una dicotomía. Esta diferencia en los puntos de vista trae aparejadas importantes consecuencias didácticas. El primer grupo hará foco en la organización lógica de enunciados en una demostración y pretenderá enseñar un marco conceptual que permita producir demostraciones de forma independiente a la resolución de problemas. El segundo grupo por su parte focalizará en la producción de argumentos en el contexto de la resolución de problemas, experimentación y exploración, pero esperará que estos argumentos sean luego organizados lógicamente para dar forma a una demostración matemática" (ibid.).

Si bien nuestra investigación no tiene como propósito estudiar la enseñanza de la demostración nuestra posición teórica coincide con lo señalado por Hanna y de Villiers en la idea de mirar a la argumentación y a la demostración como las puntas de un continuo[6] y a partir de allí se desprenden la propuesta de actividades que hemos planteado a los alumnos. En ellas (presentadas y analizadas en el Capítulo 6) los alumnos tendrán oportunidad de desplegar – a propósito de problemas con contexto – una actividad exploratoria que los llevará a producir algunas sentencias acerca del funcionamiento del

[5] Ramán ilustra en su investigación esta situación a partir de un diálogo que está originalmente escrito por Davis and Hersh (1981: 39-41) en el que un estudiante interesado en entender qué es una demostración le transmite esta inquietud a un matemático. En tal situación las primeras explicaciones del matemático le sugieren al estudiante que una demostración es algo subjetivo a lo que el matemático responde: "No, no! No hay nada subjetivo acerca de una demostración. Todo el mundo sabe qué es una demostración. No hay más que leer algunos libros tomar un curso dictados por una matemático competente y lo entenderás". De este modo Ramán nos señala que la demostración en el ámbito matemático es algo que simplemente se transmite a partir de su realización.

[6] Como fundamentaremos a lo largo de todo este estudio, esta posición se sustenta en una concepción según la cual la inmersión de los estudiantes en los modos de producción de una disciplina supone un proceso de interacción sostenido entre la cultura de los alumnos, la de la clase como totalidad y de la disciplina como producción social y cultural. Desde esa perspectiva entendemos que la idea de hacer foco sólo en la organización lógica de los enunciados constituye una suerte de aplicacionismo (en el sentido de un traslado o proyección de una categoría teórica desde un campo hacia otro) que proyecta en el sujeto formas ya elaboradas pero tiende a atribuir un papel obstaculizador en lugar de un papel productivo a la cultura de los alumnos en la construcción de las ideas que refieren a los modos de producción de conocimiento matemático.

modelo exponencial en dichas situaciones contextualizadas. A continuación se les presentará un conjunto de problemas descontextualizados donde las producciones de los alumnos se podrán analizar con mayor claridad en términos de conjeturas matemáticas y sus correspondientes **fundamentaciones**.

En referencia a este punto acordamos con Ballacheff (2008, 502) que la prueba y la demostración dependen del contexto y del contenido. Más aún, creemos que el conjunto de decisiones que hemos tomado en nuestra investigación - tanto en la producción del material para los alumnos así como también en la organización del proyecto de enseñanza - son consistentes con nuestro posicionamiento teórico (y daremos cuenta de ello en el marco teórico) . Como menciona el autor:

> "How do we take into account the tangle of context and content? The way we answer these questions determines our view of what a mathematical proof is from a teaching-learning point of view. The way we choose to answer these questions, either consciously or not, speaks for our epistemology of proof and for our own rationality."[7]

A raíz de las dificultades que tiene la enseñanza de la demostración, Hanna (1996 y 2000) presenta otras formas de trabajo matemático – que tienen puntos de contacto con la fundamentación - y que adquieren para la autora un gran valor para la enseñanza por su capacidad para desplegar preguntas e ideas (se vincula este trabajo a la heurística) en los alumnos a propósito de conceptos de la geometría. Ellas son la **exploración**, las **técnicas heurísticas** y las **pruebas visuales**.

Sin embargo, llevadas al seno de la comunidad matemática, estas otras formas de razonamiento han sido puestas en discusión. Si bien no hay consenso al respecto, una amplia mayoría de matemáticos sostiene y defiende (y el artículo de Hanna da cuenta de ello[8]) la idea de que estas formas de trabajo no pueden constituirse en reemplazo de la demostración pues entienden a la demostración como la única forma de sostener el crecimiento con rigor en la ciencia matemática reconociendo que la demostración también "tiene un valor central al posibilitar la comunicación de ideas y generar entendimiento" (Thurston, 1994: 162) y admitiendo, no obstante, el valor heurístico del trabajo computacional.

[7] "¿Cómo tomamos en cuenta el tandem contexto-contenido? La forma en la que respondamos estas preguntas determina nuestro punto de vista acerca de lo que es una demostración desde un punto de vista de enseñanza y aprendizaje. La forma en la que elegimos contestar estas preguntas, de un modo consciente o no habla de nuestra epistemología y de nuestra racionalidad". (ibid.,503)

[8] Hanna, 1996

Esta discusión en el campo académico de la matemática acerca de la continuidad o no de la demostración como único medio de producción y avance en la disciplina es el motivo - en términos de Hanna - de su abandono y pérdida de interés para su enseñanza en el aula.
De forma similar Barallobres plantea una comparación entre la continua necesidad de consensuar la aceptación de la calidad explicativa de una demostración en la comunidad matemática con la necesidad de acordar criterios con los alumnos para dar cuenta de cuando las pruebas elaboradas por ellos resultan una validación intelectual (lo que es el objetivo de su investigación: el estudio de validaciones intelectuales en el ámbito del álgebra). En tal sentido Barallobres (2004) expresa que:

> "En una situación de validación, conocimientos de niveles diferentes están en juego: aquellos vinculadas a la adopción de algunas normas, aquellos vinculadas a la producción de una prueba, aquellos vinculadas a la validación de las pruebas producidas. Con relación a estos últimos, Arsac (1996) pone de manifiesto que, en la actividad matemática, ninguna demostración se ajusta nunca a todas las normas que determinan la validez del razonamiento, por razones variadas: el análisis de las demostraciones evidencia lagunas desde el punto de vista de la estructura deductiva, hay implícitos, "lemas ocultados" (Lakatos, 1976). En cada época, existen convenios que reinan entre los matemáticos en lo que refiere al nivel de explicitación necesario para una demostración. De esta manera, incluso si existe normas teóricas para la demostración, la comprobación de la conformidad con todas estas normas está incluida siempre en el debate entre matemáticos. Según Arsac, esto significa que en la enseñanza, cuestiones similares plantearán problemas de contrato didáctico".

Creemos que esta es una "extrapolación" exacerbada de la actividad del ámbito académico a la del ámbito de la enseñanza que no toma en cuenta las características particulares de la comunidad matemática "aula" que está inmersa en la confrontación. Por ende no compartimos esta visión. A partir de nuestra investigación mostraremos que la enseñanza de los modos del razonamiento matemático (en general, cualquiera sea la forma que se adopte) es compleja en tanto no se trata de un modo de razonar **natural** (Panizza, 2005), sino de un producto **cultural** y de difícil aprehensión tanto para alumnos como para docentes.

Los problemas de la enseñanza del razonamiento matemático se plantean, para Brousseau (2004) bajo el aspecto de una paradoja puesto que el razonamiento matemático no es un razonamiento natural. Esto lleva a que Brousseau pregunte:

> “¿Cómo enseñar a un alumno "cómo razonar" si no lo sabe aún, mientras que el razonamiento es justamente el medio que le es preciso para entender y aprender lo que es un razonamiento? ¿Cómo enseñarle a aceptar únicamente conclusiones por el ejercicio de su propio juicio, sin dejarse influenciar por otras causas mientras que este juicio no está adquirido aún…?”

La fuerza de esta paradoja podría relativizarse al considerar, en forma análoga, la cuestión de la adquisición de la lengua materna (respecto de los cuales podría considerarse la misma situación paradojal). No obstante creemos interesante destacar que el razonamiento matemático es aquí tratado como un producto cultural y este es un elemento central para que Brousseau plantee su paradoja. A su vez, la contradicción señala la necesidad de pensar el problema de la enseñanza teniendo en cuenta una comunidad de referencia y atribuyendo un valor central a las interacciones.

En consonancia con el planteo de Brousseau, Balacheff (1987) destaca la dimensión social de la **prueba** en tanto herramienta de comunicación y convencimiento. Para su estudio propone una aproximación en dos dimensiones: una situacional (en referencia a la Teoría de Situaciones) y otra cognitiva. El trabajo de Balacheff tiene la particularidad de condensar tanto la perspectiva teórica, como la experimental a partir de ejemplos de clase, aún cuando no explicita las condiciones en las que se realizaron las experiencias en aula.

Para Balacheff es necesario distinguir desde el punto de vista didáctico expresiones que los matemáticos consideran similares tales como: **explicación**, **razonamiento**, **prueba** y **demostración**. Así el autor define el concepto de **prueba** en términos de

> “…una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Esta decisión puede ser el objeto de un debate cuya significación es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores”

Nos interesa destacar aquí dentro de la dimensión social que Balacheff le adjudica a la prueba la necesidad de tomar como objeto de debate el sistema de validación. Este hecho nos hace pensar en el papel importante e ineludible que debe desempeñar el docente.

De forma análoga a la categorización que realizan Bell, De Villiers y Hanna sobre las funciones de la demostración Balacheff distingue las pruebas según sus propósitos en: pruebas para decidir, para comunicar o para saber. Entendemos que esta categorización (que, como el autor aclara, no supone una partición) está planteada a la luz de la Teoría de Situaciones (situaciones de acción, de comunicación y de validación) y pensamos que la misma contribuye a pensar sentidos posibles para una entrada al trabajo de la fundamentación – actividad matemática que propondremos a lo largo de esta investigación. También creemos que este modo de ver las pruebas pone énfasis en los saberes (prácticos o teóricos) que ellas pudieran convocar.

El estatuto de los conocimientos involucrados y aquello que Balacheff define como la "**racionalidad empleada**" le permite armar una tipología de pruebas. Así surgen: el empirismo naif, la experiencia crucial, el ejemplo genérico y finalmente la experiencia mental[9]. Según el autor estos tipos permiten analizar - graduar, detallar - con mejor precisión el paso de las pruebas pragmáticas hacia las formales. Pensamos, sin embargo, que su categorización surge de un trabajo muy específico y creemos que todavía puede o debería confrontarse a la luz de un trabajo de enseñanza con otros objetos matemáticos.

También Duval (1990) propone distinguir formas de razonamiento según la situación o tarea particular que se intenta llevar adelante: resolver un problema, convencer a otros o probar un resultado. Para este autor cualquier intento de enseñanza de una forma de razonamiento se enfrenta con las prácticas de la argumentación que representa la forma natural que tienen los alumnos de pensar. Duval (1990) propone, entonces analizar el funcionamiento cognitivo de la **argumentación** y la **demostración**[10] buscando por este medio conocer las dificultades del aprendizaje de la demostración. En términos de Duval una argumentación es ante todo un razonamiento, un proceso de inferencia por el cual se produce una afirmación derivada de una o muchas proposiciones presentadas.
Duval desarrolla un concepto que le permite reconocer y distinguir una argumentación de un razonamiento deductivo: el **estatuto operatorio** de las proposiciones invocadas. Es esta distinción lo que para Duval[11] da cuenta de una "**ruptura o distancia cognitiva**" entre las dos formas analizadas. Es esta la razón por la cual el autor concluye que la enseñanza de la argumentación no contribuye a la enseñanza de la demostración. Esta última requiere de una enseñanza que ponga en evidencia la estructura ternaria del razonamiento deductivo y el estatuto operatorio que juega una sentencia en cada una de sus componentes. Para el análisis de la dimensión social y subjetiva de estos razonamientos el autor introduce la noción de "**valor epistémico**" la que marca el valor de creencia u opinión que tiene el locutor sobre un enunciado.

[9] Las características de cada uno de ellos son presentados en el Marco Teórico.
[10] Compartimos la pregunta que moviliza el estudio de Duval: "en qué medida la enseñanza de la argumentación es el mejor camino para conducir a los estudiantes hacia el razonamiento deductivo y la demostración" y buscamos ampliarla a otras formas del razonamiento matemático.
[11] Desarrollaremos en profundidad la propuesta de Duval en el Marco Teórico.

Pedemonte (2000, 2005, 2007, 2008) también compara y analiza relaciones entre argumentaciones y demostraciones en el ámbito de la geometría, aunque precisa su estudio a un tipo especial de argumentaciones: aquellas que contribuyen a formular y justificar conjeturas. Pedemonte se ocupa de analizar las argumentaciones bajo el modelo de Toulmin[12] y su trabajo nos interesa pues este análisis que sostiene Pedemonte permite comprender algunas de las dificultades que hallan los alumnos en la producción de fundamentaciones. Las primeras conclusiones del trabajo de Pedemonte[13] se alejan de las de Duval en tanto éstas señalan una **continuidad cognitiva** entre argumentación y demostración para el caso de la producción y validación de una conjetura en el área de la geometría. En particular, mediante esta perspectiva de análisis Pedemonte sostiene que la demostración es un tipo particular de argumentación contraponiendo esta visión a la de Duval para quien los razonamientos deductivos tienen características que los distinguen y alejan de los razonamientos argumentativos. Posteriormente Pedemonte (2007) avanza en el análisis de estas mismas argumentaciones y demostraciones a partir del mismo experimento de aula pero, en esta situación, el análisis estructural que propone la lleva a concluir que "although there are clear cases of continuity between argumentation supporting a conjecture and its proof, there is often a structural distance between the two (from an abductive argumentation to a deductive proof, from an inductive argumentation to a mathematical inductive proof)."[14]

El análisis del protocolo de resolución de algunos problemas de los alumnos con los que se realizó el experimento le permite observar a Pedemonte que, en algunas argumentaciones que la autora llama abductivas (tomamos su clasificación aún cuando deseamos precisar que la abducción vendría dada por un hecho observado a partir del uso del software que le indica al alumno la congruencia de un grupo de triángulos y es ante tal evidencia que los alumnos se abocan a buscar razones para justificar las congruencias que el software señala) y su correspondiente prueba hay una unidad cognitiva (en función de los conceptos que los

---

[12] Toulmin desarrolla un modelo para el análisis de la estructura de argumentaciones no necesariamente incluidas dentro del campo de la matemática.

[13] El análisis de Pedemonte (2005, 2007, 2008) utiliza situaciones de la geometría propuesta alumnos de 12º y 13º grados (15 a 17 años) en el proceso de enseñanza de la demostración en Francia e Italia. Se trata de tres problemas abiertos de geometría que los alumnos pueden resolver en grupos utilizando el Cabri. La producción de conjeturas es el objetivo del problema así también como su demostración. Durante ese proceso se estudian las argumentaciones que producen los alumnos, tanto durante la producción de la conjetura como luego para demostrarla, allí donde se gesta la demostración.

[14] "Aun cuando existen casos claros de continuidad entre la argumentación que sustenta la conjetura y su prueba existe a menudo una distancia estructural entre ambas (desde una argumentación abductiva hacia la prueba deductiva y desde una argumentación inductiva hacia la prueba inductiva)"

alumnos esgrimen durante sus diálogos, la presencia de una teoría matemática que también evocan y su uso por escrito en la producción escrita de sus pruebas) entre argumentaciones y pruebas. Sin embargo Pedemonte señala una distancia estructural en la medida que las argumentaciones producidas son abductivas (porque antecede la conjetura a la producción de datos) en tanto que las pruebas desarrolladas son deductivas[15]. Otros ejemplos que muestra la autora dan cuenta de casos donde hay continuidad en la estructura organizativa de argumentaciones y pruebas (siendo en ambos casos abductivas).

Nos importa recalcar aquí que tanto la conclusión de Pedemonte como su elección de un tipo específico de argumentaciones muestran que la argumentación reúne prácticas de características muy diversas, aún siendo analizada en el propio campo de la matemática. Nos interesa además el estudio de Pedemonte pues da cuenta de la necesidad de considerar forma o estructura y contenido tanto en argumentaciones como en las pruebas que la autora considera. Retomaremos esta cuestión de la forma y la estructura en el Marco Teórico.

Es claro el interés de estos estudios (que toman formas del razonamiento matemático y estudian su relación con la demostración) en acercar a los alumnos al trabajo de producción de conocimiento. Más allá de las relaciones que se puedan establecer, cada una de las formas propuestas (la argumentación, la prueba, la deducción) tiene un valor formativo en sí misma ya que instalan como asunto la relación de los estudiantes con la construcción de la verdad a través del conocimiento.

Como veremos más adelante en el Marco Teórico del trabajo, la distinción entre prueba y demostración resulta central para nuestro trabajo y es compartida por otros autores como Barallobres (2004) quien toma la situación de enseñanza del álgebra en alumnos de 12 o 13 años para investigar las condiciones que pueden favorecer la producción de pruebas intelectuales. El álgebra tiene la particularidad de poder pensarse como una herramienta de producción y de comunicación de "formulaciones genéricas". Para Barallobres "la construcción de la racionalidad matemática no puede ser aislada de la construcción de conocimientos matemáticos específicos" y en tal sentido acuerda con Margolinas (1998)

[15] Precisamos aquí nuestra concepción de abducciones, pues creemos que puede haber alguna diferencia entre lo que nosotros entendemos por una abducción y lo que Pedemonte toma en consideración. Entendemos, de acuerdo con la lógica, que una abducción correponde a la estructura: "Si [P entonces Q] y Q entonces P". Esto significa que en el razonamiento abductivo antecede la conjetura a la procucción de datos.

que siendo el trabajo sobre verdad y verosimilitud parte de la construcción de la racionalidad de los alumnos "este trabajo no es independiente de la especificidad de los objetos matemáticos específicos".

2.3 ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE FORMAS DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Las investigaciones que analizan - desde distintas perspectivas - el problema de la enseñanza y el aprendizaje de actividades ligadas a la fundamentación tales como la prueba, la deducción y la propia demostración, coinciden en afirmar la complejidad de ambos procesos (difícilmente disociables) y formulan algunos conceptos teóricos que permiten analizar el problema desde distintas perspectivas.

2.3.1 Comunidad clase y debates

El concepto de "comunidad clase" es utilizado por diferentes autores para introducir la dimensión social de ciertas cuestiones del aprendizaje de la matemática. Knipping (2008: 436) - quien analiza la estructura de las argumentaciones que se generan en una clase de geometría utilizando el modelo de Toulmin - sostiene que las garantías para tales argumentaciones residen en los conocimientos compartidos por la comunidad clase, estableciendo de este modo un paralelo entre los conocimientos de esta comunidad con aquellos institucionalizados que residen en la comunidad matemática..
También Paniza (200?: 14) menciona a la clase como la pequeña comunidad donde existen conocimientos acumulados y también se producen (o infieren) nuevos conocimientos destacando que durante el acto de producción es la comunidad quien legitima, acepta o avala el conocimiento nuevo. Entendemos que la referencia a una comunidad marca el aspecto social de toda producción de conocimiento.

Fuera del campo de la didáctica de la matemática Nicholas Burbules analiza el diálogo en clase, desde la perspectiva de la teoría crítica. Su interés está centrado en describir y analizar las distintas formas que el diálogo en clase puede adoptar y sus posibles consecuencias en la enseñanza. El hecho de que en nuestra investigación proponemos un trabajo oral entre docente y alumnos que sostenga la emergencia de la fundamentación nos llevó a considerar la propuesta de Burbules como un aporte que amplió nuestra perspectiva acerca de los intercambios orales en la clase. La actividad oral que se desarrolló en las clases que estudiamos comparte muchos de los elementos que para Burbules son constitutivos de lo que él denomina diálogo: "El diálogo no es algo que *hagamos* o que empleemos; es una relación en la que entramos" (la bastardilla es del autor, Burbules, 1993, 15). Algunos elementos que caracterizan este diálogo han surgido en la observación de clases - sin haber sido pautados o discutidos previamente con las docentes - a propósito de la producción de fundamentaciones. Mencionamos así: "un clima de participación abierta de cualquiera de los intervinientes, que alternadamente producen enunciados de duración variable (estos pueden ser preguntas, respuestas, reorientaciones o construcciones...)...El diálogo se guía por un espíritu de descubrimiento.....Supone un compromiso con el proceso mismo de intercambio comunicativo, una disposición a llevar las cosas hasta el fin para llegar a entendimientos o acuerdos significativos entre los participantes" (ibid., 31).

Este diálogo tiene para Burbules una comunidad de referencia donde no es necesaria la homogeneidad o paridad de los participantes. En tal sentido Burbules considera al docente como parte de esta comunidad: "Si bien muchos se ven atraídos por el diálogo como enfoque pedagógico por sentimientos igualitaristas, la igualdad per se no es necesaria para que haya diálogo....El hecho de que los participantes no sean iguales en conocimiento, experiencia o inteligencia no disminuye las posibilidades del diálogo: al contrario, en muchos casos explica que los participantes se hayan visto llevados a establecer una relación". Concluye Burbules que más que la paridad lo que requiere el diálogo - y será un aspecto que deberá tener esta comunidad aula - es la "reciprocidad", es decir, la disposición a que cada acto o gesto de un participante sea replicado por los otros. Este último punto tiene interesantes consecuencias sobre el docente y su gestión de la clase y nos remite al tipo de autoridad que el docente construye en la clase. En tal sentido no vamos a suprimir la inherente autoridad del docente (y en esa cuestión coincidimos con el planteo de Burbules (ibid., 61) para quien la autoridad es inevitable en cualquier intento educativo) aunque sí entendemos que será necesario concebir una autoridad que preserve la reciprocidad como modo de fortalecer la posibilidad de diálogo.

Barallobres (2004), citando a Orus (1992) trae la noción de **comunidad matemática de referencia** en el momento de la confrontación entre las producciones privadas e individuales de los alumnos y las que se producen públicamente mediante el **debate**: "El razonamiento de validación producido a nivel adidáctico se manifestará públicamente en la situación didáctica, en una determinada comunidad científica (la clase de matemáticas) que tiene sus propias normas de aceptación o rechazo de los razonamientos producidos, en función de su historia común: los tipos de pruebas permitidas y reconocidas como suficientes en esta comunidad de referencia[16] para establecer la validez de los razonamientos producidos (pruebas pragmáticas, pruebas semánticas, pruebas sintácticas, etc.)."

En nuestra investigación el debate junto con la presencia de la comunidad aula será considerado un escenario favorable para la producción de fundamentaciones aún cuando nos alejamos de la construcción de un milieu que incorpore elementos de competencia entre los alumnos que el investigador considera en su diseño[17].

Arsac y Mante encuentran en el debate un escenario portador de algunas de las condiciones que los autores establecen como necesarias para el aprendizaje de algunas reglas de la matemática (la regla del tercero excluido y la del uso de la figura analítica en la geometría). En tal sentido afirman:

> "Nous avons vu que dans la théorie des situations de G. Brousseau la connaissance dont l'apprentissage est visé doit apparaître comme la solution optimum au problème posé. Or l'analyse épistémologique nous conduit à faire l'hypothèse qu'il ne sera pas possible de trouver des situations dans lesquelles tous les élèves vont construire les règles du débat mathématique comme une réponse optimum au problème posé. Par contre nous pensons qu'ils donneront du sens à ces règles institutionnalisées par le professeur, dans la mesure où elles leur permettront de trancher le débat dans lequel ils se sont engagés et qu'ils ne peuvent conclure. Cela suppose que l'enseignant ne présentera ces règles qu'après la prise de conscience par les élèves de la difficulté de conclure le débat."[18]

[16] Cuando se menciona la comunidad matemática de referencia se está aludiendo a la comunidad aula.

[17] Creemos necesario señalar que Barallobres concibe una situación problemática donde los alumnos tienen que competir entre ellos y en el transcurso de tal competencia realizan conjeturas. Entendemos que la competencia entre los alumnos es un escenario que propicia un cierto tipo de producciones. Ante la posiblidad de ganar un juego los alumnos pueden priorizar conjeturas que no están en condiciones de explicar pero que sin embargo funcionan como ganadoras. En nuestra investigación la competencia no es un escenario de trabajo.

[18] "Hemos visto que en la Teoría de Situaciones de G. Brousseau el conocimiento cuyo aprendizaje se busca debe aparecer como la solución óptima al problema propuesto. Ahora, el análisis epistemológico nos lleva a proponer como hipótesis que no será posible encontrar situaciones en las cuales todos los alumnos construyan las reglas del debate matemático como una respuesta óptima a un problema propuesto. Por el contrario creemos que ellas darán sentido a las reglas institucionalizadas por el profesor en la medida que ellas les permitan zanjar el debate en el que se comprometen y que no pueden concluir. A su vez esto supone que el docente no presentará estas reglas sino hasta mostrar que el debate no puede concluir." (1996: 25)

Tomamos estas consideraciones referidas al debate y al docente (si bien luego mencionaremos especialmente el ineludible rol que creemos el docente tiene en esta proceso de enseñanza no queremos dejar pasar su mención en esta cita) como puntos de partida para nuestra investigación. Destacamos que los investigadores analizan el problema de la enseñanza de algunas reglas necesarias en el razonamiento deductivo teniendo como marco teórico la Teoría de Situaciones y sin embargo elaboran como hipótesis la imposibilidad de encarar su enseñanza bajo el modelo de una situación problemática en la cual estas reglas surjan como el conocimiento óptimo. Es esta circunstancia junto con el aspecto social de las situaciones de validación lo que da lugar al escenario del debate – desde la óptica de los investigadores.

2.3.2 La racionalidad matemática de los alumnos[19].

Diversas investigaciones distinguen aspectos de los estudiantes, muchas veces conectados, que inciden sobre actividades asociadas a la fundamentación (razonamientos deductivos, argumentación, prueba y demostración). Entre ellos destacamos y mencionaremos: las nociones de matemática (el conocimiento del campo que se encuentra a disposición del alumno), las nociones sobre las herramientas de producción de la actividad matemática, las herramientas semióticas disponibles y la madurez cognitiva.

Hanna, en sus dos trabajos ya citados, muestra que la enseñanza de la demostración en el aula se enfrenta con el problema de que los alumnos, según la autora sostiene, (del mismo modo lo hace De Villiers) no comprenden la necesidad de demostrar hechos matemáticos "evidentes"[20]. De ahí que la autora sostenga que aquellas demostraciones que aportan explicación a un problema sean más adecuadas para la enseñanza que las que solo validan – sin explicar- puesto que se constituyen en una herramienta de mayor valor para los alumnos.

[19] En este trabajo adoptamos la concepción de estudiante aportada por Brousseau quien sostiene que la tarea del estudiante de matemática no se agota en la resolución de problemas, aunque ésta es principal, sino que también abarca la producción, formulación, prueba y construcción de modelos, lenguajes, conceptos y teorías, de forma tal que pueda ser comunicada a otros. (Brousseau: 1997, 22)

[20] La evidencia visual es común en situaciones de geometría. El alumno no comprende la necesidad de demostrar enunciados que son evidentes en un dibujo de análisis. Esto muestra la distancia entre el estudiante y el matemático. Estas diferencias y sus consecuencias para la enseñanza son presentadas por Douady (1986). Análisis como éstos nos llevan a poner en cuestión la analogía señalada por Arsac (citado por Barallobres) entre la discusión sobre criterios de validez en la clase y en la comunidad matemática.

En este sentido Balacheff (1987) y Arsac (1996) señalan otra área de dificultades en la enseñanza de la demostración por cuanto la misma representa para el estudiante un cambio de prácticas de las esferas del saber hacer a las esferas del saber anticipar, deducir, hipotetizar. También se lo describe como un cambio de un estudiante práctico a un estudiante teórico. Balacheff sostiene además que este cambio lleva implícito un cambio del **contrato didáctico**[21].

Balacheff señala una ruptura del contrato didáctico en el aula cuando el alumno, que está sosteniendo prácticas ligadas "a la acción y a la observación", es llevado hacia una actividad más teórica, de reflexión. El docente necesita promover un pasaje de las prácticas de eficacia (comunes en la actividad del estudiante práctico que se mueve en las esferas del saber hacer) hacia las prácticas del rigor (propias del estudiante teórico que se mueve en las esferas del saber anticipar, hipotetizar, formular, etc.) Este pasaje se transita parcialmente en términos de Balacheff a través de la **interacción social**, y es por esto que proponemos en esta investigación analizar la intervención docente. Será él quien esté a cargo de aportar a la clase su posicionamiento con relación a las normas de trabajo matemático y de promover las reglas del trabajo de fundamentación.

En Pruebas y Refutaciones, Lakatos analiza las reacciones de estudiantes que muestran poseer conocimientos sólidos sobre la forma de razonar de un matemático hacia las refutaciones que plantea el profesor. Balacheff toma como referencia este trabajo para analizar desde el campo de la Didáctica las respuestas de los estudiantes cuando, a raíz de proposiciones que formulan, son confrontados con contraejemplos propuestos por el profesor. En particular Balacheff estudia el caso en el que los alumnos deben establecer el "número de diagonales de un polígono de n lados" y donde el docente responde a sus formulaciones a través del planteo de contraejemplos. Es interesante la distinción que Balacheff propone entre estos estudiantes y aquellos de Lakatos en el sentido que estos estudiantes no han adquirido todavía "el arte de demostrar" y por lo tanto la aparición de contraejemplos no los confronta necesariamente con un saber posiblemente errado o con una producción a reformular sino que en algunos casos los alumnos pueden ir realizando enmiendas igualmente inadecuadas a sus formulaciones que les permitan "salvar" los contraejemplos provistos por el docente[22].

[21] Este concepto se presentará en el Marco Teórico.
[22] Volvemos en este punto a la observación de Brousseau sobre la paradoja de la enseñanza del razonamiento matemático a alumnos que no lo conocen y vemos que esta es una posible lectura de su situación paradojal".

Esto muestra, por un lado, la dificultad que encuentra un docente para comandar un trabajo de prácticas fundamentadas. Por el otro, y así lo señalan Balacheff y Brousseau, se evidencia que este problema no puede reducirse a un problema de orden lógico sino que debe estudiarse desde otras perspectivas.

Arsac y Mante (1996) postulan que la enseñanza de formas lógicas del razonamiento tales como la del tercero excluido se enfrentan a las dificultades que emergen de los usos que algunas expresiones matemáticas tienen en el lenguaje natural y que los alumnos portan. En las situaciones de clase que observaron, aún cuando los alumnos comprueban[23] la insuficiencia del trabajo con ejemplos, los autores plantean que estos resultados a los que llegan los distintos grupos de alumnos no conducen a cuestionar los modos de validación que están utilizando. Es por eso que consideran necesario el aporte del docente al que le dan la forma de un cierre de un debate donde se discuta con los alumnos estos aspectos metamatemáticos para el caso puntual que analizan del tercero excluido. Toman en consecuencia el debate como un escenario propicio para problematizar la cuestión de los modos de validación y dar así lugar la enseñanza de esta forma lógica con más sentido para los estudiantes.

Creemos que este resultado confirma tanto la influencia de las nociones que tienen los alumnos sobre la actividad productora y su apreciación respecto del tipo de actividad que plantea la matemática así como también del lugar central e ineludible del docente.

Heinze y otros proponen un conjunto de **competencias** relacionadas con la producción de demostraciones en el área de la geometría que se enseña en la escuela (en el nivel medio, hacia los 15 años) y analizan dos formas en las que los docentes pueden promover dichas competencias. Desarrollan dos conceptos teóricos: "**hypothetical bridging**" y "**coordination**". Describen el producto "una prueba" en el área de la geometría como una red de conexiones entre condiciones dadas y conclusiones buscadas. El proceso necesario para desarrollar esta prueba incluye:

a) Entender la información provista así como también el estatus de esta información.

[23] En las situaciones referidas los alumnos debían decidir el valor de verdad de la siguiente afirmación: "**En la expresión "n x n – n + 11" si se reemplaza n por un número entero cualquiera no negativo se obtiene siempre un número que solo posee dos divisores."**

b) Reconocer los elementos cruciales (premisa, argumento, conclusión), que se asocian a las propiedades necesarias para la deducción.
c) Construir, especialmente para las demostraciones de multi-paso, construcciones intermedias para el siguiente paso de deducción por medio de "hypothetical bridging" (que traducimos como "conexión hipotética")
d) **Coordinar** el proceso total y organizar el discurso en una secuencia aceptable. Encontrar pasos inútiles y eliminarlos.

Los autores consideran insuficiente la competencia de realizar una o más conexiones hipotéticas sino que además es necesario una actividad de organización de estas posibles conexiones, tarea que ellos indican en un meta-nivel respecto de la anterior y es a ella a la que llaman **coordinación.**

Dividen las demostraciones que toman para su análisis en dos grupos, aquellas que consisten en una secuencia (lineal según los autores) de argumentos y otras en las que se distinguen al menos dos conclusiones paralelas a las que se llega luego de una secuencia de argumentos y que confluyen en una conclusión. No consideran pruebas por contradicción o por inducción dado que quedan fuera de la currícula de la escuela media.

En consonancia con algunos de los señalamientos de Heinze, Duval (2002) - en su análisis de la enseñanza de la demostración para el área de la geometría - propone algunas condiciones didácticas a saber:

.- comprender la organización de un paso de deducción, (y para ello postula que los alumnos comprendan la conexión entre el estatuto operatorio de las proposiciones y su valor epistémico)[24]. Esto refiere al primer nivel de organización de un razonamiento deductivo.

.- comprender la organización entre los pasos de deducción (segundo nivel de organización) en los cuales la premisa de cada nuevo paso es o bien una hipótesis (en referencia a pasos paralelos como los que describe Heinze) o bien una conclusión de un paso precedente.

Al referirse a estos dos niveles, Duval distingue una serie de errores en los alumnos que señalan la falta de comprensión de uno u otro. En relación al primer nivel, señala el autor

[24] Los conceptos desarrollados por Duval son presentados en el marco teórico de esta tesis.

que los alumnos que no comprenden la organización de un paso deductivo mezclan hipótesis con conclusiones, enunciados con sus recíprocos o no chequean las condiciones que precisan los teoremas-reglas de inferencia para ser aplicados. En tanto que en relación con el segundo nivel (aquello que Heinze denomina coordinación) encuentra cortes, discontinuidades en el desarrollo del razonamiento. Esto amerita según Duval que los alumnos tengan "un entrenamiento específico acerca del funcionamiento de un paso deductivo y sobre la forma de moverse de un paso hacia el siguiente" (Duval, 2002:68). No señala Duval en su trabajo cuál es el proyecto de enseñanza que puede lograr estos aprendizajes y el "entrenamiento".

En su trabajo, Ramán define en las pruebas dos aspectos, uno privado que él entiende es el que genera la comprensión personal y otro público que es el que permite convencer a otro. Ramán encuentra que los matemáticos de profesión (docentes de una universidad en su estudio) pueden ir desde el aspecto privado hacia el público mediante la "idea clave" de la prueba en tanto los estudiantes no pueden hacerlo a partir de un estudio empírico en el que el investigador pide a un grupo de docentes y estudiantes que den una explicación que consideren convincente acerca de por qué la derivada de una función par es impar.[25]

Uno de los asistentes del curso de cálculo (graduado y docente auxiliar) construye una demostración de esta afirmación recurriendo a la definición del límite del cociente incremental y aplicando las propiedades que provienen de la paridad de la función. Esta explicación que resulta convincente para el asistente no pone en evidencia el por qué de la cuestión. Por el contrario la interpretación geométrica del cociente incremental permite comprender intuitivamente[26] por qué la derivada de una función par debería ser impar. Esta evidencia visual queda oculta en la demostración formal del asistente. Entendemos que el ejemplo da cuenta de la subjetividad que atañe a las demostraciones (aquello que Duval denomina el valor epistémico) respecto de su poder explicativo lo que está en relación con el entendimiento del sujeto o también de la comunidad de referencia del tema, su experiencia y capacidad de interpretación

Acordamos con Ramán respecto de la necesidad de un énfasis en las ideas claves para la enseñanza de la demostración, que en nuestra investigación tomará la forma de un trabajo específico de búsqueda de explicaciones (aquello que llamaremos fundamentaciones) que

[25] La propuesta tiene como antecedente el trabajo de Hoyles y Healy de 1999 con alumnos de 15 años.

[26] Una función par tiene un gráfico simétrico respecto del eje y . La pendiente de una recta tangente en los correspondientes valores positivos y negativos es también un reflejo respecto de este eje.

aporten las razones que subyacen a algunas cuestiones matemáticas y que no están directamente vinculadas a la producción de demostraciones.

Varios investigadores (Margolinas, 1993; Barallobres, 2004 y De Villers, 1990, Knipping, 2008, Duval 1991 y 2002) indican que la capacidad explicativa de una prueba o de una demostración no es independiente del sujeto sino que es subjetiva y que está en relación a los saberes que dicho sujeto posee (explícitos o implícitos). Este hecho hace que la gestión de clase sea compleja. En este sentido y en el contexto de nuestra investigación entendemos que esta subjetividad repercute sobre –y está tensionada por- lo que la misma comunidad estudiantil podrá reconocer como una fundamentación (en relación a lo que será el objeto de indagación en esta tesis).

Por su parte, en la comunidad matemática, las condiciones que se imponen para que una demostración sea dada por buena son conocidas por el productor de dicha demostración pero también quedan bajo la auditoría del resto de la comunidad que sancionará sobre la calidad de la prueba. Una vez más creemos que estos conceptos contribuyen a sostener la centralidad del papel que el docente debe jugar en la regulación de la fundamentaciones producidas por los alumnos.

En referencia a esta descripción en esta investigación nos proponemos estudiar y presentar contextos de trabajo en clase que pueden promover el desarrollo de herramientas por parte del sujeto para sustentar la validez de una proposición establecida por él o su comunidad de pares a propósito de un objeto de estudio.

2.3.3 El docente y la producción de conocimiento matemático en el aula

La construcción que el propio docente ha elaborado tanto sobre la disciplina como sobre el proceso de aprendizaje incide sobre el modelo de enseñanza que pone en juego. Cuando el docente concibe a la disciplina matemática como un conjunto de saberes organizados en un sistema axiomático de conocimientos (Brousseau, 1997: 19) que deben transferir al alumno, su modelo de enseñanza apuntará a la reproducción de las nociones de la disciplina. En este posicionamiento será difícil que el docente pueda concebir al estudiante como un productor matemático y que se pregunte en consecuencia cómo podría promover en el

alumno una actitud de producción matemática en alguna escala. La visión de un alumno que pueda formularse preguntas, elaborar argumentaciones, responsabilizarse por su producción matemática, en cambio, tiene un correlato en la gestión de la clase, impone fuertes exigencias al docente y torna mucho más complejo el control de los aprendizajes.
Más específicamente y en referencia a la enseñanza del razonamiento matemático Brousseau insiste en que la presentación ortodoxa de los textos matemáticos provoca en los docentes una confusión entre la actividad del razonamiento matemático de los alumnos y el producto cultural representado por el medio estándar de su comunicación. Esto los lleva a pensar que la lógica formal (el modus ponens entre otros) es la herramienta fundamental y necesaria de las matemáticas y que su enseñanza es la forma de enseñar a producir matemática. (Brousseau, 2004).

Panizza (2005: 19) afirma que en las observaciones de clase es importante distinguir entre el conjunto de razonamientos suscitados por un problema y el razonamiento producto que es finalmente comunicado por cada alumno. La comunicación está presente en cada instancia de esta forma de trabajo matemático y ella permite apreciar con mayor claridad el "producto terminado" es decir el razonamiento producto. Menos evidente resulta inferir acerca de todo el proceso.

Barallobres, en su estudio sobre la elaboración de validaciones en un problema del álgebra, se pregunta por el rol del profesor en la etapa adidáctica[27] y, posteriormente en la etapa que él llama fase pública o también debate (donde el docente y toda la clase de alumnos analiza y discute la producción de validaciones de estrategias de juego anteriores). Avanza sosteniendo que durante esta última fase "El profesor actúa como representante de la comunidad de matemáticos pero no impone "normas" del funcionamiento de matemáticas por el único hecho de estar en la clase de matemáticas. Las "normas" elaboradas deben tener sentido con relación al problema específico en cuestión."(Barallobres, 2004)

Barallobres trae de este modo dos cuestiones que nos interesa puntualizar. Ambas tienen relación con el espectro de posibles intervenciones del docente durante las distintas fases de desarrollo de la clase. En la primera -la fase adidáctica - la preocupación principal está más en relación con los enunciados de la TS que con el hecho de que estamos trabajando

[27] Barallobres da cuenta en su investigación de la existencia de distintas conceptualizaciones sobre la noción de adidacticidad en relación con la existencia de un milieu material o exterior al alumno y sostiene que para los problemas de validación que él investiga la construcción de un tal milieu material no resulta posible.

con razonamientos matemáticos. En tal situación el investigador destaca que la teoría aloja todavía un escenario poco claro para el docente: donde se discute en términos de si intervenir o no y eventualmente como hacerlo. En esta dirección Barallobres retoma una pregunta de Orus y de Margolinas a saber: "¿cuáles son los intercambios de información o retroacciones sobre los razonamientos producidos en esta etapa que permiten hablar de adidacticidad?. Reformulamos esta pregunta para darle un encuadre dentro de nuestra investigación y la plantearemos en nuestro estudio del siguiente modo: ¿cuáles son las intervenciones del profesor durante la fase de trabajo en grupo que pueden sostener a los alumnos en una producción de fundamentaciones con autonomía intelectual?

En la fase pública Barallobres se pregunta acerca de cómo puede el docente actuar para mantener el equilibrio de la clase. Reconoce así que la intervención docente puede ser interpretada por los alumnos como una imposición ajena y externa de normas y que esto anula los procesos de validación como procesos que generan convicción.

Glorian y Hersant toman un contexto similar de trabajo en la clase de matemática a la que llaman Interactive Synthesis Discusión (ISD) para caracterizar esta modalidad de enseñanza que las autoras encuentras ampliamente difundidas en las clases francesas de matemática (2005: 141). Esta práctica consiste en sesiones de resolución de problemas en pequeños grupos seguidas de fases de discusión de las soluciones con la participación de toda la clase. En ellas las autoras analizan las intervenciones docentes a través de algunas nociones provistas por la TS tales como el contrato didáctico –al que dotan de dimensiones específicas para este estudio - y el milieu (ibid, 120). En estas prácticas el investigador no tiene participación en el diseño de la actividad de enseñanza ni en su realización y realiza una observación no participante. Glorian y Hersant advierten que durante la fase de discusión el docente trae nuevas preguntas tomando la producción de sus alumnos y apelando al viejo conocimiento para propiciar la emergencia de un nuevo conocimiento.

Nos interesa el trabajo de estas autoras en la medida que analizan las interacciones entre docente y alumnos en un momento de la clase similar al de puesta en común que nosotros observaremos. Establecemos un paralelo con las autoras ya que para nosotros ese momento es una oportunidad para que el docente propicie una reflexión sobre las fundamentaciones producidas en cada grupo. Esta reflexión permite que los alumnos se descentren de sus propias producciones y así se produzca una despersonalización de las explicaciones producidas. Las autoras por su parte analizan qué responsabilidades van quedando en manos de los alumnos o en el docente en términos de otras conceptualizaciones tales como "viejo y nuevo conocimiento", "institucionalización", devolución, micro, mezzo y macro contrato (ibid., 123 y 124). Además la utilización de la dimensión temporal en diversas conceptualizaciones ha sido un punto de inflexión para nuestro estudio respecto de nuestros propios observables.

Patricio Herbst (2002) toma una clase de geometría para analizar qué elementos engloba el trabajo docente para motivar a los alumnos a la entrada a la demostración. Sus conclusiones nos interean pues entendemos que confirman la necesidad de concentrarnos en una propuesta que se aleje de la formalidad y se centre en las posibilidades de producción de argumentos y explicaciones. Afirma que la demostración, en las clases de geometría, ha sido tomada como un proceso formal,[28] y concluye que esta forma de concebir la demostración funciona de obstáculo para su enseñanza. Propone y recomienda en consonancia con Ramán la necesidad de identificar las ideas claves en una demostración.

Nuestro trabajo pretende comprender las relaciones que se desarrollan en clase en el contexto de la enseñanza de la fundamentación, con la idea de comprender la complejidad del problema y de detectar condiciones que favorecen su emergencia. Queremos analizar en profundidad la gestión del docente poniendo en evidencia el lugar que el docente toma en clase, las dificultades que afronta para albergar las producciones de los alumnos sin perder su referencia con la comunidad matemática ya que allí se constituye en el portador del discurso disciplinar.

Acordamos con Panizza que parte de la complejidad de esta gestión está dada por la doble tarea que le compete al recibir la producción del alumno y necesitar, por un lado, comprenderla en sí misma y, por el otro, interpretarla en términos de los conocimientos de los alumnos a los que solo accede en parte.

Consideramos como hipótesis de trabajo que el lugar del docente es ineludible en la enseñanza de la fundamentación, dando lugar a un cambio en el contrato didáctico tal como lo sostiene Balacheff y un resultado esperado de la investigación es contribuir a precisar dicha hipótesis.

---

[28] Comprendiendo no obstante que estapropuesta se ajusta a las definiciones y recomendaciones curriculares que los docentes siguen del NCTM del 2000.

2.3.4 El área de la matemática que se enseña y la institución escolar

Panizza y Barallobres coinciden en la necesidad de estudiar los modos de razonamiento matemático en vinculación con los contenidos estudiados. En términos de Panizza "…la capacidad de razonar no es independiente de los contenidos matemáticos en juego" Es por eso que la autora pone en cuestión tomar el razonamiento matemático como un objeto (de enseñanza) en sí mismo, y propone en cambio abordar su enseñanza en estrecha conexión con los contenidos" (Panizza 2005: 20)
Por su parte Barallobres (2004) sostiene que "El trabajo sobre verosimilitud y verdad [….] forma parte de la construcción de la racionalidad matemática por parte de los alumnos. Esta distinción no es independiente de la especificidad de los objetos matemáticos comprometidos. La construcción de la racionalidad matemática no puede ser aislada de la construcción de conocimientos matemáticos específicos."

La geometría ha sido históricamente señalada como el área privilegiada de entrada a la práctica de la prueba, la demostración y - más en general - del razonamiento deductivo (De Villiers, Hanna y Hanke, Gonobolin, Alagia). Investigaciones posteriores ampliaron el estudio hacia otras áreas como la entrada a las prácticas algebraicas (Grugeon, Barallobres, Sessa) y ya en el ámbito de la educación superior la enseñanza del cálculo[29]. En nuestra investigación hemos querido explorar otras áreas de la enseñanza media que son propicias para la enseñanza de la fundamentación así como también identificar las especificidades que este trabajo podría tener una vez definida el área de la matemática seleccionada. No ha sido nuestra intención estudiar la influencia del tema conceptual elegido en la enseñanza de la fundamentación sino de tener en cuenta este aspecto para elegir un tema sobre el cual centrar la enseñanza. Como relataremos a lo largo de este trabajo esta elección fue realizada junto con las docentes que participaron de este proyecto.

Los docentes por su parte toman esta y otras decisiones en el marco de una institución que impone restricciones. Como apunta Roditi (2005) el docente debe satisfacer expectativas de la institución escolar que lo emplea y para ello llevará adelante ciertas prácticas que, leídas fuera de dicho contexto, podrían ser malinterpretadas. Nuestro estudio no ha tomado la

[29] Distintas investigaciones muestran que estudiantes tanto de la Escuela Media como de la Universidad encuentran dificultad no solo en la producción de la fundamentación sino también en el reconocimiento de la demostración en el área del Cálculo (Galbraith, 1981; Fishbein and Kedem 1982; Vinner, 1983; Chazam 1993; Moore, 1994; Raman, 2002)

dimensión institucional como una variable a considerar en el problema de la enseñanza de la fundamentación[30], no obstante, la dimensión institucional se ha hecho presente en algunos momentos de la investigación en situaciones en los que las docentes debían tomar decisiones que afectaban su quehacer cotidiano y las hemos interpretado bajo esa mirada.

En tal sentido queremos mencionar que la enseñanza de la demostración y otras formas del razonamiento matemático está prácticamente invisible en el diseño curricular en Argentina. Ante esta ausencia, los modos en los que esta práctica llega al aula están marcados predominantemente por los lineamientos institucionales[31] y eventualmente la propia concepción que cada docente tiene respecto de su valor y su importancia en su proyecto de enseñanza.

En este sentido Hanna (2000) reseña para el caso de Estados Unidos durante la década 1990-2000 un cambio de rumbo en lo que refiere a la enseñanza de la demostración a partir de las disposiciones del National Council of Teachers of Mathematics de los años 1989 y 2000[32]. Creemos que el diseño curricular es un marco de referencia a tener presente en la lectura de esta investigación. Los docentes tienen muchas urgencias y demandas que se asocian e inciden cuando toman decisiones respecto de su proyecto de enseñanza.

También Hersant y Glorian (2005:114) consideran al currículum francés cuando investigan las prácticas docentes "The teacher is thus caught between two, possibly contradictory, constraints: the constraints of the curriculum and the constraint of grounding his teaching on the knowledge used by students in solving the proposed problems".[33] Este último comentario de las autoras se basa en consideraciones previas que realizan en su investigación sobre la influencia que el constructivismo ha tenido durante más de 20 años en la enseñanza francesa. Creemos importante considerar estos escenarios durante cualquier estudio de la actividad de enseñanza para no caer en miradas locales que dan lugar a sentencias peligrosas sobre aquello que ocurre en el aula desprovistas del contexto en el que ellas ocurren.

[30] En el sentido de analizar cómo repercute en la enseñanza de la fundamentación el marco institucional.
[31] Aún cuando la gran mayoría de los textos escolares del polimodal le dan un lugar a su tratamiento
[32] Hacia 1989 el concepto de prueba había desaparecido del currículum incluso en el área de la geometría donde tenía su más importante presencia y sentido. Se proponía a cambio un mayor énfasis en la motivación y en el "argumento heurístico". En el texto del 2000 se enmendaba esta situación proponiendo prácticas de reconocimiento de razonamiento y demostración en todos los niveles de la enseñanza.
[33] "El docente está de este modo sujeto a dos posiblemente contradictorias restricciones: las restricciones que impone el currículum y la de sostener su enseñanza en el conocimiento utilizado por sus alumnos durante la resolución de los problemas propuestos".

3. MARCO TEÓRICO

En matemática, el "por qué" no se puede aprender
únicamente por referencia a la autoridad del adulto.
Guy Brousseau, 1997

En este capítulo desarrollaremos los conceptos teóricos centrales para el estudio de la Fundamentación y su emergencia en la clase de matemática. Con tal propósito comenzaremos desplegando un conjunto de nociones provenientes de la Teoría de Situaciones, la que representa para nosotros un importante marco de referencia por cuanto a partir de ella sostenemos nuestra propia visión acerca de cómo se aprende matemática y qué procesos de enseñanza concebimos como funcionales para tal fin. A continuación realizaremos una presentación de nociones relacionadas con el razonamiento matemático con el propósito de recorrer la complejidad de la temática, encontrar puntos de apoyo para nuestra propia conceptuaclización, señalar qué aspectos retomamos de cada una de ellas y cuáles abandonamos. A continuadcion expondremos la noción de Fundamentación que hemos ideado, sus características principales y ejemplos que ayudan a su presentación. Finalmente consideraremos, como elementos conceptuales, las condiciones didácticas que entendemos son necesarios para analizar esta cuestión.

3.1 GENERALIDADES

3.1.1 Principales Conceptos De La Teoría De Situaciones

En esta investigación y para estudiar el problema que nos ocupa tomamos como marco principal la Teoría de Situaciones (TS). Desarrollada por Guy Brousseau a partir de los 70, la TS surge como una teoría singular en el campo de la Didáctica de la Matemática, la que tiene por objeto, en términos del mismo autor, estudiar la comunicación del conocimiento matemático.

Queremos precisar un conjunto de nociones básicas que compartimos y que, en tanto concepciones sobre cuestiones fundamentales marcarán la impronta de esta investigación.

En tal sentido comenzamos citando al propio Brousseau para ubicar nuestra posición con respecto a la enseñanza y al aprendizaje:

> "En la didáctica moderna **la enseñanza** es la devolución al alumno de una situación a-didáctica correcta[34]. el **aprendizaje** es la adaptación del alumno a esa situación". (Brousseau,1997: 31)

Siguiendo a Brousseau el conocimiento existe en la clase en función de las condiciones creadas por la **situación.** Esta expresión**,** la situación, alude a un modo de implementar la enseñanza en la clase. En una situación un alumno se encuentra frente a un problema que debe resolver. En términos más rigurosos Brousseau plantea que una situación es un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio, denominado **milieu**, que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable.

La construcción del modelo "situación" comporta la búsqueda de condiciones que permitirían dar lugar a la emergencia de cierto conjunto de conocimientos como medio de resolución de la problemática que se enfrenta[35]. En este modelo una situación de clase debe cumplir las siguientes condiciones:

> **Primera:** que permita entregar a los alumnos la responsabilidad de resolver el problema y de decidir si su solución es correcta (devolución del problema)
>
> **Segunda:** el problema debe ser tal que el conocimiento surja (en la concepción del alumno) como la solución óptima. (Brousseau, 1997: 30)

"La búsqueda y la invención de situaciones características de los diversos conocimientos matemáticos enseñados en la escuela, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación de las

---

[34] Brousseau considera que una situación a-didáctica será "correcta" para la enseñanza en la medida que los alumnos la acepten y que, a su vez, ella provoque que los estudiantes actúen, hablen, piensen y evolucionen por su propia motivación.

[35] Además la propuesta de un modelo como el de las situaciones que pretende comprender la enseñanza ha mostrado ser un poderoso medio de intercambio entre docentes e investigadores facilitando la mejora y la regulación de la enseñanza de las matemáticas. En este sentido señala Brousseau (1999: 6) "La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían prácticamente tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores".

nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos, constituyen la materia de la didáctica de las matemáticas y el terreno al cual la teoría de las situaciones provee de conceptos y de métodos de estudio". Con tal propósito la TS desarrolla "un conjunto de nociones que permitan vincular las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas básicas con la expresión de dichas nociones en la cultura matemática clásica". (Brousseau, 2000: 12)

La TS postula (y esto puede tomarse como axioma, o supuesto de la teoría) que para cada conocimiento existe una **situación** asociada que lo caracteriza. Esta situación recibe el nombre de **situación fundamental.**

En cada **situación** el actor (que suele ser el propio alumno) se encuentra frente a un medio-milieu con el que efectuará algún tipo de interacción.
La TS concibe tres tipos de interacciones posibles con el medio-milieu:
.- el tipo **acción** que consiste en fijar un estado del medio. Se espera una puesta en acto del conocimiento aunque la situación no exige que se lo explicite. A través de la acción el alumno pondrá en acto un conjunto de conocimientos sin necesidad de explicitarlos.
.- el tipo **comunicación** que consiste en modificar los conocimientos de otro actor por medio de mensajes portadores de informaciones.
.- el tipo **prueba** que tiende a la justificación o **validación** cultural de los actos o declaraciones.

Los tres tipos de situaciones vistos como un todo señalan un devenir del trabajo matemático en clase donde el alumno actúa sobre un medio-milieu y por lo tanto utiliza sus conocimientos (teoremas en acto), formula enunciados a partir de las situaciones de comunicación y realiza una actividad de reflexión sobre el conocimiento producido. Una actividad de enseñanza así formulada posibilita para Brousseau (2000: 14) "el establecimiento y la observación del tránsito de situaciones de argumentación a situaciones de prueba. Sin esta clasificación la iniciación a estas prácticas no sería fácil de poner en marcha". Este aspecto es el que nos interesa en nuestra investigación.

Las interacciones entre alumno y medio-milieu generarán otras entre docente y alumno que se interpretan por medio de la noción de **contrato didáctico**. El contrato condensa las expectativas que cada uno, docente y alumno, tiene respecto del otro en la relación didáctica. Así Sadovsky entiende al contrato didáctico como "un juego sutil, muchas veces difícil de atrapar, en el que a raíz del trabajo en clase con respecto a cierto objeto matemático se negocian significados, se transmiten expectativas mutuas, se sugieren o se infieren modos de hacer, se comunican o se interpreten (explícita o implícitamente) normas matemáticas" (Sadovsky, 2005: 38). El contrato reúne las pautas de trabajo: responsabilidades respectivas, definición de actividades y asignación de tiempos para ellas, permisos y prohibiciones.

En cada uno de los tipos de interacciones recién mencionados se aloja un trabajo de validación que le permite al alumno controlar su trabajo. No obstante, el último tipo de interacción requiere centralmente un trabajo de tales características pues es allí donde se espera (del alumno) la producción de argumentos a fin de justificar las proposiciones por él sostenidas.

Es ésta, una vez más, una de las razones por la cual elegimos esta teoría como marco teórico central para la investigación. No menos importante es el hecho de que para esta teoría el alumno es concebido[36] en una posición de trabajo autónomo pues la teoría modeliza al alumno como un ser "racional, social, autónomo y responsable, capaz de comprender cómo se establece y se comparte una verdad en una sociedad" (Brousseau, 1999).

Esta referencia a la construcción de la autonomía por parte del alumno se puede reconocer en muchas conceptualizaciones de la TS, siendo una de ellas la configuración de situaciones didácticas y adidácticas. Tal y como explicita el mismo Brousseau, la idea de ambos tipos de situaciones ha ido evolucionando con los aportes de diferentes investigadores desde su propuesta inicial[37]. En las **situaciones adidácticas** el docente entrega (**devolución**) un problema o conjunto de problemas para su resolución. "Entre el momento en el que el alumno acepta el problema como si fuera propio y aquel en el que él produce una respuesta el docente se rehúsa a intervenir sugiriendo el conocimiento que quiere ver aparecer" (Brousseau, 1997: 30). Esto no significa que el docente se aparte de la escena en la que el alumno interactúa con su medio sino que su presencia y su accionar no obstruyen la producción del conocimiento por parte del alumno[38]. Es en este sentido que mencionamos la autonomía del alumno.

---

[36] El hecho de concebir al alumno en posición de autonomía pone en el centro de atención condiciones para la conquista de tal posición que no son las que usualmente se le asignan en la cultura escolar.
[37] Así, en un comienzo la didacticidad o adidacticidad se asociaba a la presencia o ausencia del docente.
[38] "La situación adidáctica funciona idealmente con casi ningún aporte del docente" (Hersant y Glorian, 2005: 116)

La modelización de la TS considera que el alumno está anoticiado de la voluntad docente de que él adquiera un conocimiento o lo produzca o lo construya en esta instancia. Es por eso que en una situación adidáctica hay un propósito didáctico: la construcción de un conocimiento.
El escenario más amplio que reúne la o las situaciones adidácticas elegidas por el docente, la devolución, las comunicaciones que docente y alumnos intercambian con información, preguntas, sugerencias, comentarios es o que se denomina la **situación didáctica**. De este modo la situación didáctica es concebida como el "entorno del alumno que incluye todo lo que coopera específicamente en la componente matemática de su formación" (Brousseau, 2007: 48)

El estudio de un problema de enseñanza en el marco de la TS comienza entonces con el análisis de las situaciones de enseñanza cuya implementación en clase será puesta en consideración ("análisis a priori"). En este análisis se procura identificar los conocimientos que emergen como producto de la interacción entre el alumno y la situación. En una situación se reconocen las **variables didácticas** (que puede ser el tamaño de un número en una situación de conteo o el grado de un polinomio en una situación de la enseñanza del álgebra). La variable didáctica tiene la particularidad de que a partir del valor que asuma puede promover o no la aparición del conocimiento que se pretende enseñar mediante dicha situación.
Al analizar una situación didáctica se generan otras que devienen en variaciones de la primera con lo cual se genera una familia de situaciones didácticas. Se reconoce como **situación fundamental** a la generadora de toda la familia.

Se desprende del estudio de diversas "situaciones clásicas" elaboradas por investigadores en el marco de la TS una posible modalidad de trabajo en la cual el docente necesita haber anticipado a través del análisis didáctico las posibles reacciones de los alumnos frente a una propuesta (que podría ser una situación) y por lo tanto conocerlas y comprenderlas en términos de los conocimientos que suponen. Como contrapartida podría pensarse que la teoría pareciera alojar cierto determinismo al controlar (siempre dentro de un abanico o conjunto de alternativas) las reacciones del estudiante. Creemos que al abrir el juego a la producción del alumno es posible que sus elaboraciones excedan aquello que el docente pueda anticipar. Habrá siempre un espacio de incertidumbre como resultado de la convocatoria a que el alumno se implique con autonomía intelectual. Será ésta una de las interpelaciones que este trabajo hará sobre la teoría a lo largo de la investigación.

Es uno de los objetivos de la TS que lo que se enseña esté cargado de significado y tenga, por lo tanto, **sentido** para el alumno (Charnay, 1994). En términos de Brousseau (1997)

> "El **sentido de un conocimiento** se define no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática, no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc."

Desde la perspectiva de enseñanza la construcción del sentido de un conocimiento se produce en la medida en que las situaciones presentadas por los docentes aborden distintos aspectos de los objetos de enseñanza. Desde la perspectiva del aprendizaje se espera que el sentido que los conceptos tienen para los alumnos pueda evolucionar.

Si bien las diversas situaciones pondrán al alumno frente a distintos sentidos de los conceptos, Vergnaurd (1981) aclara que el sentido no se encuentra en las situaciones mismas sino que "el sentido es una relación del sujeto con las situaciones y los significantes. Más precisamente son los esquemas evocados en el sujeto (por una relación o por un significante) los que constituyen el sentido de esta situación o este significante para el individuo".

De este modo esta tesis ubicándose en la problemática de la enseñanza de la fundamentación se propone abordar los sentidos que los docentes puedan comunicar a sus alumnos en referencia a la producción de fundamentaciones en clase, muchos de los cuales serán compartidos con la demostración y la prueba de Balacheff, tales como los de explicar, comprender y validar en tanto que otros –probablemente- emerjan del proceso de estudio.

3.2 LOS RAZONAMIENTOS EN LA PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTOS EN MATEMÁTICA

En esta sección realizaremos un recorrido por aquellas nociones que la investigación en didáctica ha desarrollado y estudiado intentando capturar el momento de producción de ideas en la matemática. Este itinerario dará cuenta de lo complejo de aprehender esta actividad y, en consecuencia, las dificultades para su enseñanza. Se hará evidente la necesidad de tomar decisiones sobre los conceptos que enmarcarán esta investigación, pues los investigadores que han contribuido al estudio de las formas de razonamiento matemático (y en esta circunstancia nos referimos a los estudios de perspectiva epistemológica tomados como referencia) plantean un conjunto de posiciones no siempre cercanas.

Tenemos el propósito de presentar estas ideas y, análisis mediante, formular los conceptos que utilizaremos en nuestro trabajo y nuestra propia perspectiva. Esperamos que en el recorrido, el análisis y la discusión con los autores resulte un aporte sustantivo de esta tesis a la comprensión de la problemática de la enseñanza de las formas del razonamiento matemático.

Nos impulsan dos preguntas ¿qué significa razonar matemáticamente? ¿qué formas de razonamiento son aquellas cuya enseñanza podría contribuir de manera sustantiva a la formación matemática en la escuela media?

Se presenta en esta situación un universo de palabras y conceptos a desarrollar. Presentarlos nos parece necesario para discutir sobre su enseñanza. Procesos tales como **explicar, razonar, argumentar, justificar, validar, inferir, fundamentar, probar, demostrar** y sus correspondientes productos: **explicaciones, razonamientos, argumentaciones, justificaciones, validaciones, inferencias, fundamentaciones, pruebas y demostraciones** representan un vasto conjunto de expresiones utilizadas en la investigación sobre la producción de conocimiento en matemática. Sin apelar a ningún adjetivo (pruebas pragmáticas o intelectuales, por solo dar un ejemplo) tenemos ya un importante espectro de actividades (y sus correspondientes productos) sobre las que se habla en la educación matemática. Como sostiene Balacheff (2008) todas estas expresiones habitan las investigaciones en didáctica sin que se pueda hablar de un diccionario de conceptos compartidos (amén de las dificultades ocasionadas por traducciones a otros idiomas y sentidos distintos de estos términos en cada lengua, sentidos que no podemos obviar).

Boero (1999) ubica algunas de estas acciones en el contexto de la actividad del matemático, y en tal sentido señala que es inherente al oficio del matemático la exploración de ideas y la producción de argumentos, ejemplos, contraejemplos, en momentos de iniciación de una demostración[39]. Si bien en general no quedan huellas precisas de toda esta actividad, estos recursos son utilizados en la enseñanza de la matemática pues se los entiende como parte de la génesis en la construcción del conocimiento.

En el inicio de la actividad recién descripta, tanto los alumnos como los matemáticos de oficio producen argumentos sobre sus posicionamientos, siendo éstas explicaciones en un lenguaje informal. Es por esto que comenzamos abordando la actividad de la argumentación en matemática a la que denominaremos (para distinguir de otras) razonamiento argumentativo .

3.2.1 Razonamientos Argumentativos[40]

Existen diferentes conceptualizaciones de lo que es la argumentación o razonamiento argumentativo. Dependiendo en cuál nos situemos Hanna y de Villiers(2008) señalan que se siguen dos posiciones distintas e importantes que inciden en nuestro trabajo de

[39] En la misma dirección Brousseau apunta a la diferenciación entre el razonamiento matemático y su producto cultural "la demostración" de las formas en las que se construyen "las verdades" en el campo de la matemática: "Muchos profesores de matemáticas tienen tendencia en deducir de ello (en referencia a la presentación axiomática del conocimiento) que, puesto que los razonamientos matemáticos son los únicos medios de establecer públicamente la verdad de un enunciado matemático, estos razonamientos han de describir necesariamente, a su vez (o utilizarse como modelo para describir), el pensamiento que construye correctamente éstas (en referencia a las verdades), y por lo tanto que describan el pensamiento de las matemáticas y de los alumnos" Brousseau (2004).

[40] En lo que sigue desarrollaremos dos formas de razonamientos. En ambos casos adoptamos la conceptualización de razonamiento que también adopta Brousseau y que proviene de Oléron (citado en Brousseau y Gibel, 2005: 15) "Un razonamiento es un conjunto ordenado de declaraciones que se encuentran relacionadas, combinadas u opuestas en función de algún propósito y respetando ciertas restricciones que se pueden explicitar". En consonancia con esta conceptualización encontramos en Klimovsky (1994: 85). "Un razonamiento es todo encadenamiento de enunciados y proposiciones". En cambio Panizza (2005:19) ofrece la siguiente conceptualización: "razonar es un proceso por el cual uno parte de cosas conocidas para obtener algo que no conocía". En este caso Panizza privilegia la intención de producir conocimiento a través del razonamiento. Klimovsky avanza en su definición reconociendo que todos los enunciados de un razonamiento, salvo el último, tienen la calidad de conocimiento "ya obtenido o al menos aceptable" y las denomina premisas en tanto la conclusión "surge como conocimiento nuevo". Observando estas coincidencias preferimos utilizar la definición de Brousseau que explicita el modo en el que se encadenan los enunciados o declaraciones. Recuperamos así algunas organizaciones que aún cuando no necesariamente generan un nuevo conocimiento, sí, en cambio, nos permiten llegar por otra vía a un conocimiento ya existente mostrando nuevas conexiones.

investigación: a) la argumentación funciona como un obstáculo epistemológico para la enseñanza de la demostración b) la enseñanza de la argumentación puede ser una forma de iniciar la enseñanza de la demostración[41].

Comenzaremos realizando un esbozo de la propuesta de Duval cuyo enfoque corresponde al que describimos en a) y luego tomaremos el trabajo de Pedemonte y el grupo de Boero para analizar los elementos que representan al grupo b). Por razones que luego expondremos necesitamos contemplar ambos enfoques.

Duval(1990) estudia la problemática de la enseñanza de la argumentación y la demostración desde una perspectiva cognitiva y lingüística buscando encontrar formas de razonamiento cuya enseñanza contribuyan a la enseñanza y comprensión de la **demostración** en la escuela. Dado que la demostración se apoya en razonamientos deductivos el autor centra su análisis entre ambos tipos de razonamientos: argumentativos y deductivos.

Duval considera que la perspectiva de la lógica es insuficiente para comprender el discurso argumentativo. La lógica distingue en un razonamiento a las unidades de sentido o proposiciones de las funciones de verdad o relaciones que se establecen entre las unidades. Estos elementos son, para este autor, insuficientes para comprender el razonamiento ya que, como él mismo menciona: "Decir que un razonamiento depende sólo de su forma, vuelve pues de hecho a decir que las proposiciones mismas no son tomadas en consideración: las nombramos solamente como soporte para los valores de la verdad. Esta aproximación lógica es insuficiente para un análisis de los procesos cognitivos del razonamiento". Según Duval el razonamiento argumentativo tiene una complejidad que no podría ser capturada por estos conceptos y si se lo intentara, su descripción se reduciría al mero hecho de sancionar que la argumentación detenta una lógica no formal mientras la demostración ostenta una lógica formal.

Duval incorpora un tercer elemento a visualizar en los razonamientos: el **valor epistémico** - que indica el valor de creencia o de opinión que tiene el locutor de un enunciado respecto del mismo - y propone analizar cómo se modifica dicho valor tanto en un razonamiento argumentativo como en uno deductivo (dejando de lado a la demostración). El valor epistémico estará relacionado con la comprensión de la proposición en juego así como también con los conocimientos del estudiante. De este modo creemos que con este

[41] Si bien los autores están centrados en la demostración, el desarrollo que realizan nos permite pensar en las demostraciones como razonamientos deductivos.

concepto Duval incorpora la subjetividad del sujeto que elabora o que analiza un razonamiento y que este elemento es de importancia para pensar el problema de su enseñanza.

Otro aporte de Duval (para este mismo objetivo de estudiar el razonamiento argumentativo y también el deductivo) es el reemplazo de la función de verdad utilizada por la lógica por el "**paso de razonamiento**", entendiendo por tal el pasaje de una o más proposiciones hacia una nueva proposición, tanto en razonamientos argumentativos como deductivos. Es decir que los pasos de razonamiento ocurren durante el desarrollo de un razonamiento. Este concepto es, en términos de Duval superador del que provee la lógica, denominado **función de verdad**.

Entendemos que el paso de razonamiento es en realidad una ampliación de la función de verdad, que permite ver otras formas de conexión entre las proposiciones o unidades de sentido y así extender este análisis estructural al razonamiento argumentativo.

Duval realiza dos distinciones. En un caso observa el número de premisas involucradas (una o, dos o más). Por otro lado observa en qué se apoya el pasaje de una premisa a otra afirmación. Esta consideración tiene dos alternativas:

a) que el pasaje se realice en función del contenido de la premisa
b) que el pasaje se realice en función de la aplicación de una regla de inferencia.

Presentamos los cuatro tipos de pasos de razonamientos así definidos por Duval junto con los ejemplos que el autor considera[42].

Tipo (1): pasaje en función del contenido de una premisa. Es lo que se entiende como inferencia inmediata. ("Alberto es viudo." Por lo tanto "Alberto estuvo casado". O también: "Celina habla dos lenguas: inglés y francés" entonces "Celina habla").

Tipo (2): pasaje en función de la aplicación de una regla de inferencia sobre una premisa. Es la conversión lógica de una proposición, por ejemplo por contraposición. ("Si un número es múltiplo de cuatro entonces es múltiplo de dos" por lo tanto si un número no es múltiplo de dos entonces no es múltiplo de cuatro")

[42] Como los ejemplos del autor son genéricos, agregamos en cada caso un ejemplo puntual de nuestra producción interpretando las especificaciones que aporta el investigador.

Tipo (3): pasaje en función del contenido de dos o más premisas. Es el caso del silogismo clásico o aristotélico. ("Todos los hombres son mortales, Sócrates es un hombre, Sócrates es mortal").

Tipo (4): pasaje en función de la aplicación de una regla de inferencia sobre dos o más premisas. Es el paso de deducción. (Si un numero es múltiplo de dos y de tres es múltiplo de 6. Las premisas serían "x es múltiplo de 2" y "x es múltiplo de 3", la regla de inferencia "si un primo divide a un producto de dos números entonces divide a alguno de los dos factores" y finalmente la conclusión "x es múltiplo de 6"[43]).

Luego de esta tipología, la propuesta de Duval se completa con el estudio de los tipos de sucesión de pasos que aparecen en un razonamiento. Estos tipos de sucesión de pasos son las formas de enlace de los distintos pasos de razonamientos. Surge una nueva clasificación (esta vez de razonamientos) que ofrece la oportunidad de comparar el razonamiento argumentativo con el deductivo.

Así el autor presenta dos tipos de sucesión de pasos. El primer tipo refiere a pasos explícitamente "enlazados". Esto ocurre cuando cada nuevo paso tiene entre sus premisas la conclusión del paso anterior. En el segundo tipo los pasos son "extrínsecamente" conectados. En este caso no hay un reciclaje de la conclusión anterior y se utilizan conectores tales como "pues" o "pero" entre otros.

A partir de estos conceptos los razonamientos argumentativos quedan caracterizados por tipos de pasos (1) y (3) y por enlaces extrínsecos (mientras que los razonamientos deductivos se caracterizan por tipos de pasos (2) y (4) y por sucesiones de pasos del tipo 1, esto es, explícitamente enlazados).

De esta forma, un elemento que permite distinguir ambos discursos - argumentativo y deductivo – consiste en términos de Duval en el **estatuto del conocimiento** puesto en juego. En tanto en los razonamientos argumentativos el conocimiento es reconocido por

---

[43] Exponemos el razonamiento en forma completa para un mejor comprensión. "x es múltiplo de 2" $\Rightarrow x = 2 \cdot k$. Del mismo modo "x es múltiplo de 3" $\Rightarrow x = 3 \cdot m$. De ambas expresiones de deduce que $\Rightarrow 2 \cdot k = 3 \cdot m \Rightarrow$ "2 divide a $3 \cdot m$". Aplicando la regla de inferencia se arriba a "2 divide a m" $\Rightarrow m = 2 \cdot j \Rightarrow x = 3 \cdot 2 \cdot j$. Finalmente alcanzamos la conclusión "x es múltiplo de 6".

su contenido, en los razonamientos deductivos el conocimiento puede tener distintos estatutos: hipótesis, regla de aplicación o conclusión.

Finalmente, Duval concluye que el razonamiento argumentativo - elaborado por los alumnos con mayor facilidad - es un objeto menos controlable por el docente que el razonamiento deductivo. Los conceptos elaborados para este estudio - tipo de pasos de razonamiento y estatuto del conocimiento – son indicadores para el autor de una **ruptura cognitiva** entre el razonamiento argumentativo y el deductivo.

No obstante sugiere que "pueden proponerse tareas, que ayudan a los alumnos a tomar conciencia de la diferencia entre argumentación y deducción" y en tal sentido "la comparación entre las representaciones de la organización argumentativa y su reorganización deductiva permite medir la distancia que separa estos dos métodos de razonamiento".

Notamos que los ejemplos de razonamientos argumentativos utilizados por Duval(1990) para mostrar esta distancia están fuera del ámbito de la matemática. Entendemos que la argumentación puesta en juego en el ámbito de la matemática tiene especificidades del campo que la distinguen de una argumentación en el discurso del lenguaje común. Más aún, entendemos y sostenemos que las explicaciones en general, los razonamientos y discursos están dotados de elementos relacionados con el campo de conocimiento en el que surgen, enmarcados y condicionados por el tipo de conocimiento puesto en juego.

Compartiendo esta necesidad de considerar el campo donde se producen las argumentaciones y centrados en la enseñanza de la geometría, Boero y su grupo de investigación de Génova, mantienen una perspectiva distinta sobre la posible continuidad o ruptura entre los razonamientos argumentativos y deductivos. Desde la perspectiva de Boero y su grupo la actividad de argumentación puede evolucionar hacia el razonamiento deductivo.

Pedemonte (2005: 320), quien pertenece a este grupo de trabajo, realiza un estudio sobre relaciones posibles entre razonamientos argumentativos y deductivos[44] tomando un tipo especial de argumentaciones: aquellas que contribuyen a formular y justificar conjeturas en

[44] Hemos incluido sus conclusiones en el Estado del Arte.

el área de la geometría en la escuela media. Pedemonte sostiene que argumentaciones, demostraciones y su eventual relación-distinción pueden estudiarse desde dos aspectos: el contenido y la estructura. Para ello toma del grupo de Boero la noción de **unidad cognitiva** cuya conceptualización puede resumirse del siguiente modo: "Durante la producción de una conjetura el estudiante progresivamente produce su enunciado a través de una intensa actividad argumentativa que se entremezcla con la justificación de la verosimilitud de sus elecciones. Durante el proceso siguiente de demostración del enunciado, el estudiante organiza algunos de los argumentos producidos previamente de acuerdo con una cadena lógica" (Boero, Garuti, Mariotti, 1996)

Interpretamos a partir de este enunciado que es la permanencia de las explicaciones que emergieron en el razonamiento argumentativo en el ahora razonamiento deductivo o demostración lo que refleja la existencia de una unidad cognitiva.

Creemos que esta conceptualización es insuficiente para abordar el conjunto de producciones de los alumnos[45]. Más aún, en su estudio sobre el rol de la argumentación en actividades matemáticas, Boero (1999) propone distinguir seis fases en las cuales vemos una clara metamorfosis de las ideas iniciales que se producen durante una producción de una demostración:

1.- producción de una conjetura (que incluye: exploración de la situación problemática, identificación de regularidades y de condiciones para que tales regularidades tomen lugar, identificación de argumentos de factibilidad para la producción de la conjetura).

2.- formulación de un enunciado

3.- exploración del contenido de la conjetura (límites y validez)

4.- selección de un encadenamiento de argumentos coherentes y teóricos en una cadena deductiva

5.- organización de tal encadenamiento de forma que resulte aceptable de acuerdo con los estándares matemáticos (producción del texto de publicación)

6.- producción de una demostración formal

Este último punto hace referencia al proceso de escritura que debe realizar el matemático para que su demostración sea recibida por la comunidad. Esto involucra la discusión e

[45] De hecho, las producciones con las que nos hemos encontrado en nuestra investigación nos abrieron a un conjunto de preguntas con respecto a la unidad cognitiva: ¿es necesario que permanezcan todas las explicaciones esbozadas para que se considera la unidad cognitiva? ¿podria eventualmente cambiar la forma o aspecto de estas explicaciones? ¿se mantendría la noción de unidad cognitiva ante la presencia de explicaciones superadoras de las primeras pero evidentemente apoyadas en ellas? ¿la pérdida de alguna de ellas sería motivo para desestimar la unidad? ¿La presencia de nuevas también?

identificación de los límites de aquello que debe ser explicado o no en la comunidad matemática. Entendemos que este punto puede quedar fuera del interés de nuestra investigación.

No obstante vemos - a partir de las fases explicitadas - una operación de transformación de las ideas iniciales en juego que podría contraponerse con la propia conceptualización que estos autores hacen de **unidad cognitiva.** Desde nuestra perspectiva estamos convencidos que en algunas argumentaciones se puede apreciar la permanencia de algunas explicaciones e ideas o conceptos o teoría lo que daría cuenta en nuestra opinión de una continuidad conceptual entre razonamientos argumentativos y deductivos.

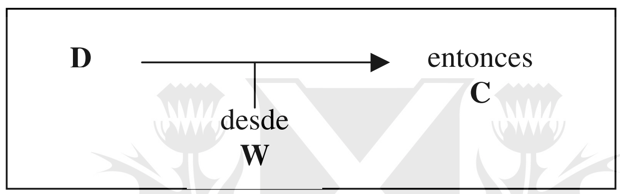
Pedemonte da una mayor precisión a esta conceptualización de unidad cognitiva en su investigación sobre producción de conjeturas, argumentaciones y pruebas que elaboran los alumnos a los que se les propone un problema abierto de geometría.

Establece que durante la argumentación – la que ocurre durante la producción de una conjetura – los alumnos utilizan ciertas concepciones, nociones y representaciones que la investigadora define como *sistema de referencia* (Pedemonte, 2005: 319) abarcando tanto a los sistemas de representación (lenguaje y heurística sobre el diseño) así como también a los sistemas de conocimiento (concepciones en términos de Ballacheff y marco en término de Douady). Con estas precisiones la investigadora redefine la conceptualización de Boero en estos términos: "Par exemple, il y a unité cognitive si la conjecture et la démonstration son construites dans le même cadre et si on peut retrouver pendant la construction de la démonstration des mots, des expressions, des phrases utilices pendant l'argumentation."[46]

Esta conceptualización sobre unidad cognitiva le permite a Pedemonte hallar una continuidad cognitiva entre argumentaciones y demostraciones alejándose de los resultados de Duval. Nos interesa mencionar aquí que la concepción de argumentación que tanto Pedemonte como Boero sostienen no se contrapone necesariamente con la que utiliza Duval, siendo para ellos una argumentación: "tanto el proceso de producir un discurso lógicamente conectado (pero no necesariamente deductivo) sobre un tema, (definido en el diccionario Webster como "el acto de formar razones, construir inducciones, extraer conclusiones y aplicarlas al caso en discusión") así como también al texto producido por tal proceso (Boero, 2002: 268)

[46] "Por ejemplo, existe unidad cognitiva si la conjetura y la demostración están construidas en el mismo marco y si se puede encontrar durante la construcción de la demostración las palabras, expresiones y fraces utilizadas durante la argumentación." (ibid.)

Bajo esta concepción de argumentaciones – que nosotros estamos denominando razonamientos argumentativos – Pedemonte distingue tres clases: las argumentaciones deductivas, las abductivas y las inductivas, utilizando para ello el modelo de Toulmin. Mediante este modelo se analiza el discurso a partir de una terna inicial que se compone de los hechos (Data), , la proclama (the Claim) y la garantía (the Warrant). De este modo Toulmin (1958: 99) sostiene: "We now have the terms we need to compose the first skeleton of a pattern for analysing arguments. We may symbolise the relation between the data and the claim in support of which they are produced by an arrow, and indicate the authority for taking the step from to the other by writing the warrant immediately below the arrow."[47]



Si bien a esta estructura se le agregan luego otros tres elementos, no deja de ser una estructura ternaria. Creemos que el uso de este modelo tiene implícitos algunos supuestos que le permiten a Pedemonte analizar las argumentaciones bajo este modelo ternario, siendo esta estructura ternaria comparable a la que se encuentra luego en los razonamientos deductivos y es ampliamente aceptada por todos los investigadores.

Existen otros modelos tomados por otros autores para analizar los razonamientos argumentativos tales como el de Perelman y el de Ducrot. Éstos, junto con el de Toulmin, comparten su origen en el campo de la teoría lingüística y se aplican por lo tanto a argumentaciones dentro y fuera del campo de la lógica.

Retornando al análisis de Duval, el autor consigue atrapar un tipo de razonamiento no deductivo - el argumentativo - sosteniendo que el enfoque y los elementos de la lógica no son adecuados en virtud de que este marco teórico está destinado a mirar el llamado razonamiento formal.

[47] "Ahora tenemos los términos que necesitamos para construir el primer esqueleto del modelo para analizar argumentos. Podemos simbolizar la relación entre el enunciado y la data que se produce para darle sostén por una flecha, e indicar la autoridad para dar el paso escribiendo la garantía inmediatamente debajo de la flecha.

Sin embargo Panizza realiza un recorrido por distintos tipos de razonamientos, desde la perspectiva de la lógica, describiendo –en sintonía con Duval- los razonamientos deductivos y ampliando la descripción a algunos tipos de razonamientos que la autora denomina no deductivos – abducciones, analogías e inducciones- destacando la **forma** de estos modos de razonar. Acordamos con Panizza en la necesidad de contemplar unos y otros para un proyecto de enseñanza y en el lugar importantísimo que tendrán los procesos de validación[48] –principalmente para el grupo de razonamientos no deductivos.

Consideramos que los aportes de Duval, Balacheff por un lado quienes encuentran una ruptura cognitiva entre el razonamiento argumentativo y el deductivo y Boero, Pedemonte y otros que sostienen una continuidad (utilizando para su análisis los modelos de Toulmin, Perelman y Ducrot) dan cuenta del estado incipiente de los conocimientos de los que dispone la didáctica para el estudio de la enseñanza de estas formas de razonamiento.

Queremos precisar que no es el objetivo de esta investigación avanzar en el estudio de la argumentación matemática ya sea como proceso o producto pero entendemos que este análisis contribuye a sostener nuestra propuesta de la fundamentación para su estudio en la escuela.

3.2.2 Razonamientos Deductivos

Duval, Panizza y otros reconocen en los razonamientos deductivos una estructura ternaria. Donde se distinguen tres **estatutos operatorios** para las proposiciones utilizadas:

a) las premisas o proposiciones de entrada, (también hipótesis)
b) las reglas de inferencia: formadas por proposiciones, teoremas, principios, etc.
c) Las conclusiones o proposiciones de salida, (también tesis)

Observando esta estructura una misma proposición puede ocupar en diferentes razonamientos distintos estatutos operatorios.

Disentimos con la idea que sostiene Duval (1991, 2002) de que en estas estructuras ternarias el contenido sea irrelevante y solo sea importante el **estatuto operatorio** de las

[48] Entendemos que los procesos de validación contemplan la producción de explicaciones que dan cuenta de la veracidad de conjeturas y afirmaciones.

proposiciones, al menos desde un punto de vista didáctico. Disentimos también con el autor ya que los ejemplos que daremos también pueden presentarse en la forma de silogismos los cuales - nosotros entendemos - son razonamientos deductivos[49]. Pero de ambos disensos generamos un acuerdo con el autor ya que con ellos pretendemos mostrar que **desde un punto de vista didáctico no solo es relevante la estructura de estos razonamiento sino también su contenido**. Presentamos los ejemplos:

Tipo [1] de razonamiento:
(Premisa) "La función $f(x)=x^2$ es par".
(Regla de inferencia) "Las funciones pares tienen gráficas simétricas respecto del eje y".
(Conclusión) "la función $f(x)=x^2$ tiene gráfica simétrica respecto del eje y".

Tipo [2] de razonamiento:
(Premisa) "La función $f(x)=x^2$ es par".
(Regla de inferencia) "Las funciones positivas tienen gráficas ubicadas por encima del eje x".
(Conclusión) "La función $f(x)=x^2$ tiene gráfica ubicada por encima del eje x".

Tipo [3] de razonamiento:
(premisa) "la función $f(x)=x^2$ es par".
(Regla de inferencia) "las funciones pares tienen gráficas ubicadas por encima del eje x".
(Conclusión) "la función $f(x)=x^2$ tiene gráfica ubicada por encima del eje x".

El segundo razonamiento tiene una estructura ternaria pero el resultado que se utiliza en la inferencia no tiene correspondencia con la premisa que se enuncia[50]. La proposición que se ha utilizado de premisa es verdadera: la función $f(x)=x^2$ es par pero el resultado que se utiliza como regla de inferencia menciona a las funciones positivas. De hecho, la función $f(x)=x^2$ también es positiva, pero eso no ha sido enunciado. Esto hace que la proposición conclusión sea verdadera también aún cuando la deducción no es correcta.

[49] Recordemos que en punto anterior hemos reseñado que Duval presenta el silogismo aristotélico como un razonamiento argumentativo.
[50] Falla lo que Duval (1991) denomina "Verificación de la premisa" en la estructura ternaria del razonamiento deductivo.

De forma similar en el tercer razonamiento la premisa y la conclusión son verdaderas sin embargo la regla de inferencia es falsa. No son las funciones pares las que tienen gráficas ubicadas por encima del eje x sino las positivas. La conclusión es verdadera ya que la función $f(x)=x^2$ no solo es par sino también positiva.

Esto nos remite a la siguiente pregunta ¿cómo podemos considerar este tipo de razonamientos? ¿podemos hablar de una explicación incorrecta? ¿podemos, más aún, avanzar y definirlo como una deducción (es decir, le damos categoría de razonamiento deductivo) incorrecta? ¿sería mejor, sentenciar que no es una deducción?

Consideraremos, en concordancia con Panizza, (2005: 24) y Klimovsky (1994: 90) que los razonamientos deductivos son **razonamientos válidos**[51]. A partir de esta premisa el segundo y el tercer razonamiento no siendo razonamientos válidos (si cambiamos la premisa por "la función $f(x)=x^2-1$ es par" que es verdadera obtenemos una conclusión falsa, a saber, que la función $f(x)=x^2-1$ tiene un gráfico ubicado por encima del eje x) no serán entonces considerados razonamientos deductivos.

Por su parte Panizza sostiene que "los alumnos no comprenden que a partir de premisas falsas y "razonando bien" se puede llegar a una conclusión verdadera". Más allá de los nombres que podamos utilizar, consideramos que el uso de una expresión tal como "razonar bien" para esta explicación resulta un obstáculo para la comprensión de los alumnos. Una vez más, la toma en cuenta de la estructura sin una consideración por los contenidos, más allá de su corrección desde el punto de vista de la lógica, trae aparejada consecuencias didácticas que quedan fuera del interés de la lógica pero que son el centro de interés de la didáctica.

Para sintetizar, en términos de Klimovsky o Panizza, el razonamiento válido junto con la premisa verdadera lleva a conclusiones verdaderas y es la forma en la que la comunidad

[51] Adoptamos la conceptualización de Panizza para un razonamiento válido como aquel que permite derivar de ciertos enunciados (las premisas) otro (las conclusión) de manera tal que siempre que las premisas son verdaderas la conclusión también lo es. En Klimovsky (1994) se desarrollan todas las posibles situaciones a partir de silogismo Aristotélico.

matemática da por aceptada una demostración[52]. Enseñar a los alumnos de qué forma efectiva organizamos un razonamiento válido va mucho más allá de la definición que de él se pueda dar[53], definición que oculta una de las dificultades que emergen en los alumnos en la adecuación de las premisas a las reglas de inferencia que se utilizan, lo que aparece como una cuestión que no solo involucra la **forma** sino el **contenido**.

Retomando el análisis hasta aquí presentado, propondremos en esta investigación un abordaje de los razonamientos matemáticos donde ambos aspectos - el de la forma y el del contenido - sean considerados desde un punto de vista didáctico. Del mismo modo estas formas de razonamientos que propondremos serán una forma de organizar un puente entre los razonamientos argumentativos y la formalidad del razonamiento deductivo. Volveremos a esta cuestión en el apartado sobre fundamentación.

Finalmente , tanto las observaciones que Panizza realiza desde la perspectiva de la lógica como las que Duval efectúa desde una perspectiva cognitiva tienen en común que presentan un análisis de las dificultades de los alumnos sin mediar un relato del proyecto de enseñanza en el que están insertos.
Creemos que las dificultades de los alumnos en la comprensión y aprendizaje de conceptos en matemática (cualquiera sea el tema) no son independientes del proyecto de enseñanza y que su descripción constituye un marco de referencia indispensable para comprender características del aprendizaje de los alumnos (ya sea que estamos hablando de dificultades o de aprendizajes logrados). En esta investigación describiremos minuciosamente el proyecto de enseñanza y su implementación en clases de la escuela media.

Duval sugiere que se implemente una enseñanza de la estructura propia del razonamiento deductivo como segunda fase en el ámbito de la enseñanza de la geometría para avanzar con la enseñanza de la demostración, habida cuenta de las importantes diferencias entre el razonamiento argumentativo y el deductivo. Para ello sugiere separar la heurística (o

52 Esta observación es, desde ya, una simplificación de la noción de demostración que se apoya en otros elementos como el conocimiento fuertemente institucionalizado, pero queremos destacar la necesidad de que un razonamiento deductivo observe esta adecuación de las hipótesis a la regla de inferencia que se quiere aplicar.

53 Nos referimos a la definición presentada por estos autores desde el campo de la lógica sobre los razonamientos válidos como aquellos que permiten arribar a conclusiones verdaderas partiendo de premisas verdaderas. Esta definición, creemos, no resulta operativa para trabajar con los alumnos el objeto razonamiento, pues para ponerla en ejecución deberían chequearse todas las posibles premisas verdaderas ajustables al razonamiento.

resolución de problemas) de la fase de organización de proposiciones. Es a partir de la enseñanza de grafos y de la puesta en evidencia de la estructura ternaria del razonamiento deductivo que se implementa su propuesta de enseñanza. No aparece mencionada en esta propuesta la gestión que realizaría el docente.

En nuestra investigación, en cambio, siendo el objetivo de enseñanza distinto por cuanto no nos interesa el estudio de la demostración sino que intentamos una transposición didáctica de la demostración en el aula para otras áreas de enseñanza fuera de la geometría, nuestro interés principal está puesto en el papel del docente en un proyecto de enseñanza que abona la emergencia de estas formas de razonamiento como un proyecto colectivo. En cierto modo nos acercamos a Duval pues nos interesa la enseñanza de razonamientos deductivos, pero el proyecto que sostiene a Duval muestra que su objetivo final es el de la enseñanza de la demostración y ese aspecto queda fuera de nuestro interés.

3.2.3 La Prueba

Para estudiar la génesis de la demostración en el aula Balacheff elabora la noción de **prueba**. La prueba, sostiene el autor, es un tipo especial de explicación. La noción de explicación que presenta Balacheff, tomada de Miéville, limita el universo de las explicaciones a aquellas que tienen por objetivo esclarecer la veracidad de una afirmación. De este modo las pruebas estudiadas por Balacheff se producen en escenarios de producción y validación de conjeturas.

Para Balacheff una explicación no se reduce a una cadena deductiva, utiliza el lenguaje natural y convence al emisor (Balacheff, 2000: 12). De hecho una explicación, en el momento en el que se reproduce en un discurso es un conjunto de consideraciones que resultan convincentes para el locutor. En esta categoría Balacheff distingue así a la convicción de un emisor y de quien lo escucha, mostrando ya desde el inicio, su enfoque en el aspecto social de estas producciones.

Señalamos que para todo el universo de actividades matemáticas suele elegirse una perspectiva de análisis que privilegia en algunos casos el proceso (razonar, demostrar, probar) o, en otros, el producto (razonamientos demostraciones, pruebas). Balacheff sostiene (2000: 14) que su análisis se centra en el estudio del proceso en tanto considera que el trabajo de Duval se centra en el producto. En nuestra investigación abordaremos las intervenciones docentes que posibilitan la emergencia de la fundamentación. En tal sentido estaremos observando el proceso, sin embargo el propio proceso se alimenta de las producciones de los alumnos, que entenderemos como las fundamentaciones producto. Pondremos en diálogo proceso y producto para estudiar así la emergencia de la fundamentación.

Volviendo a la definición, aquellas explicaciones que tienen por objetivo establecer el valor de verdad de una afirmación y que han sido aceptadas por los interlocutores son definidas como **pruebas**. Balacheff remarca el carácter social de esta producción al sostener que una prueba puede ser aceptada por una comunidad y rechazada por otra. En este sentido una explicación se convierte en una prueba en relación con la comunidad en la que vive.

Hay asimismo una temporalidad en la definición pues una prueba que se apoya en las nociones de sus emisores y receptores irá evolucionando junto con las nociones de esta comunidad.

En esta familia de explicaciones hay distintos usos del lenguaje, distintos usos de la teoría, distintas posiciones de aquel que elabora la prueba con respecto a las acciones a las que se refiere dicha prueba. Estas distintas características le permiten a Balacheff diferenciar cuatro tipos distintos de prueba: el **empirismo naif**, la **experiencia crucial**, el **ejemplo genérico** y la **experiencia mental**. Los dos primeros tipos de prueba se consideran **pruebas pragmáticas** ya que recurren a la "ostensión" de la acción, utilizan ejemplos donde corroboran o confirman los enunciados de las afirmaciones que pretenden probar, no se separan de la acción en términos de una reflexión sobre ella misma y, por las mismas razones, utilizan teoremas en acto[54]. En tanto, en los dos segundos tipos de prueba existe una reflexión sobre las acciones a las que se refieren las propiedades o sentencias en juego. A estas pruebas se las denomina **pruebas intelectuales**.

En los dos primeros tipos (**empirismo naif** y **experiencia crucial**) quien elabora esta prueba está, básicamente, sugiriendo que la veracidad de la afirmación puesta a

[54] No acordamos con Balacheff que toda prueba pragmática deba tener presente teoremas en acto. En cambio consideramos que es una característica que se observa a menudo en pruebas pragmáticas. En tal sentido no da lugar a una clasficación.

consideración se deriva del funcionamiento de tal sentencia en casos particulares. Un tipo a su vez se diferencia del otro por la clase de ejemplo utilizada ya que, en el empirismo naif, el ejemplo tenido en cuenta para constatar la veracidad de la afirmación es un caso tan común como el que a cualquiera se le ocurriría. Es algo así como el caso evidente. En tanto que en la experiencia crucial el ejemplo es elegido como uno paradigmático para quien lo considera, lo cual ya implica alguna pregunta por la generalización.

En los dos tipos subsiguientes, **ejemplo genérico** y **experiencia mental** aparece una reflexión sobre la acción considerada. El individuo se centra en un intento por mostrar el por qué del funcionamiento de la afirmación en juego. En el ejemplo genérico persiste todavía el uso del ejemplo, sin embargo las operaciones que se aplican a tal ejemplo son aquellas que se utilizarían en una demostración sobre el objeto matemático ideal o clase a la que pertenece este ejemplo. Se ponen en juego de este modo las características de la clase o familia de objetos aún cuando se esté utilizando un ejemplo.

Las categorías creadas por Balacheff surgen de un estudio en el área de geometría con estudiantes de 14 años a los que se les pide que escriban en un papel la instrucción que luego recibirá algún compañero que le permita calcular el número de diagonales de un polígono de n lados. El análisis de las producciones de los alumnos no resulta suficiente para que Balacheff pueda elaborar sus categorías teniendo que apelar al registro de los diálogos al interior de los equipos de alumnos. La oralidad surge entonces como un elemento central para analizar la producción de pruebas de los estudiantes. Este aspecto es el que tomaremos como central en nuestra investigación ya que entendemos que los procesos de validación (que, acordamos con Balacheff, motorizan la producción de pruebas) viven y se desarrollan en un contexto oral en las clases de matemática. Sin esa oralidad no podemos avanzar en la comprensión de estas producciones.

Por otra parte, a diferencia de Balacheff quien realiza su investigación fuera de clase y sin la intervención de un docente, proponemos en este investigación tomar la clase como contexto de producción de estas producciones y la gestión docente en el foco de nuestro trabajo como elemento motorizador de la producción de pruebas. En este sentido marcamos nuevamente una posición que nos distingue tanto del trabajo de Balacheff como del de Duval: sostenemos la necesidad de enmarcar el estudio de las formas de razonamiento en un proyecto de enseñanza para comprender las dificultades que experimentan los alumnos. No creemos que pueda quedar fuera de la investigación la intencionalidad docente.

En las **fundamentaciones** concebiremos una reflexión de los alumnos sobre las acciones que se estén considerando ya que entendemos que esta es la vía para acceder a una elaboración donde predominen los objetos teóricos sobre los objetos-empíricos concretos, específicos, y se propicie de este modo un trabajo de generalización, abstracción, inherentes a la producción matemática.

En tal sentido dejaremos fuera del contexto de definición de las **fundamentaciones** los ejemplos de prueba considerados por Balacheff como el empirismo naif o el ejemplo crucial y sí, en cambio, concebiremos inherente al trabajo de fundamentación los aspectos que Balacheff distingue en las pruebas intelectuales.

Esta característica de "reflexión sobre las acciones" será a su vez el motor de las intervenciones docentes como una forma de propiciar la emergencia de las fundamentaciones. Del mismo modo, otro de los elementos clave será la explicitación de propiedades o teoría puesta en juego.

El análisis propuesto por Balacheff considerando las pruebas según los objetos comados en cuenta y la reflexión sobre las acciones puestas en juego nos parecen importantes a la luz de las posibles intervenciones docentes para sostener una evolución de las producciones de sus alumnos. No obstante las definiciones que Balacheff da sobre las categorías no nos permite clasificar – distinguir con certeza y confianza las producciones de los alumnos. Para mencionar un ejemplo, Balacheff sostiene que los teoremas en acto aparecen en el empirismo naif y en la experiencia crucial, y sin embargo el ejemplo que el mismo Balacheff aporta para la experiencia mental extraído de Cauchy sobre la existencia de una raíz para una función continua que toma en algún intervalo valores de distinto signo, presenta un teorema en acto al mencionar que una curva de una función continua tiene un trazado continuo. Es muy probable que estas categorías que destacan elementos importantes en la producción de pruebas (tales como el uso de ejemplos para validar posiciones) no alcancen para conformar una clasificación de las producciones de los alumnos Aún así nos importa su consideración pues dan cuenta de una posible evolución en la actividad del alumno.

Notamos además que los elementos que toma Balacheff para su clasificación, dejan afuera de toda consideración la organización expositiva del texto que es aquello que ocupa a Duval. Vemos que en Balacheff el elemento organizador de la descripción es la posición del estudiante frente a las acciones que debe juzgar y analizar. En las primeras formas de prueba el alumno puede ejecutar las acciones, mostrar que ellas se cumplen, pero no puede reflexionar sobre ellas en tanto en las pruebas intelectuales el alumno puede alejarse de las acciones y analizar por qué ellas se cumplen. En tanto vemos que en Duval el elemento organizador es el texto (donde también vemos un posicionamiento reflexivo del alumno al tomar decisiones sobre qué es lo que se puede inferir a partir de proposiciones que el alumno elige). En este sentido podemos acordar que Duval se centra en el producto (aún cuando considera el proceso al mencionar las dificultades de los alumnos) en tanto Balacheff se centra en el proceso de producir explicaciones – las pruebas - que están en el camino de la demostración.

Ambos investigadores tienen en su horizonte la pregunta sobre la forma en la que puede enseñarse a demostrar. Es por eso que a continuación veremos algunas consideraciones sobre la demostración que resultan relevantes para nuestra investigación.

3.2.4 La Demostración

A diferencia de la mayoría de los objetos de la matemática, la demostración carece de una definición, aunque sí en cambio tiene diversas caracterizaciones. Suele decirse que la demostración es una secuencia o cadena de proposiciones donde cada una o bien es un axioma o bien se deriva de la precedente por medio de la inferencia o de la aplicación de alguna teoría. Como señala Herbst, un número importante de investigadores (Hanna, Lakatos, Rav, Thurston, citados en Herbst, 2002: 177) concluye que esta visión de la demostración, siendo correcta, es reduccionista. Para salir de tal reduccionismo algunos autores como Hanna proponen reconocer en algunas demostraciones la capacidad de asegurar la comprensión y el entendimiento.

Con esta misma intención hemos mencionado en el Estado del Arte el trabajo de De Villiers (1990), sobre funcionalidades y propósitos que puede tener la **demostración**, (en tanto actividad del productor de matemática) y que, en su opinión, suelen quedar en el olvido tras la más conocida función de validación. De todas las funciones mencionadas por De Villiers (verificación, explicación, conocimiento, sistematización, descubrimiento, comunicación) luego ampliadas por Hanna (construcción, exploración), Hanna (2000) destaca el papel privilegiado que tienen aquellas demostraciones que además de validar, **explican** y las propone como las más adecuadas para la enseñanza (reconociendo, no obstante que no se encuentra una demostración de estas características para cada núcleo/concepto de matemática que se necesite enseñar). Estos aspectos de la demostración son los que sostendremos para la fundamentación.

Las demostraciones comparten con las pruebas algunos aspectos sociales ya que en situaciones existen demostraciones aceptadas por algunas comunidades y no por otras[55]. Thurston (1994) comenta la enorme disparidad de requisitos que pueden pedir matemáticos -abocados al estudio de distintas áreas- para comprender una demostración. Es por esto que afirmamos que la demostración también adquiere entidad en tanto exista un referente de la comunidad que la avale como tal, para lo cual debe resultarle comprensible. La demostración no es tal sin referencia a una comunidad matemática.

Los problemas subyacentes a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración son analizados por un número importante de investigadores (en la mayoría de los casos en el área de la geometría). Balacheff menciona que en la propia comunidad matemática de formadores de jóvenes investigadores, pareciera ser que la demostración se aprende por medio de la observación, del ensayo y del error, lo que incluye la imitación (Balacheff, 2000: 4). En la misma dirección Brousseau y Gibel (2005: 14) señalan que la enseñanza del razonamiento en matemática se concibe usualmente como la presentación de modelos de demostraciones que luego los alumnos deben reproducir fielmente.

Creemos necesario observar la evolución de la demostración en la propia comunidad matemática para dar cuenta de la enorme complejidad de esta actividad. A partir de los griegos la matemática se constituye en un campo donde coexisten ideas-conceptualizaciones primitivas que son reconocidas como axiomas junto con resultados-

[55] Tall (1995) menciona que aún en la comunidad matemática existen razones culturales o históricas que pueden provocar el rechazo de una demostración recordando, a modo de ejemplo, la objeción que Kronecker en el año 1873 realizó sobre el trabajo de Cantor. En él Cantor daba un argumento de numerabilidad para la demostración de la existencia de números reales que no fueran solución de ecuaciones algebraicas sin mostrar mediante una construcción la existencia de tal número. Fue ésta la razón del rechazo de la demostración de Cantor.

proposiciones que se generan a partir de estas ideas base por medio de la deducción. En esta forma de construir la teoría matemática la demostración juega un papel fundamental.

En su trabajo "las desventuras del conocimiento matemático", Klimovsky (2005: 34) muestra a partir de un rastreo de los orígenes de los primeros conocimientos matemáticos (lo que nos conduce a unos 3.000 años antes de Cristo en las civilizaciones egipcia y babilónica) que la matemática constituía entonces un conocimiento de índole instrumental que permitía resolver problemas concretos relacionados con la agrimensura y el comercio. La matemática refería así a características concretas de objetos concretos y a "las verdades matemáticas" no se les pedía una demostración pues surgían de la observación de la realidad. Este período previo a los griegos sería entonces un período de matemática sin demostración. Se lo reconoce también como un período de "empirismo". La observación y la inducción eran los únicos medios utilizados para expandir el horizonte de conocimientos.

El objeto de estudio de la matemática no era pues abstracto todavía ni existía un desarrollo de conceptos que pudiera ordenarse en una "teoría". Del mismo modo los objetos matemáticos no fueron objetos ideales desde su comienzo.

Por su parte Balacheff (2000: 20) encuentra evidencia sobre la existencia de procesos de prueba en la etapa pre-euclidiana en ausencia de la demostración (la que recién surge a partir de la producción de los griegos). De esta forma Balacheff encuentra signos de una actividad en la que la búsqueda de la verdad no está regida exclusivamente por la observación de la realidad como lo plantea Klimovsky, sino mediante procesos que se aproximan a aquellos que él denomina prueba.

Incluimos esta breve reseña histórica para mostrar que la demostración ha evolucionado a través del tiempo, es una construcción cultural y tiene una comunidad de referencia y este rasgo de construcción cultural y comunidad de referencia son aspectos que tomamos para pensar la producción de prácticas fundamentadas.

Sadovsky (2005: 23) al describir a la matemática como un producto social afirma que "las respuestas que plantean unos, dan lugar a nuevos problemas que visualizan otros, las demostraciones que se producen se validan según las reglas que se aceptan en cierto momento en la comunidad matemática". En virtud de esta temporalidad Sadovsky concluye que "la idea de rigor matemático, cambia con el tiempo. Entendemos que esta referencia a lo temporal tiene un papel central en nuestro trabajo. Los alumnos tienen, ostentan, utilizan conocimientos matemáticos provisorios. La enseñanza de los modos de producción en matemática debe contemplar este hecho.

Las cuestiones relativas a la enseñanza de la demostración en el área de la geometría han sido muy estudiadas por diversos autores. En los diseños curriculares de la Argentina (y este fenómeno se ha dado en otros países) la demostración ha sido dejada de lado como objetivo de la enseñanza de la matemática para instalarse en las últimas reformas curriculares[56] un énfasis en la enseñanza de distintas formas de razonamiento en matemática. Compartimos en esta investigación la idea de que otras formas de razonamiento pueden habitar muchos otros espacios de producción de conocimiento en la enseñanza en la escuela media y a ellas nos abocaremos.

3.3 LA FUNDAMENTACIÓN

3.3.1 ¿Qué Significa Fundamentar?

La actividad de demostrar resulta entonces fuertemente imbricada con la actividad matemática. Es la actividad del productor de matemática. En la escuela también hay, en escala, una actividad de producción de matemática. Nos referimos a la que los alumnos generan a partir de la necesidad de resolver problemas. La didáctica de la matemática concibe una construcción del conocimiento por parte del alumno en su actividad de resolución de situaciones problemáticas. Estos conocimientos producidos como medio

[56] El programa de matemática vigente para la Escuela Media en la Ciudad de Buenos Aires establece como parte de los objetivos a alcanzar mediante la enseñanza de la matemática: "Generar condiciones que permitan a los alumnos entrar en prácticas de argumentación basadas en conocimientos matemáticos, acercándose a la demostración deductiva". En tanto, a lo largo de toda la descripción de contenidos realizada para los cinco años de la enseñanza media se especifica la enseñanza de la demostración, únicamente para el Teorema de Thales en tercer año. Así vemos que la demostración queda restringida como práctica al área de la geometría. Resulta interesante observar, además, que en tanto se describen actividades de enseñanza tales como construcción de figuras en el bloque de geometría, producción de fórmulas para modelizar, , resolución de problemas que se modelizan con funciones lineales en dos variables, análisis de procesos que crecen y decrecen para distintas funciones, todos estos en el en el bloque de funciones y álgebra, no hay mención alguna a actividades destinadas a la producción de argumentos o validaciones o deducciones en ningún bloque de trabajo a lo largo de la secuencia de cinco años desarrollada. Ver http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/programa_matematica.pdf.

para la resolución de problemas son el punto de partida para la producción de conocimientos en clase.

Por muchas razones creemos que esta actividad necesita indispensablemente estar contextualizada teniendo en cuenta quien es el productor de tales "demostraciones" (un alumno) y quien es el receptor de las mismas (la comunidad matemática de la clase). Estamos, pues, definiendo un escenario para la producción de estas "demostraciones" con otros actores que los clásicamente considerados. Usualmente hay dos actores en juego: el alumno quien produce demostraciones y un docente quien, conociendo el desarrollo esperado es el interlocutor de tales demostraciones. El alumno produce sus demostraciones y mediante ellas da cuenta que sabe y puede producirlas. No convencerá al docente de sus ideas mediante esta actividad pues el docente ya sabe si tal o cual enunciado es verdadero o falso, no se trata de comunicar certidumbres sino de dar cuenta de un conocimiento aprehendido. Al considerar como nuevos protagonistas al alumno y a la comunidad aula estamos cambiando la funcionalidad de la producción de tales tipos de explicaciones específicas del campo. En este cambio de escenario que proponemos, el alumno produce en contextos de incertidumbre y la comunidad de referencia está formada en buena medida por pares, pares en cuanto a sus propios conocimientos matemáticos y sus habilidades para la elaboraciones de "estas demostraciones de clase".

Por otra parte, cuando un concepto se desarrolla en el campo de la matemática, existen en su génesis aspectos intuitivos que luego se limpian y se olvidan durante la etapa de su formalización. Boero (1999) realiza una minuciosa descripción de las fases del trabajo de la demostración que despliega un matemático donde se aprecia esta evolución.

Para que este proceso viva en clase, la intuición debe ser tenida como un valor en juego. Demandar a los alumnos que desarrollen explicaciones formales exentas de intuicionismo es un contrasentido. La "**demostración del alumno**" debiera surgir bajo la necesidad de dar cuenta de la veracidad de una idea – o de explicarla - y, con este propósito la exploración y los borradores de una idea son elementos importantes en la clase. Mientras los matemáticos pueden olvidarlos, los alumnos necesitan atender a su surgimiento y su evolución (y los docentes, por ende también). Esta es una de las respuestas a la pregunta que postula Herbst (2002) acerca de la forma que puede tener la demostración en las aulas. Coincidimos con aquella conclusión que Herbst demanda en el mismo trabajo acerca de la necesidad de que los docentes aborden la enseñanza de la demostración desde otras perspectivas más allá de las que lo toman como un proceso formal (Herbst lo hace en el campo de la geometría y para la enseñanza de la demostración, nosotros creemos que es posible extenderlo a otros campos como el de nuestro estudio).

En su trabajo sobre "Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas" Balacheff menciona que "es fundamental tener en cuenta que la demostración no puede ser enseñada del mismo modo en un aula de clase que en un ambiente puramente científico. Para convertirse en contenido de enseñanza, las matemáticas deben sufrir una transformación adaptativa, una transposición didáctica, bajo un conjunto de límites específicos del sistema didáctico." (Balacheff, 2000: 2).

En ella las situaciones de validación describen un trabajo en torno a la defensa de postulados que han producido los alumnos. Son estas situaciones de validación las que tomaremos como punto de partida para pensar este trabajo que consideramos consiste en una transposición didáctica de la demostración y que llamaremos **fundamentación.**

En la **fundamentación** sostendremos el valor explicativo de los argumentos, por encima del formalismo logrado.

Entendemos que fundamentar es proponer, a raíz de una cuestión matemática, una explicación basada sobre los conocimientos matemáticos del sujeto[57] que la formula, pensada para que sea aceptada por una cierta comunidad de matemáticos en un momento dado y finalmente, portadora de reglas del trabajo de producción matemático.

Esta primera conceptualización encierra algunos elementos que necesitamos precisar para comprender el alcance de esta actividad. Desarrollaremos a continuación los mismos.

[57] Este sujeto puede ser un alumno, un grupo de alumnos o toda la comunidad aula, siendo entonces el sujeto de carácter institucional.

3.3.2 Una Primera Caracterización De La Fundamentación

Presentamos aquí elementos que permiten caracterizar esta actividad.

a) Tiene la intención de promover el entendimiento a partir de una explicación: es decir que tiene un destinatario que es la comunidad matemática de referencia. (comunidad aula)

b) Se admite que utilice un lenguaje familiar no formalizado: es decir que no hay requisitos sobre el lenguaje utilizado. También se admite que apele a otro "marco" (en el sentido de Douady).

c) Subyacen en su armado la lógica del trabajo hipotético-deductivo matemático. Se distinguirán, entonces, en sus partes, procesos de inferencia, deducción o generalización según el caso.

d) Se sostiene a partir de los conocimientos del sujeto que lo produce (ocurriendo eventualmente que estos conocimientos, no siendo parte de un sistema axiomático de conocimientos no puedan ser validados por el sujeto). Estos conocimientos pueden tener estatutos diferentes: pueden provenir de "hechos evidentes" para la comunidad aula, de interpretaciones de representaciones gráficas, de sentencias establecidas en su práctica escolar sin que el alumno pueda dar cuenta exactamente de cómo llegaron a "instalarse", de proposiciones demostradas en las clases, de resultados culturalmente establecidos. Esta cuestión obliga a tener en cuenta para su enseñanza la necesidad de aceptar producciones que tal vez la matemática no aceptaría pero que en un ciclo de enseñanza pueden ser signos de pasos adecuados dados en el camino del aprendizaje de la producción de ideas matemáticas. Nos referimos al papel de los aprendizajes provisorios y su instalación en clase. Es decir que entendemos que el soporte de conocimientos de los alumnos no tiene la configuración del de la comunidad de matemáticos. Tiene una provisoriedad que no se condice con la permanencia de los conocimientos en la comunidad matemática. Esta diferencia, sostenemos, es constitutiva de la transposición didáctica de la demostración en el aula.

e) Su producción tiene una comunidad matemática de referencia quien recibe esta producción, y en función de su capacidad para generar entendimiento podrá aceptarla o rechazarla. Con tales fines podrá también reformular, retroalimentar y enriquecer tales producciones. Esta comunidad será la **comunidad aula** conformada por alumnos y docente. El lugar del docente - que no puede asimilarse al del resto de los alumnos - será parte de lo que proponemos estudiar en nuestra investigación. Tenemos como hipótesis inicial el supuesto de que la presencia del docente es la del portador de las nociones de la disciplina, sin embargo no será su rol el de sancionar la pertinencia o no de las producciones sin tener en cuenta el entendimiento del resto de la comunidad. En este sentido operará bajo una doble regulación: por un lado, el consenso de la comunidad aula que dará señal sobre el entendimiento alcanzado; por el otro, las reglas de producción de la disciplina que ya han sido adecuadas para su enseñanza en clase. Entendemos de este modo que el docente deberá **regular su asimetría** en esta comunidad. A su vez la **intencionalidad docente** es una de las formas de promover esta actividad y en tal sentido será una de las condiciones que contemplamos como necesarias para la emergencia de la fundamentación. El docente ocupa un rol específico y fundamental pues será él quien sostenga los límites de lo que debe justificarse hasta lo que puede darse por conocido. También tendrá a su cargo validar las distintas formas de conocer y su organización.

f) Su producción está vinculada al contexto en el que se está trabajando si bien se mantiene la búsqueda de una generalidad en la explicación.

A partir de esta caracterización inicial vamos ahora a describir dos escenarios posibles para esta producción. Entendemos que el proceso de la **fundamentación** podrá tomar forma en dos niveles:
i) vinculada a situaciones donde la actividad principal será la de explicar procedimientos de resolución de problemas o de manipulación de técnicas.
ii) vinculada a situaciones donde la actividad principal pero no la única consistirá en explicar el valor de verdad de una conjetura.

En nuestra investigación estos dos planos serán los que se desarrollen a propósito de la resolución de problemas contextualizados para el primer plano y los que se desarrollen a propósito de las actividades de contexto matemático presentadas a los alumnos.

A partir de estos conceptos la demostración se distingue de la fundamentación, ya que se caracteriza por un lenguaje formal y por el uso de un conocimiento fuertemente institucionalizado, cuya validez es socialmente compartida.

La fundamentación por su parte admite un lenguaje familiar, contextualizado, basado en las nociones de la comunidad que los produce, las que, siendo el caso de los alumnos de matemática, están permanentemente evolucionando.

Dos ejemplos pueden contribuir a destacar las diferencias más claras entre una actividad y la otra. En una clase de EGB 3 se estableció la siguiente hipótesis "si un número entero tiene resto 2 al ser dividido por 5 entonces su cuádruplo tendrá resto 3 al ser dividido por el mismo número". Se les pidió a los alumnos que establezcan la verdad o falsedad del enunciado y fundamenten su posición. Dado que el enunciado es verdadero se espera una fundamentación de esta conjetura. Una **demostración** se apoyará en el algoritmo de la división para números enteros, utilizará una designación genérica para el número en cuestión (formalismo del lenguaje) estableciendo que:

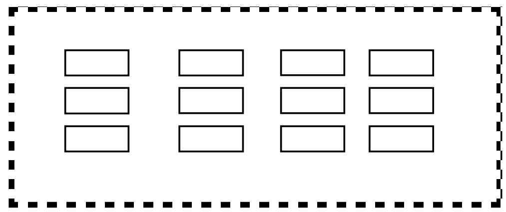
"Sea $a \in N$, $a = d \cdot 5 + 2$ $\Rightarrow 4a = d.4.5 + 8 = 4d.5 + 5 + 3 = (4d + 1).5 + 3$. La unicidad del algoritmo de la división establece que el cociente de $4a$ en la división por 5 es $4d + 1$ en tanto que el resto es 3."

Ciertamente no fue esta la fundamentación que proporcionó un alumno quien, apelando a la noción de repartición observó que el número en cuestión puede representarse como la suma de varios grupos de 5 elementos y 2 elementos más. La representación de 4 veces ese número tendrá a cuatro veces los grupos de 5 elementos y 8 elementos más Estos 8 elementos pueden reagruparse formando un nuevo grupo de 5 elementos y quedando 3 sin reagrupar. Fue evidente en esta representación gráfica para el alumno que estos elementos que no podían agruparse consistían en el resto de la división por 5, finalizando de este modo su **fundamentación.**

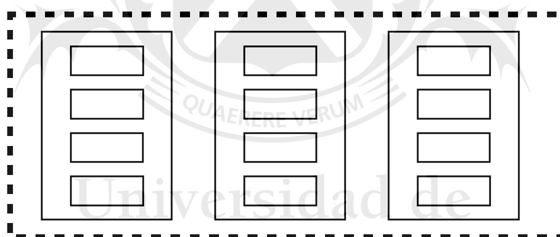
En otra clase de EGB 3 se les propuso a los alumnos establecer la verdad o falsedad del siguiente enunciado: "Si un número entero es múltiplo de 12 entonces es múltiplo de 3". La demostración se apoya en la escritura de múltiplos y, una vez más, en una designación genérica para el número en cuestión. Se podría formular del siguiente modo:

"Si n es múltiplo de 12 entonces existe $k \in \mathrm{N}$ tal que $n = 12 \cdot k \Rightarrow n = 3 \cdot 4 \cdot k \Rightarrow$ (asociatividad del producto) $n = 3 \cdot (4 \cdot k) \Rightarrow \exists\, k' = 4 \cdot k$ tal que $n = 3 \cdot k'$. Entonces n es múltiplo de 3."

La fundamentación de un alumno consistió en la siguiente explicación: "pienso ese número como una colección de objetos. Si el número es múltiplo de 12 eso significa que esa colección de objetos puede repartirse en 12 grupos o cajas donde cada grupo tenga la misma cantidad de elementos aunque no sabemos cuántos.



Si juntamos 4 cajas en un cajón nos quedan 3 cajones. Como en cada caja hay la misma cantidad de elementos y cada cajón tiene 4 cajas entonces cada cajón tendrá la misma cantidad de elementos. Entonces esa colección de cosas se pudo agrupar en tres grupos iguales, entonces el número el múltiplo de 3.



En el ejemplo ya mencionado de trabajo sobre las diagonales del polígono de Balacheff, los alumnos fueron requeridos de producir un enunciado sobre un polígono de n lados y donde se estableciese el número de las diagonales del mismo. Balacheff reconoce como un tipo de prueba, llamado "empirismo naif", la producción de un grupo de alumnos quienes luego de constatar que en un pentágono existen 5 diagonales sostienen que "en un polígono de n lados habrá n diagonales". Su razonamiento reside justamente en la constatación del enunciado para el caso $n = 5$.

Es por esto que, si bien creemos que esta denominada prueba pragmática (del tipo empirismo naif) de Balacheff es útil para el análisis del progreso de las pruebas que los alumnos pueden producir, no vamos a considerarla como una **fundamentación**. Podemos ver que la constatación en el caso $n = 5$ adolece de la falta de generalidad que requiere una fundamentación de un enunciado genérico (es decir realizado sobre o para un conjunto de objetos matemáticos: los polígonos de n lados). Nos alejamos entonces de la definición de prueba de Balacheff en la medida en que él considera a esta explicación como una prueba.

Entendemos que la posibilidad de comprender puede ser justamente la fortaleza de la enseñanza de la fundamentación en el aula por encima de la que pueda aportar la enseñanza de la demostración. En tanto esta última ha sido valorada histórica y preponderantemente por su capacidad de verificación (De Villiers, 1990) en la fundamentación se identifica una función explicativa. Es ésta la función que se quiere recuperar en el aula, en principio, tanto para la fundamentación como para la demostración (Hanna, 2000). Sin embargo pareciera ser que la fundamentación, por dar lugar a mayor flexibilidad y por hacer menos énfasis en aspectos formales, está en mejores condiciones para ello.

Al analizar este vínculo entra la fundamentación y las funciones de comprender, justificar y conocer acordamos con Balacheff (lettre de la preuve, octubre 1999) la impronta cultural de esta tarea.

> "Sugiero que, en efecto, toda transposición didáctica de la prueba en matemáticas toma en cuenta la racionalidad dominante en la sociedad y la cultura en la cual aquella transposición se desarrolla. El objeto de enseñanza que constituye la prueba está marcado no solamente por una concepción epistemológica propia de (y custodiada por) la comunidad científica, sino también por una concepción cultural de la relación con lo verdadero y a la refutación propia de la sociedad y la cultura en la cual se establece el sistema didáctico".

La transposición didáctica tendrá en cuenta entre otros aspectos la búsqueda de situaciones donde la **fundamentación** adquiera un valor de practicidad para lograr el objetivo de convencer, validar, explicar y comprender según el contexto en el que se desarrolle.

3.3.3 Sobre las Fundamentaciones producidas en Situaciones de Validación o refutación de conjeturas

En la presentación acerca del razonamiento deductivo hemos señalado la necesidad de considerar tanto el aspecto de la forma o estructura de estos razonamientos como el contenido de los mismos. Hemos mencionado que tanto Duval como Panizza consideran la dificultad de los alumnos en distinguir estos componentes y en tal caso señalamos la necesidad de considerar a ambos en un proyecto de enseñanza.

A partir de esta necesidad definimos una **fundamentación de tipo deductiva** a un razonamiento con las siguientes características:

a) La forma consiste en una **estructura ternaria**: premisa $\longrightarrow$ resultado o regla de inferencia (función de valor de verdad) $\longrightarrow$ conclusión

b) El **contenido** reviste la adecuación de la premisa a la regla de inferencia que se utiliza. El contenido ofrece herramientas para evaluar si la premisa es aplicable en al resultado o regla de inferencia o bien si la premisa se constituya en un caso particular del resultado.

Estas dos serían las características a considerar para las fundamentaciones deductivas. A esta particularidad le sumamos los elementos que ya hemos desarrollado para todo tipo de fundamentación .

3.3.4 Sobre las Fundamentaciones producidas para explicar procedimientos de resolución de problemas.

En las situaciones en las que los alumnos deben explicar las razones por las que optan por una cierta resolución o desarrollan una cierta técnica deben hacer explícitas las relaciones que establecen entre ciertos conocimientos matemáticos y el contexto en el que se plantea el problema que están resolviendo, de modo de argumentar por qué dichas relaciones describen aspectos del contexto sobre los que intentan responderse alguna cuestión. La consistencia entre los datos que se ofrecen de entrada y los que van obteniendo como resultado de la estrategia que aplican se constituye en estos casos en una herramienta central para fundamentar. En este sentido la tarea de fundamentar es acá esencialmente diferente de la que surge cuando los alumnos deben validar o refutar conjeturas. Ahora bien, en el proceso de análisis de los procedimientos que proponen para resolver una situación pueden emerger sentencias que adquieran el estatuto de conjeturas a validar o refutar. De aquí que, si bien hemos separado estos tipos de fundamentación que se toman como objeto de estudio en este trabajo, los mismos pueden coexistir a raíz de la resolución de problemas que los alumnos deben fundamentar.

3.4 CONDICIONES QUE PUEDEN PROPICIAR LA EMERGENCIA DE LA FUNDAMENTACIÓN

Vamos a señalar a continuación un conjunto de formas que proponemos adquiera el trabajo en el aula que consideramos como condiciones favorables para propiciar la emergencia de la fundamentación en la clase. Algunos escenarios han sido propuestos por diversos autores para la enseñanza de otras cuestiones matemáticas –daremos cuenta de ello – mientras que otros son, hasta donde entendemos, una producción de esta investigación.

3.4.1 El Debate

Duval(1990) sostiene que la argumentación surge ante la necesidad de persuadir a un interlocutor o refutar una tesis, su contexto es la interacción social. También Balacheff, en su estudio sobre la prueba, prioriza la interacción social en varios aspectos. Desde su misma conceptualización la prueba es tal en tanto haya permitido convencer a otro sobre la validez de un enunciado. Balacheff (2000: 34) atribuye al contexto de la dialéctica entre la refutación y la validez un papel especial en el surgimiento de las pruebas.

Kilpatrick et al. (1995) entienden que la discusión y el debate permiten, en su calidad de herramientas para el desarrollo de la comunicación, propiciar una forma distinta de producir conocimiento en el aula, pues cambian la posición tradicional y pasiva del alumno como receptor de la comunicación del conocimiento a la de productor de ideas y también de conocimiento.

El escenario de tal interacción social es diverso. Puede tomar la forma de una producción colaborativa en pequeños grupos y/o también la de un juego de proponentes y oponentes tal como lo plantea Brousseau en sus situaciones de validación. Puede ser un diálogo entre las producciones de los alumnos y las refutaciones de un docente tal y como lo describe Lakatos. Existen otras alternativas, no agotamos la descripción con estos ejemplos.

Es por eso que postulamos que un contexto posible para la emergencia de la fundamentación es el espacio de la clase en un contexto oral de trabajo y más específicamente el escenario del debate. Concebimos tal situación organizada por el docente, mediada por él donde las producciones de los alumnos sean objeto de reflexión. No estamos proponiendo explícitamente –ni necesariamente- una confrontación entre alumnos sino una búsqueda colectiva de las razones que sostienen sus ideas. En tal contexto es posible que los alumnos defiendan sus producciones y se organice un escenario donde deban elegir una posición a favor o en contra de una sentencia. Proponemos el debate como una actividad de la comunidad matemática "aula" que pondrá en evidencia el rol de los alumnos como productores de fundamentaciones.

En un escenario de debate la TS concibe las situaciones de prueba (hemos mencionado en este capítulo en la sección Generalidades, que la TS concibe tres tipos de situaciones: acción, comunicación y prueba). En ellas el sujeto tiene como objetivo validar y/o justificar una afirmación. Las situaciones se caracterizan por una organización donde un alumno defenderá una propuesta en tanto que otro, el oponente, intentará refutarla. Encontramos raíces históricas para esta situación mencionadas por Klimovsky en su relato sobre los orígenes de la lógica. Rastreando prácticas vinculadas al surgimiento de la lógica, el autor describe un tipo de certamen público celebrado en plazas de la ciudad de Atenas hacia el siglo V. AC. En dichos eventos dos oponentes acordaban sostener, uno de ellos y refutar, el otro, cierta afirmación (no matemática por cierto). Es por ello que "lo que estaba en juego no era específicamente el "amor a la verdad", pues bien podrían haber sostenido cada uno la tesis opuesta, sino decidir quien era capaz de dar una suerte de "jaque mate lógico" al adversario" (Klimovsky, 1994: 85). Cada uno de ellos buscaba en su rival un error de tipo argumentativo o incluso intentaba mediante una trampa lógica o lingüística llevarlo hacia una contradicción y de esta forma vencer demostrando sus habilidades argumentativas y discursivas.

Las situaciones de prueba descriptas en la TS son portadoras del mismo espíritu, siendo que un alumno (o un grupo) tomará una posición a favor de una afirmación en tanto que otro lo hará por la refutación; el foco de esta actividad se ubica entonces en las herramientas discursivas puestas en juego y la búsqueda de la verdad se ubica en un segundo plano.

En nuestra propuesta del debate el foco estará puesto en la búsqueda de la verdad tanto como de las razones que nos proveen la certeza sobre el hecho que analizamos. En tal sentido la clase como un todo, lo que hemos llamado la **comunidad clase** o también **comunidad aula** tomará libremente posiciones de acuerdo a sus propias convicciones, creencias, conocimientos y posibilidades discursivas dentro de la matemática.

Eventualmente, surgiendo posiciones encontradas se generarán espontáneamente estas situaciones de prueba estudiadas por la TS.

3.4.2 La Modelización

El planteo de problemas que toman como referencia situaciones "reales"[58] para que los alumnos elaboren modelos que las representen provee oportunidades para la producción de fundamentaciones. En situaciones en las que el contexto exige recortar las herramientas matemésitca puestas en juego y condiciona el uso que se puede hacer de las mismas los alumnos deben confrontar sus hallazgos a la pertinencia definida por tal contexto. Contextualizar y descontextualizar son escenarios propicios para la emergencia de fundamentaciones que den certidumbre a los hallazgos de los alumnos.
Bajo este encuadre la producción de problemas abiertos (nos referimos con esto a problemas donde los datos presentados a los alumnos permitan la convivencia de más de una solución, o bien, dicho de otro modo, la falta de datos propicie no solo la incertidumbre respecto del problema en sí mismo sino también la creación de más de una solución para el mismo problema) constituye una oportunidad para la confrontación en clase de distintas posiciones de los alumnos.

Ambas razones han sido la base en las que nos apoyamos para comenzar la actividad en clase con problemas con contexto. Estos problemas propiciarán la emergencia de aquellas fundamentaciones que hemos caracterizado en el nivel de situaciones problemáticas donde la actividad principal será la de explicar procedimientos de resolución de problemas o de manipulación de técnicas.

3.4.3 La Oralidad

La discusión en clase es un escenario mencionado reiteradas veces en el trabajo de Kilpatrick et al. "Thinking Through Mathematics" a raíz de la propuesta de diferentes actividades tales como producir un modelo para el funcionamiento de un problema, analizar distintas producciones realizadas por otros alumnos para decidir si ellas son

---

58 Es decir, situaciones que evocan hechos que podrían suceder en diferentes contextos.

correctas resoluciones de problemas o encontrar su falla, resolver problemas planteados por el docente, etc.. Señalan los autores que el trabajo con pares es disparador de un conjunto de habilidades que trasciende lo puramente matemático pues entre pares la discrepancia surge naturalmente y a partir de ella la necesidad de acordar posiciones se hace evidente, además genera en los alumnos un mayor involucramiento que la clase convencional (Kilpatrick et al, 1995: 10). Esta dinámica de trabajo – la discusión desarrollada en la oralidad - se ensambla luego con otras y en tal sentido los autores la consideran como una fase de trabajo que motoriza la participación y el involucramiento de los alumnos.

Debemos señalar sin embargo que el trabajo oral con características como las descriptas entra en conflicto con algunas prácticas muy arraigadas en el dispositivo escolar como lo son el control y la necesidad de evaluar de manera más o menos inmediata los efectos de las acciones que se desarrollan. Notemos además que se trata de una actividad que requiere mucho tiempo de clase y acerca de la cual no quedan huellas escritas (carpetas, trabajos prácticos entregados, etc.) que den testimonio de lo realizado. Agreguemos que en la actividad oral puede haber alumnos que nunca tomen la palabra frente a los cuales el docente puede encontrarse sin recursos para que modifiquen esta actitud.

Por otra parte, imaginando una actividad intensa y un nivel alto de participación de los alumnos el docente necesita una gran ductibilidad y rapidez para: escuchar y comprender las intervenciones de los alumnos, decidir cómo utilizarlas y qué destino darles y no perder de vista el objetivo ese momento de trabajo[59]. Es arto difícil que el docente cuente con tiempo para la reflexión en el transcurso del desarrollo de la actividad oral.

En esta investigación planteamos la oralidad como el escenario más adecuado para la emergencia de la fundamentación, entendiendo que en esta actividad participa toda la comunidad clase en distintas fases, siendo una de ellas el trabajo en pequeños grupos con la presencia esporádica del docente en tanto otra será la fase de puesta en común de toda la clase. Estas actividades están articuladas con un proceso de escritura que las coordina y las retroalimenta.

[59] En su trabajo "El diálogo en la enseñanza" Burbules (1993,13) manifiesta que el diálogo, es un enfoque de la enseñanza que exige flexibilidad, capacidad de adaptación y discernimiento.

3.4.4 Certeza E Incertidumbre

Balacheff menciona en su trabajo sobre la prueba que la variable "riesgo" tiene influencia sobre la certeza que creemos tener respecto de algún hecho[60]. La relación pareciera ser inversamente proporcional: mayor es el riesgo menor es la certeza que sentimos y esto dispara nuevos mecanismos de validación. En esta investigación sostenemos que la incertidumbre que puedan suscitar los problemas que los alumnos tengan que resolver será una forma efectiva de propiciar la emergencia de fundamentaciones en el aula y en tal sentido postulamos que los problemas abiertos (con más de una solución) son generadores de incertidumbre en la medida que alojan la posibilidad de distintas producciones[61].

Por otra parte creemos a partir de esta experiencia que la búsqueda de certeza puede estar motivada por el interés en el desafío intelectual que se suscita en una clase donde se señale el papel protagónico de los alumnos en la producción de conocimiento. En este sentido avanzamos sobre la sentencia de Balacheff "otra motivación (de procesos de validación) es el deseo de certitud, cuya presencia no está determinada por ningún factor" (Balacheff, 2000: 19). Encontramos en el proceso de desarrollo de esta investigación que los estudiantes, en la medida en que tienen herramientas para trabajar, e interlocutores para disentir, acordar, convencer, consensuar, son "atrapados" por la dinámica del intercambio intelectual.

Seguramente el aspecto cultural que el mismo Balacheff menciona y que hemos citado ya (ver el apartado ¿qué significa enseñar a fundamentar?) explique este posicionamiento.

[60] Balacheff presenta la metáfora de Popper sobre la autenticidad de unas monedas de pocos centavos para dar cuenta de la fluctuación en el nivel de confianza que un sujeto puede tener sobre un hecho en la medida que tal hecho queda atado a otras situaciones de mayor o menor importancia. Puntualmente Balacheff muestra que los mecanismos que utilizaría el sujeto para corroborar la autenticidad de las monedas se incrementarían si de ello dependiera, por ejemplo, la vida de un hombre. Esos mecanismos aludidos constituyen procesos de validación.

[61] Kilpatrick (ibid., 46) señala por su parte que la actividad de entregar a los alumnos resoluciones realizadas por alumnos de otros colegios con la consigna de validar las respuestas o encontrar los errores en las explicaciones propuestas es también un escenario propicio para generar incertidumbre. No hemos desarrollado en nuestra investigación esta propuesta pero creemos importante mencionarla.

3.4.5 Tiempo didáctico

Numerosos autores han analizado el funcionamiento del tiempo didáctico en la institución escolar. Tomaremos en este punto como referencias las producciones de Chevallard (1985), Mercier (1997) y Sensevy (1998, 2007). La idea de tiempo didáctico –analizan Chevallard y Mercier- nace de la necesidad de organizar la enseñanza de cada asignatura en un "programa" que asigna un tiempo predeterminado a cada "unidad" de una cierta disciplina.

> "Tel est donc le probème: voici le savoir a enseigner; voici le temps disponible. Le temps didactique naîtra de leur rencontré réussie" [62]

Para que esta asignación de tiempos pueda cumplirse, el *texto* a ser enseñado está establecido *a priori* de manera independiente de las ideas que los alumnos puedan elaborar sobre el mismo, lo cual los excluye –obviamente- de participar en su conformación. Este ha sido históricamente el funcionamiento del dispositivo escolar y el análisis de los autores citados nos ayuda a tomar conciencia hasta qué punto la inclusión de los alumnos en la producción del conocimiento que se enseña supone una ruptura cultural profunda respecto de las prácticas escolares.

Hemos mencionado en el comienzo de este capitulo que la TS concibe el aprendizaje a partir de un conjunto de fases de trabajo que - inscriptas en las situaciones didácticas - se desarrollan comenzando con actividades donde el alumno produce un conjunto de relaciones ante la resolución de un problema que utiliza sin hacerlas explícitas necesariamente, la TS conceptualiza este uso bajo la denominación de **teoremas en acto**. Las relaciones producidas y utilizadas - posiblemente implícitamente - se van transformando a partir de fases posteriores de trabajo donde será necesario recomponerlas, traerlas nuevamente a escena junto con validaciones o reformulaciones de las mismas en un proceso que implica la explicitación de tales relaciones y conocimiento. Todo este proceso rompe con la estructura lineal del tiempo: el alumno avanza y retrocede y necesita para ello evocar las relaciones producidas. Brousseau y Centeno (1991) introducen el concepto de Memoria Didáctica para señalar la necesidad de apelar a la evocación de

[62] "Tal es el problema: aquí el saber a enseñar; aquí el tiempo disponible. El tiempo didáctico nacerá de su encuentro exitoso" (Chevallard y Mercier, citado por Sensevy, 1998).

situaciones en las que los alumnos han tenido un papel productor, para ayudarlos a poner en acción algunos conocimientos necesarios para enfrentar una problemática nueva. Cuando los estudiantes no han sido productores las referencias que el docente puede hacer al pasado de los alumnos consisten centralmente en evocar los nombres de los objetos más que las condiciones en las cuales los alumnos aprendieron. En esos casos la enseñanza –dicen Brousseau y Centeno- se transforma en un sistema sin memoria (ya que no se apela a lo efectivamente ocurrido en la clase sino a lo culturalmente establecido fuera de ella). Resulta entonces que la construcción de una memoria de la clase que pueda constituirse en un referente para producciones futuras de los estudiantes depende de las oportunidades que hayan tenido de ubicarse en una posición de producción.

Marie-Jeanne Perrin Glorian (1993) avanza en el estudio de situaciones que apelen a la historia de producción de la clase. Es así como identifica un tipo de situaciones que llama "de evocación" (*'de rappel')* en las que el docente propone recordar una o varias situaciones ya tratadas sobre un tema y reflexionar sobre ellas sin realizarlas nuevamente. De esta manera –analiza la autora- se apunta a fortalecer los procesos de despersonalización y descontextualización de conocimientos. A partir de esta evocación los alumnos son convocados a recuperar el sentido y el estatuto de los conocimientos en juego en las situaciones realizadas. M. J. Perrin Glorian distingue dos tipos de situaciones de evocación: las que evocan una situación de acción, no inmediatamente después de realizada sino otro día, y las que se refieren a una serie de problemas sobre un tema, que ha abarcado un período prolongado de tiempo.

Al verse confrontados a la necesidad de hablar sobre lo hecho sin volver a realizarlo, las situaciones del primer tipo, ofrecen la oportunidad de reconstruir, para quienes no lo han hecho en el momento de la acción, el papel que tienen para el aprendizaje los problemas abordados. La reflexión que se realiza contribuye a la despersonalización de las soluciones en la medida en que éstas son retomadas y expuestas por alumnos que no necesariamente intervinieron en su producción; también se favorece un proceso de descontextualización dado que al retomar en frío la situación, comienzan a dejarse de lado los detalles para centrarse en las cuestiones más importantes.

Las situaciones del segundo tipo, apuntan a integrar una serie de problemas en un proceso que se interioriza con un nuevo sentido. Al establecerse relaciones entre diferentes situaciones, se produce una articulación entre viejos y nuevos conocimientos.

Entendemos que para el caso que nos convoca de la enseñanza de la fundamentación es necesario considerar la posibilidad de volver sobre las prácticas y de evocar conocimientos producidos en otro momento para revisar las explicaciones ya producidas en distintos contextos de trabajo y reformularlas otorgándoles cada vez mayor generalidad. La memoria de la clase aparece así como un componente sustantivo de las fundamentaciones que van emergiendo.

3.5 LA FUNDAMENTACIÓN Y EL CONTEXTO DE TRABAJO DEL AULA

Hemos planteado un encuadre de la fundamentación donde priorizamos la búsqueda de explicaciones que promuevan el entendimiento por parte de los alumnos frente a las posibles formalizaciones[63]. Las fundamentaciones surgirán para dar cuenta de la posición de un cierto alumno, para dar fuerza a la afirmación de otro alumno, para convencer a un compañero de la veracidad de una sentencia.

El carácter social de la fundamentación, en tanto explicación dirigida a otro, que ya hemos mencionado en el apartado sobre la Fundamentación y sus características, nos conduce a imaginar que el contexto del aula es el propicio para estudiar su emergencia. En tal sentido la comunidad de referencia para las fundamentaciones es la propia **comunidad aula**.

Si bien ya hemos mencionado este hecho queremos volver a él en este punto pues deriva de esta concepción de la fundamentación algunas precisiones para la actividad en el aula.

La **comunidad aula** designa por un lado una comunidad de pares que emula algunos aspectos de la comunidad matemática (la de profesionales del campo disciplinar) en tanto

[63] Muchos autores han señalado que la búsqueda del formalismo suele preocupar más a los estudiantes que la búsqueda de explicaciones (tal el ejemplo de Balacheff sobre las diagonales del polígono comentado al respecto de los aspectos formales en Raman, (2002:12)) llegando a ver incluso en explicaciones erróneas pero dotadas de un cierto formalismo una explicación valedera. Creemos que considerar a un argumento como formal o no formal depende de quien es el interlocutor para ese argumento. De todos modos, más allá del interlocutor, entendemos que la presentación de formalismos carentes de significado es en parte consecuencia de una práctica muchas veces empleada en el aula que consiste en mostrar en acto la actividad de demostrar y esperar que los alumnos procedan a su aprendizaje mediante el ejercicio de la imitación (ver, en este capítulo "La Demostración"). En tal sentido proponemos para la enseñanza de la fundamentación un recorrido distinto a este que mencionamos, ya que consideramos momentos de producción de fundamentaciones y de reflexión sobre las mismas producciones donde se ponga en evidencia para toda la comunidad aula, mediante el análisis, los elementos constitutivos de las mismas.

que entendemos que durante el proceso de fundamentar la comunidad está buscando una explicación que, en función de sus conocimientos, resulte plausible. Concebimos al docente en este modelo como parte de esta comunidad y en tal condición, creemos que tendrá que autorregular su **asimetría de conocimientos** y redefinir el modo en que históricamente se concibió la **autoridad** en la institución escolar para dar lugar a un genuino intercambio intelectual[64]. Es ese modo en que se configuró en las prácticas escolares la autoridad del docente con relación al conocimiento el que habilitó la posibilidad de que pudiera hacer afirmaciones frente a los alumnos sin que necesariamente se viera exigido de justificarlas frente a ellos. Es claro que la sola referencia a la autoridad intelectual del docente como fuente de verdad no contribuye a la emergencia de prácticas fundamentadas por parte de los estudiantes. Estas nociones de autoridad y asimetría son tratadas por Burbules[65] (1993) al analizar los posibles roles del diálogo en la clase.

Al mismo tiempo estas dos cuestiones: la autoridad y la asimetría de conocimientos están presentes en la TS en las nociones de: **contrato didáctico** (en términos de cuáles son las expectativas de los alumnos respecto de las sanciones docentes y cuáles son las del docente mismo) y de **devolución** (que alude a las responsabilidades que el docente tomará por su cuenta o dejará en manos de los alumnos). Entendemos que estas semejanzas encontradas en distintos encuadres teóricos se deben a la coincidencia de ambos en el propósito de reflexionar sobre condiciones que entreguen la responsabilidad de la producción de ideas a los alumnos generando un genuino cambio en la posición del estudiante en clase (una clase genérica para Burbules y necesariamente matemática para la TS) desde una posición de pasiva dependencia hacia una de autonomía intelectual.

La comunicación que sostenga esta comunidad será una herramienta para producir fundamentaciones, pero las fundamentaciones trascienden el acto de la comunicación[66]. En

---

[64] La autoridad que la institución escolar confiere al docente tiene distintas dimensiones. Nos interesa aquí considerar una dimensión disciplinar en referencia a su conocimiento de la matemática. Reconocemos otras dimensiones, aunque no las abordaremos, como por ejemplo la social en referencia a su rol de adulto en la clase.

[65] El diálogo es, para Burbules, "una actividad dirigida al descubrimiento y a una comprensión nueva que mejora el conocimiento, la inteligencia o la sensibilidad de los que forman parte en él". (ibid, 32). En este sentido este "diálogo" se constituye en una relación pedagógica que da una forma específica a la situación de aprendizaje priorizando la elaboración de preguntas y explicaciones con el fin de conocer. Este es para nosotros un punto de encuentro con este autor.

[66] Preocupados por la emergencia de la fundamentación en esta investigación buscamos describir condiciones que la propicien. Una de ellas, ya mencionada es la oralidad y por eso hablamos aquí de la comunicación. Pero se trata de una comunicación orientada a convencer, a clarificar, a hacer inteligible, a justificar, operaciones todas que dan lugar a la producción de nuevas relaciones. En este sentido, entramada con la función de comunicación hay una función epistémica tanto en las fundamentaciones orales como en las producciones escritas que puedan tener lugar. No obstante entendemos que la fundamentación se puede continuar trabajando en otros contextos como la producción escrita, tal como lo ha hecho Duval. Es por eso que mencionamos que la fundamentación puede trascender el contexto de la comunicación, es decir, que no se

tal acto de comunicación se pondrán en juego los distintos conocimientos y capacidades discursivas de los alumnos y sus distintas comprensiones y en tal proceso de interacción se construirá una fundamentación que de cuenta del entendimiento de la comunidad.

Ahora bien, la necesidad de fundamentar estará sostenida por el tipo de actividad que se promueva en el aula. Esta actividad estará enmarcada en las situaciones problemáticas que se presenten pero no alcanzará la presentación de enunciados a los alumnos para convocarlos a la esfera de las "prácticas fundamentadas". La presencia, intención e intervención del docente es, postulamos, una condición necesaria para la emergencia de la fundamentación.

En el contexto que vamos a tomar en cuenta el docente se encontrará a veces en la necesidad de sancionar qué se reconoce como una explicación aceptable y que queda fuera. Tal sanción no desconocerá la posición de los alumnos. Postulamos que será necesario generar con los alumnos acuerdos provisorios que vayan modelando que es lo que la comunidad clase comprenderá y aceptará como una fundamentación[67]. Sostenemos en esta investigación la necesidad de la presencia docente en esta instancia[68].

En muchos textos[69] cuando se menciona las dificultades en el aprendizaje de diversos modos de razonamiento (en el razonamiento deductivo, en el reconocimiento de razonamientos válidos, y otros) las dificultades del aprendizaje se analizan a partir de los errores de los alumnos. Creemos que los errores de los alumnos dan cuenta de lógicas que los ellos elaboran en su proceso de construcción del conocimiento y no pueden interpretarse descontextualizados sin tener en referencia el proyecto de enseñanza porque se desconocen de este modo las condiciones de aprendizaje en las que se generaron. En

agota en esta circunstancia. Reconocemos que la fundamentación podría ser a su vez un contexto para desarrollar la comunicación en clase pero no es éste el objetivo de nuestro trabajo. Cabe la posibilidad de pensar estas actividades (fundamentar y comunicar) como dialécticas pero no lo abordaremos de este modo.

67 No deseamos que cualquier explicación tenga el nombre de fundamentación ya que esperamos que, mediante esta actividad, la de fundamentar, los alumnos tengan una primera aproximación escolar hacia la actividad de demostración.

68 A la vez el docente necesita sostén para validar producciones de sus alumnos que no tienen la transparencia de las sentencias de la matemática. El trabajo docente comienza a alejarse de la matemática como única referencia y se acerca al plano didáctico. El docente también opera en situación de incertidumbre.

69 Duval (2002: 73) menciona una lista de trastornos/dificultades en el aprendizaje del razonamiento deductivo tales como, confusión entre hipótesis y conclusión, entre un enunciado y su recíproco, falta de control en la verificación de las condiciones necesarias para aplicar un teorema, reducción en la concepción de un razonamiento a un conjunto de enunciados unidos por conectores, imposibilidad de detectar saltos en el razonamiento.

este trabajo hacemos explícito el proyecto de enseñanza y en primer plano: la tarea docente. A partir de la descripción de ambos podrá verse cuáles son "los posibles" para esta actividad de fundamentar.

La TS plantea como condición necesaria para el aprendizaje que el alumno pueda hacerse cargo de la responsabilidad intelectual de aquello que se le propone. En este aspecto los alumnos que no entienden la necesidad de fundamentar o de demostrar o de validar una respuesta individual están dando muestra de que esta primera fase necesaria en la tarea de enseñanza no se ha producido. Una pregunta que este trabajo intenta abordar es cómo comunicar esta necesidad.

3.6 LAS INTERVENCIONES DOCENTES

Las investigaciones sobre razonamientos argumentativos y deductivos realizadas por Duval recortan el problema del aprendizaje de los mismos de forma tal que no aparece la figura del docente. La enseñanza del uso de grafos – que subrayan las conexiones entre proposiciones y conclusiones - surge como una herramienta eficaz para superar las dificultades en la comprensión de estos razonamientos. Tal herramienta se instala de algún modo (no relatado por Duval en su texto) en el aula y ésta permite a los alumnos reconocer la estructura del razonamiento deductivo. La investigación da cuenta de los avances de los alumnos aunque no explicita las características de las intervenciones docentes.

Del mismo modo Balacheff (1987, 2000) en su trabajo sobre prueba analiza la dimensión social de la misma, el funcionamiento de la conjetura y de la comunidad de pares para aceptar las pruebas. El lector no puede apreciar la forma en la que el docente es concebido en la dimensión social ni puede precisar el accionar docente en el aula.
No obstante en su trabajo de 2000 a propósito de comprender las implicancias que un trabajo sobre refutaciones al estilo Lakatos pudiera tener en los alumnos, Balacheff sostiene que la presencia de una refutación (que él denomina una contradicción) podría tener múltiples consecuencias en el trabajo de los alumnos, no siempre las esperadas. En este sentido el autor menciona que así como una refutación puede poner en cuestionamiento

una conjetura así también puede poner en cuestionamiento el conjunto de conocimientos en los que el alumno se está apoyando, la prueba que él puede haber formulado e incluso puede también cuestionar la propia refutación. Recién en este momento Balacheff considera el posible accionar docente, pues estaría en manos del docente la producción de estas refutaciones.

> "Las intervenciones del profesor y su gestión del contrato didáctico serán muy seguramente elementos determinantes para que el cuestionamiento de los conocimientos, y especialmente de los fundamentos racionales de la conjetura, sean considerados pertinentes en la presentación de un contraejemplo". (2000: 34).

Esta mención a las posibles consecuencias de determinadas intervenciones docentes nos invita a plantearnos que el accionar docente podría pensarse formando parte del milieu-medio para la emergencia de la fundamentación. Es decir que en la actividad de fundamentar existen retroacciones a las propuestas de los alumnos que pueden estar en manos del docente en tanto uno de los integrantes de la comunidad clase. Tomamos en cuenta que en ciertas circunstancias otros estudiantes podrán confrontar y retroalimentar las explicaciones desarrolladas por uno de ellos pero en otras estará en manos del docente la retroacción. Además las refutaciones del docente vienen imbuidas de su autoridad[70] y ésta es diferente de la de los estudiantes (que sabemos tampoco son idénticas entre sí). Siendo estas autoridades distintas la consideración de las intervenciones como retroacciones a una cierta producción también lo será.

Con esta idea, tomamos en cuenta la evolución de la TS a lo largo de estos años, para hacer una lectura crítica de la forma en que las investigaciones, a las que nos referimos, han considerado (o no lo han hecho) al docente. Necesitamos mencionar que, naciendo a mediados de los 70, la TS comenzó un desarrollo importante entre los 80 y los 90. Por entonces la teoría concebía que "las situaciones didácticas eran las situaciones que sirven para enseñar sin que se considere el rol del profesor" (Brousseau, 2007: 17). Esta modelización de la enseñanza fue evolucionando, gracias al aporte de un importante número de investigaciones que han dialogado con la teoría y la han ido enriqueciendo al mismo tiempo, hacia una concepción, la actual, en la que "la situación didáctica es todo el entorno del alumno, incluidos el docente y el sistema educativo" (ibid., 18).

[70] Como ya hemos señalado en el apartado 3.5, nos referimos acá a un tipo de autoridad que considera al alumno como intelocutor intelectual y en este sentido es esencialmente diferente de los modos históricos en los que se concibió la autoridad del docente en la institución escolar.

En esta investigación, estudiamos la emergencia de una forma de trabajo en la clase de matemática. A diferencia de un importante número de investigaciones dentro del marco de la TS no estudiamos la construcción de un conocimiento (matemático) por parte de los estudiantes, sino la emergencia de un tipo de prácticas (la fundamentación) en la clase de matemática. De todos modos –no podría ser de otra manera- estudiamos las prácticas de fundamentación que emergen a raíz del trabajo sobre un cierto campo conceptual (en nuestro caso el de la función exponencial) y asumimos que para que la fundamentación de las ideas sea posible es necesario que el objeto de estudio específico esté cargado de sentido para los alumnos al tiempo que sostenemos que la fundamentación sobre las prácticas carga de sentido a los objetos de estudio. En otros términos el trabajo sobre la fundamentación a propósito de un concepto matemático requiere que ese objeto esté dotado de sentido para los alumnos y provee de sentido a ese concepto. Desde esta perspectiva nuestra referencia a la TS es doble: como marco para estudiar la emergencia de prácticas fundamentadas y como marco para estudiar la enseñanza de un cierto campo de ideas (las vinculadas a la función exponencial)[71].

Nuestro estudio se enmarca entonces en el espectro de investigaciones de didáctica sobre la emergencia de una noción desde la perspectiva que explicita Brousseau:

> Los estudios concretos de la teoría de las situaciones indican en qué condiciones precisas la enseñanza de tal noción es posible y bajo qué forma, e indica asimismo que esas condiciones nunca son extremas. La conclusión es casi siempre la siguiente: las intervenciones didácticas son *regulaciones* destinadas a mantener equilibrios, más que a producir directamente efectos, y esas regulaciones son específicas de la noción matemática (ibid., 17)

Elegimos estudiar las interacciones entre docente y alumnos que apuntan a la emergencia de fundamentaciones haciendo foco en el accionar del docente. Es por eso que hablamos de "intervenciones docentes". Como ya hemos dicho, creemos posible considerar que el objeto **milieu** de la TS puede estar compartido por las situaciones problemáticas y por ciertas intervenciones del docente. Estamos imaginando un docente que no se aparta de la escena de interacción alumnos-situaciones problemáticas. Desarrollamos a continuación esta propuesta.

[71] Del mismo modo las investigaciones de Balacheff sobre la prueba que también está en las esferas de la práctica se enmarca en la TS. Pedemonte, Barallobres y otros también utilizan el marco de la TS en el estudio de prácticas de la matemática tales como la demostración y o la validación.

Sadovsky y Sessa (2005: 86) sostienen que el concepto de *milieu* incluye "tanto una problemática matemática que el sujeto enfrenta, como un conjunto de relaciones, esencialmente también matemáticas, que se van modificando a medida que el sujeto produce conocimientos en el transcurso de la situación, modificando en consecuencia la realidad con la que interactúa" [72]. La descripción de la situación adidáctica en la que el alumno se enfrenta al milieu requiere, en términos de las autoras, de la identificación de dos interacciones: las del alumno con el milieu y las del docente con el alumno. Sobre ellas explicitan:

> "Las interacciones entre docente y alumno a propósito de la interacción del alumno con el *milieu* se describen y se explican a través de la noción de contrato didáctico. Esta herramienta teórica da cuenta de las elaboraciones con respecto a un conocimiento matemático en particular, que se producen cuando cada uno de los interlocutores de la relación didáctica interpreta las intenciones y las expectativas –explícitas e implícitas- del otro, en el proceso de comunicación. Los dos tipos de interacciones – sujeto/milieu y alumno/docente- que se separan en el análisis teórico, constituyen una trama en la cual se inscriben los procesos personales de aprendizaje".

Para realizar esta descripción se parte del supuesto de un milieu inicial, en el que el alumno encuentra resistencias y retroacciones. En la problemática de la fundamentación, su enseñanza y su aprendizaje, creemos que el espectro de producciones posibles por parte de los alumnos es de una dimensión tal que es poco probable diseñar un milieu que responda a todos ellos prescindiendo de toda intervención del docente. Consideramos, del mismo modo que Hersant y Glorian (2005: 117), que las situaciones que hemos diseñado con los docentes tienen cierto potencial adidáctico[73]. Al mismo tiempo y con respecto a la amplitud de producciones, creemos que aún teniendo en cuenta el análisis previo del docente (en este caso en el taller pero en la práctica usual generalmente solo) la complejidad que alcanza la enseñanza, en la medida que nos situamos en niveles superiores de enseñanza, hace mucho más rico y diverso el espectro de posibles producciones de los alumnos y en tal caso la figura del docente surge como necesaria para maniobrar en tal contexto.

[72] Como venimos sosteniendo, la práctica de la fundamentación es intrínsecamente social: la comunidad clase (o parte de ella) *reacciona* frente a una cierta producción a partir de la cual los autores de dicha producción pueden transformar sus ideas; es decir, el milieu de un sujeto se transforma por las reacciones de los otros a su propia producción.

[73] Como señalan las autoras "esto significa que existe un milieu, que provee algún tipo de feedback sobre las acciones de los estudiantes, pero que tal feedback puede ser insuficiente para que los alumnos produzcan nuevo conocimiento por si mismos". En este caso no estamos analizando un conocimiento disciplinar sino una práctica. Insistimos en la aclaración .

Es por eso que concebimos[74] algunas intervenciones docentes como parte del milieu en tanto que otras serán las interacciones descriptas por Sadovsky y Sessa bajo la denominación de "interacciones docente-alumnos" y se inscriben en el concepto de devolución.

De este modo, este docente que imaginamos no se abstiene, por lo tanto, de intervenir en esta fase de interacción alumnos – problemas. Sin embargo sus intervenciones están sometidas a un control (que ya mencionamos y que está destinado a autorregular su asimetría) y a una constante devolución a los alumnos del problema en cuestión.

La intención (que trabajamos con las profesoras en la fase del taller) del docente, en la primera fase de trabajo en pequeños grupos, es por un lado, la devolución a los alumnos del problema (lo que no siempre se alcanza con homogeneidad en una clase). Por el otro, a partir de algunas producciones y mediante la interacción docente-alumnos, la intención será la de generar nuevos "desequilibrios" para que los alumnos, (a partir de la reflexión sobre el trabajo de resolución en los pequeños grupos) al resolverlos, puedan hacer evolucionar dichas producciones. Entendemos, por lo tanto, al docente como un regulador de la situación didáctica.

Las posibilidades de la intervención docente nos remiten a la noción de contrato didáctico - como ya lo hemos mencionado - pues la participación docente se apoya en las expectativas que los docentes tienen respecto de sus alumnos y de qué es posible para ellos, en tanto también se apoyan en las propias producciones de los alumnos quienes elaboran y construyen ideas y resoluciones y las fundamentan apoyados en concepciones personales sobre qué es lo que se espera de ellos y qué queda en manos del docente.

Es decir que ambos tienen una serie de expectativas respecto del área de incumbencia del otro (el alumno espera tal vez que el docente sentencie la pertinencia o adecuación de una fundamentación, en tanto el docente espera que el alumno controle sus producciones y desee encontrar le mejor explicación posible, o tal vez incluso no espere que sus alumnos estén en condiciones de entrar en el juego intelectual de las pruebas y refutaciones).

[74] La concepción de tales intervenciones pasó entonces por una dimensión más teórica y formal y luego por una concepción del orden de la práctica en el momento de pensar junto con los docentes –durante el taller - cómo podrían ellos intervenir frente a ciertas posibles producciones de los alumnos.

Las intervenciones docentes viven en el aula recreando este contrato que nunca es explícito (respecto del conjunto de obligaciones y derechos que cada parte cree tener y que cree también tiene la otra), pero también modificando otros contratos precedentes, y de este modo, dándole claridad a los aspectos de este nuevo que difieren del conjunto de reglas que han vivido previamente en la clase de matemática. La noción de contrato didáctico permite de este modo interpretar la actividad en el aula.

En este sentido estaremos observando al docente. Más aún, nos proponemos estudiar las intervenciones docentes de forma tal de configurar modos de intervención que dan cuenta de objetivos para la enseñanza que fueron analizados en los talleres donde se conformó una intención a través del proceso de planificación compartida. Dicho de otro modo, en esta investigación el taller fue un espacio de configuración de la actividad de las docentes por cuanto se realizó allí la producción del material a llevar a las aulas con una modalidad de trabajo. Habiendo discutido en tal espacio los objetivos alcanzables en términos de un conjunto de condiciones-restricciones (los alumnos, el tiempo disponible, la necesidad de evaluar, el tamaño de los cursos, el currículo a desarrollar en el año escolar) entendemos que cada docente conformó para sí mismo una intención, atravesada por concepciones personales relativas a su forma de imaginar su gestión de la clase y, por lo tanto, no homogéneas. Observaremos sus intervenciones proponiendo interpretarlas a la luz de las intenciones forjadas en el taller. También intentaremos dar cuenta del sentido que ellas pueden adquirir para los alumnos a propósito de su proceso de aprendizaje de la actividad de fundamentación.

Como hemos mencionado en el Estado del Arte de este trabajo, Hersant y Glorian señalan que en las clases de la escuela media de Francia los docentes han reemplazado las viejas prácticas de "exposición-ejercitación" por "clases dialogadas" que se caracterizan por interacciones cortas entre docentes y alumnos. Las autoras entienden que estas prácticas son una forma en la que los docentes responden a un cambio de paradigma para la enseñanza (de la mano del constructivismo) que no pueden llevar "efectivamente" al aula.
En nuestra investigación, esta forma de trabajo que no fue explícitamente formulada y analizada durante el taller, ha sido también una alternativa de gestión en el aula que las docentes propusieron y llevaron adelante a partir de la formulación de la secuencia a poner en práctica. Si bien parte de estas actividades era habitual para ellas (la disposición en pequeños grupos, la discusión en fases colectivas de trabajo) la forma y características que

tomaron sus intervenciones fueron propias de esta experiencia (tal y como lo expresaron las mismos docentes en los talleres finales luego de haber finalizado la experiencia en aulas). En tal sentido creemos que el análisis de sus intervenciones será un aporte sustantivo de esta investigación.

Analizaremos las intervenciones docentes teniendo en cuenta tres esferas o dimensiones:

a Operaciones de transformación que el docente realiza a partir de las producciones de los alumnos:

  i Si promueven una re-elaboración de las producciones de los alumnos.
  ii Si ofrecen herramientas para que los alumnos se cuestiones sus producciones
  iii Si completan, enriquecen o cuestionan las producciones de los alumnos.
  iv Si las reelabora o las retoma a la luz de otras cuestiones o preguntas
  v Si las reutiliza para contestar otras preguntas.

b Acciones dirigidas a promover interacciones entre alumnos: en esta esfera privilegiamos el aspecto social de la actividad de fundamentar,

  i Si intentan promover la colaboración entre los alumnos.
  ii Si tienen como propósito confrontar distintas posiciones elaboradas entre distintos grupos de alumnos

c Interveniocnes directamente relacionadas con el análisis de las fundamentaciones: en esta dimensión consideramos operaciones del orden de lo metamatemático,

  i Si realizan junto con los alumnos un análisis de las producciones en términos de la forma que adquiere una fundamentación.
  ii Si reconstruyen la génesis de la producción de la fundamentación.

3.7 LA INTENCIONALIDAD DEL DOCENTE

Entendemos que el docente llega al aula con un proyecto, parcial o completamente acabado en el que existen un conjunto de premisas que él respetará como condición sine qua non o tal vez se permita a sí mismo pequeños permisos para pasar por alto algunas de ellas. Dichas premisas corporizadas en su intencionalidad tienen consecuencias en su gestión de clase. Esta intencionalidad puede ser tan implícita como el mismo contrato didáctico, pero puede también explicitarse y modificarse a lo largo de un proyecto de enseñanza. Para que ello ocurra es necesaria la discusión con pares, el conflicto, el disenso, diferentes perspectivas que permitan desnaturalizar la propia. Un gran espectro de preguntas pueden servir de disparador para producir la emergencia de estas premisas. El docente puede desear una clase ordenada, una clase sin ruidos, una clase sin conflictos. El docente puede considerar indispensable que todos y cada uno de sus alumnos alcancen un cierto nivel de comprensión de las nociones que se están enseñando, o puede considerar que siendo los tiempos individuales de gran diversidad este recorrido se logrará en el mediano plazo. Todas estas expectativas operan en el momento de concebir la posibilidad de trabajar la emergencia de la fundamentación. Las docentes de este equipo describieron sus clases en la entrevista inicial como: ruidosas, desorganizadas para un espectador no entendido, clases en las que de manera espontáneas surgen discrepancias. Esto nos dio señales de un grupo de docentes que privilegiaban la producción de ideas. En tales escenarios el orden es muy difícil de conseguir, el docente debe maniobrar el desorden y el caos.

Al hablar de **intencionalidad docente** estamos de algún modo aglutinando un conjunto de características del trabajo docente que partiendo de concepciones que los profesores tienen con respecto a la disciplina, a su enseñanza y a su aprendizaje, a las posibilidades de sus alumnos, se materializan en su accionar en clase. En particular, en referencia a la posible emergencia de la fundamentación, recortamos este espectro de características eligiendo de entre todas las posibles aquellas que se refieren a: a) el análisis de las producciones de los alumnos en situación de oralidad, b) las disposición a tomar las producciones de los alumnos como eje de la producción de respuestas y de fundamentaciones, y c) el reconocimiento del alumno en tanto interlocutor intelectual.

En relación a los tres aspectos recién señalados una marca de la vida escolar es la concepción que el docente tiene con respecto al **error.** En tanto el error es una forma de interpretar las producciones de los alumnos entendemos que es un tema de relevancia para esta investigación y que conforma en parte la intencionalidad del docente

El docente plantea en su clase un conjunto de actividades que, analizadas en forma previa a la clase, tendrán un curso previsto por él mismo. En algunas ocasiones los docentes, habiendo previsto un tipo de desarrollo por parte de sus alumnos, conciben como error todo aquello que se aleja de sus propias concepciones. Es decir que analizan las respuestas de sus alumnos con una vara que mide la cercanía o la lejanía respecto de lo que ellos han previsto. El error es entonces "la respuesta inesperada". El docente podrá sugerir que hay otra forma de razonar sin involucrarse en las propuestas de sus alumnos. Además podrá creer que son erróneas las producciones de sus alumnos que no revisten las características por él imaginadas. La fundamentación es una actividad donde docente y alumno deben involucrarse con una cierta paridad. Queda en manos del docente ahondar en las características de los razonamientos producidos por los alumnos, aún cuando se haga evidente que algunas explicaciones quedan fuera del espectro previsto por el mismo docente[75].

El Taller ha sido un espacio de reflexión sobre estas cuestiones en las sesiones previas a las observaciones de clase y en las posteriores. En las primeras, el Taller dio a las docentes un amplio abanico de alternativas para tener en cuenta en el momento de la clase. Con posterioridad las docentes reconocieron que este abanico les dio impulso para animarse a correr el riesgo de entrar en diálogos y confrontaciones que no sabían hacia donde los conducía con certeza[76].

En referencia a esto es interesante considerar la observación de Sadovsky (2005: 46), para quien, la actividad que potencialmente un problema permitiría desplegar no está contenida en el enunciado del problema sino que depende sustancialmente de las interacciones que a propósito del problema se pueden generar. En tal sentido el problema es planteado con la intención de tener un contexto a partir del cual proponer a la clase algunas cuestiones más teóricas. "Entre su intención matemático-didáctica y su apreciación sobre las posibilidades de la clase, el docente elige un contexto que permite generar trabajo matemático en el aula" (ibid., 49)

3.8 SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

Este capítulo encuadra teóricamente la investigación. Hemos desarrollado los conceptos centrales que previmos necesarios para diseñar la investigación y a su vez aquellos que emergieron a partir del análisis de datos. Los conceptos generales de la TS han estado presentes desde el comienzo y también aquellos desarrollados por autores como Duval y Balacheff a quienes consideramos los referentes principales en el estudio de los razonamientos argumentativos y deductivos, en particular, la prueba. Ante la necesidad de concebir un trabajo en clase de una forma particular de razonamientos matemáticos que

[75] En el capítulo 6 analizaremos una producción inesperada de un grupo de alumnos y la exigencia que opera en el docente para la gestión de clase. Ver 6.1.3 Problema de los piojos. Una producción inesperada.
[76] Remitimos a las conclusiones del capítulo 5 sobre el taller.

entendemos son fértiles en la enseñanza de la matemática hemos desarrollado el concepto de Fundamentación. A partir de él y abocados a señalar condiciones de la enseñanza que pudieran favorecer su emergencia hemos recorrido los conceptos (algunos de ellos presentados por otros investigadores en otros contextos) de debate, modelización, oralidad, incertidumbre y tiempo didáctico.

Nuestro recorte toma al docente como centro de observación y es por eso que finalmente hemos desarrollado los conceptos de intervenciones docentes – proponiendo en este caso algunas modificaciones a los modos de concebir las intervenciones docentes que la que propone la TS – y de intencionalidad docente.

Para finalizar y tomando los elementos destacados que hemos desarrollado, proponemos una **hipótesis de trabajo** que fuimos configurando durante todo el proceso de producción tanto del marco teórico como de la secuencia de problemas en discusión con los docentes del taller:

> "Para que los alumnos se involucren en un proceso de fundamentación los enunciados a trabajar, explorar, demostrar, justificar deben estar cerca de ellos en el sentido de que comprometan aspectos de los objetos matemáticos que se estén estudiando que puedan ser observados por ellos mismos en un proceso de exploración y producción de conjeturas. A la vez la actividad de fundamentación profundiza la comprensión y la construcción de sentido a propósito de los objetos matemáticos que se estudian. El contexto da sentido a la fundamentación. La fundamentación como proceso está sostenida, asegurada o evaporada por la situación que la enmarca, la promueve, la justifica o la ignora. La incertidumbre de los alumnos con relación al valor de verdad de una proposición o con respecto a la validez de un procedimiento es una importante propulsora de fundamentaciones cuando los estudiantes han asumido la responsabilidad de su trabajo. El contexto oral de producción de conocimiento iniciado a partir del trabajo en pequeños grupos y coronado por discusiones globales donde se propicien debates para la confrontación de las diferentes producciones es un escenario que abona a la emergencia de la fundamentación. Durante todo este proceso las intervenciones docentes - tanto aquellas que entendemos son retroacciones como parte del milieu como las interacciones

alumno-docente que se entrelazan con las del alumno-milieu - serán elementos cruciales para la emergencia de la fundamentación en la medida que el docente pueda autorregular su asimetría de conocimientos."

4. METODOLOGÍA DEL TRABAJO

4.1 Características generales de esta investigación

Esta investigación aborda el estudio de condiciones didácticas para la enseñanza de la fundamentación en clases de matemática de la escuela media. Dado que el concepto de **fundamentación** es definido por este mismo trabajo y ante la ausencia de investigaciones anteriores que estudien este tipo de prácticas en la escuela definimos a esta investigación de carácter **exploratorio.** Habiendo llevado a las aulas un proyecto de enseñanza – desarrollado por esta propia investigación - y habiendo observado su desarrollo en un número de clases la investigación reviste un carácter **empírico.**

Nos parece importante señalar también que, en la medida que hemos diseñado un espacio de producción del material a llevar a clase junto con un espacio de reflexión sobre esta práctica y sus posibles características en la escuela, la investigación tiene una fase de **intervención**. Para dar cuenta de esta característica remitimos al lector al próximo capítulo denominado el Taller donde relatamos el proceso a través del cual se fue configurando una intencionalidad didáctica entre docentes y coordinadores del proyecto. En dicho capítulo explicamos detalladamente cuál fue el objetivo de la conformación de este ámbito de producción y las características que fue asumiendo a lo largo de su funcionamiento. Hemos propiciado este espacio de trabajo ya que entendimos que era preciso analizar junto con las docentes y recrear con ellas las posibilidades, obstáculos y límites que una propuesta didáctica como ésta podría alcanzar en sus clases sin que esto se tradujera en una fijación de pautas. No obstante fue para nosotros evidente la idea de que para poder investigar las condiciones didácticas de una práctica que no está actualmente concebida o arraigada en una típica clase de la escuela media era necesaria esta fase de la investigación. Utilizamos la denominación metodológica usual de intervención pero precisamos que las docentes han sido productoras y no ejecutoras de un plan diseñado en forma externa[77].

[77] Mencionamos otros trabajos como el de Heinze (2008:443) quien realiza una investigación a la que demonima "de intervención" puesto en ella un grupo de docentes enseñan determinadas técnicas o utilizan

Por otra parte, la consideración de los docentes en el taller tiene algunos elementos **etnográficos**, en la medida que nos hemos acercado a las docentes reconociendo en ellas el conocimiento del que habita el espacio que queremos observar (Rockwell, 2009) . La conformación de un equipo de producción entre los integrantes del equipo de investigación y las docentes tuvo en cuenta su lugar de sujetos que conocen las reglas de juego del espacio en el que se mueven y que las utilizan más o menos implícitamente. Además pueden reflexionar sobre ellas descontextualizando y tomando la distancia necesaria como aquella en la que se ubica el investigador.

Como ya hemos mencionado en el marco Teórico de esta investigación tomamos como referencia la TS para comprender y analizar la enseñanza de la matemática. De tal encuadre se derivan algunas consecuencias metodológicas.

En primer lugar y dado que nos interesa dar condiciones para la enseñanza de la fundamentación, un tipo de práctica que, sabemos, no está instalado en la escuela, hemos necesitado problematizar su enseñanza con las docentes convocadas a la investigación. Esto nos posiciona, por un lado, distantes de la ingeniería didáctica ya que ella concibe al docente en una etapa de comunicación pero fuera de la etapa de producción de las secuencias que se desarrollarán en clase y, por el otro, distante de la concepción naturalista que va a investigar las prácticas sin ningún tipo de intervención. Esto último no es posible para una actividad no considerada por el currículum de matemática.

Esta necesidad de problematizar la enseñanza con docentes se satisface diseñando una fase inicial en la investigación que da un marco tanto para el análisis y estudio de esta actividad como para el diseño de una secuencia de enseñanza que la tuviera en cuenta. Este lugar se llamará "el Taller".

Creemos que la idea que propicia la Ingeniería Didáctica de dejar al docente fuera de la fase de diseño de la secuencia tiene una importante afinidad con la concepción - ya mencionada en el Marco Teórico- según la cual la enseñanza de una noción se estructura a partir de

---

un material para la enseñanza diseñado por la investigación en clases regulares. Esto significa que la investigación no se desarrolla fuera del aula, por un lado, y por otra parte, que no se está estudiando la enseñanza habitual sino que se ha desarrollado alguna ingeniería específica para su estudio.

situaciones adidácticas que ocurren sin la intervención del docente (esto es con una presencia pero sin intervención). En función de nuestra conceptualización de situación adidáctica y de un docente siempre presente e interviniendo pero autorregulando su asimetría hemos concebido necesaria su participación en el diseño de las situaciones problemáticas, entendiendo que en esta escena cada uno de ellas aportaría no solo los imprescindibles datos de sus alumnos, escuelas, entornos de trabajo (lo que organiza un conjunto de posibles y de restricciones) sino también sus personales concepciones de lo posible en clase basadas en sus concepciones sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje[78].

Pensamos que este conjunto de variables que aportan los docentes interviene, silenciosamente, en el momento de la clase a partir de su intencionalidad. Creímos inicialmente - y constatamos luego - que la participación en el taller fue un potente organizador de intenciones en clase. Su participación en la construcción del proyecto de enseñanza, la discusión con otros –que permitió desnaturalizar conocimientos y prácticas- resultaron fundamentales para la conformación de la intención docente.

Luego de cinco meses de trabajo en el Taller y ya producido de manera compartida un proyecto de enseñanza, comenzó la fase de observación de la secuencia en clase. La observación fue tanto participante como no participante[79] según los momentos de la clase. La misma quedó registrada en notas y audio.

Durante el período de observación de clase las docentes continuaron participando del Taller con el objetivo de compartir sus primeras experiencias, recibir retroacción de los

[78] Rockwell (ibid., 27) distingue entre dos conocimientos locales: el saber pedagógico y el saber docente. El primero, "contenido en la pedagogía como disciplina académica, es tradicionalmente un discurso prescriptivo; tiene distintas fuentes, filosóficas y experienciales, discusiones políticas e ideológicas, contribuciones diversas de la psicología y de las ciencias sociales, y reflexiones de los grandes educadores....Con la idea de saber docente se valora un conocimiento con otra existencia social, que se objetiva de otra manera: ya no en el discurso de la pedagogía, sino en el quehacer cotidiano de los maestros, de cualquier maestro. [...] El saber docente corresponde a la práctica de la enseñanza, pero incluye también los demás conocimientos que requiere el trabajo de maestro, saberes que a veces subvierten o distorsionan las funciones formales de la educación, pero que también pueden enriquecer la enseñanza".

[79] Mencionamos ambos tipos de observaciones pues durante algunos tiempo de trabajo en el aula, al que nos hemos referido como "trabajo grupal" o también situación adidáctica el observador circulaba entre los grupos tomando notas y grabando en audio las conversaciones y también manteniendo diálogos con los alumnos para conocer sus estrategias de resolución de problemas, las dificultades con las que se topaban y aquellos modos de razonamiento que no quedan registrados en los escritos de los alumnos. Estos diálogos se realizaron cuidando no resultaran disruptivos respecto tanto del clima de clase como del propio trabajo de los alumnos. En cambio cuando las clases entraban en las fases de puesta en común la observación fue no participante para así minimizar la presencia del observador que no deja de ser extraña para los alumnos. Como menciona Rockwell (2008: 117) en el caso de estudios etnográficos: "La etnografía se propone conservar la complejidad del fenómeno social y la riqueza de su contexto particular; por eso la comunidad, la escuela, o en todo caso el barrio y la microzona son el universo natural de la investigación etnográfica".

otros docentes, ajustar alguna parte de la secuencia todavía no implementadas en función de las primeras experiencias y continuar la discusión de las "posibles fundamentaciones" en clase en términos de la gestión docente.

El Taller finalizó dos semanas después de la última clase observada y de este modo dimos fin al trabajo de campo. En algunos cursos se implementó una actividad extra final que fue filmada. Esta actividad no fue formulada en el taller sino que partió del equipo de investigación y fue consensuada con las docentes que pudieron realizarla.

En los últimos encuentros del Taller dedicamos tiempo a la reflexión sobre esta etapa de la puesta en marcha de la secuencia de exponencial y pedimos a las docentes que elaboraran conclusiones sobre los aspectos más destacados de todo este proceso.

Vamos ahora a relatar en detalle cada una de las fases de esta investigación.

4.2 El campo

En esta investigación hay dos "campos". Uno de ellos es el espacio de producción, estudio y reflexión organizado con el grupo de docentes y el otro es el que se conforma en las clases de matemática. Los distinguiremos denominando al primero el campo - docente y al segundo el campo – aula.

4.2.1 La entrada al campo - docente

Realizamos una amplia convocatoria a docentes de escuela media en capital que dictasen cursos de matemática en cuarto año preferentemente. Como ya hemos mencionado en el Estado del Arte el área de la geometría ya ha sido indagada en relación con los razonamientos argumentativos, deductivos, la prueba y la demostración. Es por eso que tomamos la decisión de investigar la fundamentación fuera de dicha área. Esto nos abrió las puertas a otras zonas tales como el álgebra y el estudio de funciones que se desarrolla entre cuarto y quinto año y termina con nociones de cálculo, según las orientaciones.

Se convocó a un grupo de docentes de CABA que ya habían participado en otras instancias de capacitación en el organismo del CEPA[80]. En función de las respuestas de los docentes se pre-seleccionó un grupo de 8 docentes y se pactó una entrevista con cada una. El objetivo de la entrevista era conocerlas en profundidad, conocer su recorrido como docentes, su formación matemática y su experiencia en clase, su visión de la matemática y de los alumnos. Al mismo tiempo les dimos a conocer las características centrales del proyecto – el objetivo de la investigación, nuestras ideas iniciales y primeras configuraciones para su desarrollo – para de este modo tener una cierta retroacción acerca del interés de los docentes.

Participar en un proyecto de estas características demanda de los docentes una disposición a revisar junto a otros sus modalidades actuales de enseñanza, a analizar propuestas nuevas, a discutir sus fundamentos y condiciones, a implementarlas efectivamente, a ofrecer sus clases como un espacio de observación y a participar de un análisis reflexivo del trabajo realizado.

Por otra parte queríamos contar con docentes que hubieran tenido una experiencia previa tanto en la institución como en el año en el que estaban enseñando. Dado que se les plantearía posiblemente una forma distinta de trabajo resultaba importante que esta novedad no fuera solapada con otra como, por ejemplo, trabajar en ese año por primera vez o ser un docente nuevo en la escuela elegida.

La entrevista tuvo además el propósito de establecer una relación de confianza entre las docentes y el equipo de investigación[81] para el futuro trabajo que se realizaría en el taller de producción de la secuencia. Se entregó a las docentes un texto para que leyeran donde se presentó una síntesis de nuestras ideas a ese momento sobre las características que este trabajo podría tener: una breve explicación formal y una secuencia de actividades para desarrollar (Apéndice Nº 3). Se aclaró entonces que este texto no forzaba ninguna decisión sobre el tema de enseñanza a trabajar sino que era simplemente una herramienta para encarar la discusión sobre la problemática de la fundamentación.

[80] CEPA, Centro de Pedagogías de Anticipación, es una Escuela de Capacitación Docente, un espacio público dependiente del Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Definido como un ámbito de encuentro, estudio y reflexión ha ofrecido cursos a profesores de la escuela media en temas de enseñanza de la matemática utilizando un enfoque didáctico cercano al que proponemos en este trabajo.
[81] El equipo de investigación del proyecto estuvo integrado por el profesor Horacio Itzcovich como coordinador por la Dirección de Currícula, la Dra. Patricia Sadovsky en calidad de especialista invitada y yo como coordinadora e investigadora del proyecto.

A partir de estas entrevistas se convocó a un grupo de 6 docentes[82] y se organizó un taller. El taller se desarrolló entre los meses de Abril y Noviembre. Los encuentros tuvieron hasta julio, una frecuencia semanal de 3 horas de duración y a partir de Agosto –momento en que comienza la implementación de la secuencia en las aulas- se desarrollaron cada 15 días. Se llevaron a cabo en total 24 encuentros. Una docente debió abandonar el taller transcurrido un 40% de los encuentros y finalmente fueron 5 las docentes que permanecieron en el proyecto. Estas docentes serán identificados en este trabajo como Doc_1, hasta Doc_6, siendo la sexta docente quien luego dejó el proyecto. Los coordinadores serán reconocidos como $Coord_1$ y $Coord_2$ y la investigadora especialista invitada como Esp. Esta identificación se utilizará en el capítulo 5 donde transcribiremos algunos diálogos.

4.2.2. Sobre los docentes

Para cuando habíamos dado inicio al taller, transcurridas algunas semanas desde la entrevista inicial, un par de docentes ya habían implementado con sus alumnos algunos de los problemas que se habían repartido en el material impreso adaptándolos a los temas que habían comenzado a desarrollar a principio de año y a las posibilidades de sus alumnos. Esto nos marcó que se trataba de un grupo de docentes con una gran motivación y con inquietudes. Esta característica se sostuvo a lo largo de todo el taller.

Por otra parte esta iniciativa de las docentes que continuó durante la primera parte del año a partir de actividades diseñadas por las propios docentes, llevadas a clase por ellas mismas según los temas que estuvieran desarrollando en sus distintos cursos y puestas a discusión en el taller antes de la implementación de la secuencia elaborada en el mismo fue, sin duda, introduciendo cambios en la dinámica de los cursos que luego serían observados. Es por esta razón que entendemos que los estudiantes que observamos entre los meses de agosto y noviembre ya habían comenzado desde el principio del año con algunas actividades de fundamentación.

[82] Quienes fueron contratados por la Dirección de Currícula para la realización de esta investigación la que incluye la producción de un material destinado a los docentes de matemática de las escuelas de la Ciudad de Buenos Aires sobre la enseñanza de la exponencial y la fundamentación. Actualmente dicho documento se encuentra en etapa de edición.

La formación matemática de las docentes es en todos los casos la del profesorado[83]. Todas ellas habían participado previamente en capacitaciones realizadas por el CEPA. Algunas de ellas habían incluso participado en la redacción de documentos de trabajo de este organismo que se distribuyen de manera masiva en todas las escuelas medias de la CABA. Todas ellas dictaban para la fecha un gran número de horas de clases semanales en instituciones públicas y privadas. Las instituciones elegidas para la observación de clases fueron todas públicas.

4.2.3. El taller. Discusión de la problemática y desarrollo de la secuencia

El taller, desarrollado durante ocho meses (abril a noviembre) propició dos tipos de trabajo: uno caracterizado por una discusión más formal, abstracta y teórica donde delineamos un perfil de prácticas de fundamentación por parte de los alumnos. Así comenzamos a configurar entre todos un alumno ideal en quien pensar en forma grupal y al mismo tiempo, quizás más silenciosamente o implícitamente un docente en esa clase (mencionamos esta cuestión en el Marco Teórico, donde señalamos la participación de las docentes recuperando en el taller aspectos concretos de sus alumnos y a partir de ellos imaginando posibles para su clase, en ese proceso, hemos dicho, las docentes y todo el equipo de investigación configuramos un alumno ideal).
Como ya señalamos en el apartado anterior los docentes traían al taller relatos de sus clases y producciones de sus alumnos referidos a cuestiones vinculadas a la problemática de la fundamentación que estábamos tratando. Es por esto que esta fase de índole teórica fue enriquecida con la práctica de las docentes y esto permitió conformar un marco referencial común.

La entrega del material mencionado tenía la intención de propiciar el comienzo del intercambio con las docentes, de constituirse en objeto de análisis y reflexión. Subyace aquí una posición metodológica según la cual para imaginar un proyecto de enseñanza posible sobre la fundamentación concebimos la necesidad de ofrecer un medio que aportaría elementos para la discusión y al mismo tiempo nos posicionaría respecto de este proyecto.

[83] Sólo una profesora estaba iniciando por entonces el estudio de una Licenciatura en Enseñanza de las Ciencias en una modalidad semipresencial.

El segundo tipo de trabajo fue el de diseño de la secuencia de enseñanza para las clases aunque debemos decir que (ver Apéndice Nº 1) no podemos separar nítidamente estos dos momentos de trabajo.

Como hemos señalado, ya desde el comienzo del taller las docentes decidieron por su cuenta tomar algunas de estas actividades y probarlas con sus alumnos en el contexto de los temas que estaban desarrollando[84]. Entendimos que era una manera de explorar las posibilidades de las mismas y de explorar al mismo tiempo sus propias posibilidades para un trabajo de esta índole. En varias oportunidades las docentes avisaban en el taller que habían desarrollado alguna secuencia y lo incorporábamos como tema de discusión en el momento que resultare más adecuado. Analizábamos las respuestas de los alumnos ya que las docentes traían toda la actividad documentada incluyendo trabajos de sus alumnos y relatos de la dinámica de clase. Mantuvimos esta actividad supeditada al tiempo disponible del taller para no retrasar el objetivo del mismo aunque la entendíamos como imprescindible pues resultaba productiva. Además daba cuenta del compromiso de las docentes con el proyecto.

Una vez elegido el tema las docentes y los coordinadores aportamos problemas para su análisis y discusión. Los encuentros se alimentaron de trabajo individual y de documentos que se compartían y reformulaban vía e-mail.

A partir del mes de Agosto nos abocamos a reflexionar sobre las observaciones de las secuencias en cada curso además de continuar precisando algunos aspectos de la secuencia (que todavía no estaban puestos en aulas). En dos de los cinco cursos se llevó adelante, luego de finalizada toda la actividad desarrollada para todos los grupos, una actividad adicional de cierre. Esta actividad fue filmada y comentada en los dos últimos talleres. Los encuentros fueron registrados en grabaciones de audio. Las docentes se acostumbraron en poco tiempo a la presencia del grabador (entendemos que su presencia también fue disruptiva al inicio) y las grabaciones fueron mejor recibidas en la medida que las docentes tomar conciencia de que se utilizaban para compartir los acuerdos logrados y para sintetizar

[84] Una de las docentes llegó al primer taller con una actividad realizada y documentada con sus alumnos de 4º año donde, en el contexto del tema "sucesiones" había elaborado una actividad de conexión entre proposiciones que se tomaban como hipótesis y otras que se tomaban como deducciones de dichas hipótesis. Los alumnos debían elegir antecedente y consecuente y justificar su elección. Además había realizado una clasificación de las respuestas de sus alumnos. La documentación de esta actividad fue luego utilizada para delinear características posibles para la fundamentación. Este tema se analiza en el Marco Teórico, sección 4

las ideas tratadas. Es decir las grabaciones –además de ser una fuente de datos para la investigación- fueron un material de trabajo en el taller.

.

4.2.4. Sobre la secuencia producida

La secuencia producida tiene dos momentos de trabajo. En primer lugar consta de 6 problemas que describen fenómenos de variación referidos a diferentes contenidos. Los designaremos "problemas en contexto"[85]. El propósito de estos problemas es que el modelo exponencial surja como la forma de responder a las características de estos cambios. Los problemas van guiando a los alumnos a la exploración de la situación planteada, la producción de conjeturas y la fundamentación de los modelos emergentes.
En esta parte las fundamentaciones serán más contextualizadas y serán fundamentaciones en algunos casos de afirmaciones pero en la mayoría de ellos serán fundamentaciones de procedimientos, de producción de fórmulas, de interpretaciones de lectura en gráficos (ver Capítulo 3, apartado 3.4).

Apoyados en esta producción previmos que las docentes identifiquen con los alumnos el modelo exponencial y propicien el establecimiento de relaciones entre dicho modelo y los problemas que se han resuelto.

En una segunda parte los alumnos se dedican a estudiar la familia de funciones exponenciales. Los problemas de esta parte tienen mayor grado de formalidad, y de abstracción. Se propicia un trabajo de exploración como el de la primera parte pero destinado ahora a indagar características de la función exponencial. El lenguaje algebraico entra en diálogo con el lenguaje gráfico. Se promueve la elaboración de conjeturas afirmaciones y fundamentaciones de las mismas mediante distintas propuestas.

De este modo vemos que la elaboración de la secuencia de la función exponencial tiene como objetivo que los alumnos comiencen trabajando con problemas en contexto para luego, una vez comprendido en contexto algunas características de la función exponencial, se realice un estudio descontextualizado del tema.

[85] En el Capítulo 6 desarrollamos en detalle la descripción de toda la secuencia.

El diseño de la secuencia, desde la idea primera hasta la escritura final de cada problema fue el producto de una intensa exploración - producida entre docentes, la investigadora invitada y los coordinadores – sobre los posibles efectos que un enunciado podría tener, las relaciones que los alumnos pueden poner en ejecución a partir de determinadas descripciones, los obstáculos con los que se podrían enfrentar a partir de distintas estrategias que pudieran emerger. Fueron muchas las conjeturas elaboradas durante el proceso de producción de los problemas acerca de los alumnos, las estrategias de resolución de los problemas y las alternativas de su gestión en sus clases.

4.2.5. Sobre la gestión de clase

La TS modela (como ya hemos mencionado en el Marco Teórico) las situaciones de enseñanza en un modo que difiere sustancialmente de las situaciones tradicionales en las cuales el docente comunica al alumno un conjunto de conceptos matemáticos y luego el alumno se enfrenta a situaciones en las que aplicará tales conocimientos. En contrapartida la TS postula una inversión de momentos y propone que el alumno se enfrente ante situaciones – adidácticas – que presentan relaciones típicas de la función exponencial sin una enseñanza previa. La TS postula que el alumno entonces producirá relaciones nuevas que entrarán en diálogo con sus conocimientos ya consolidados construyendo al mismo tiempo un sentido para tal conocimiento. En este escenario tenemos la intención de vincular y describir – y este es el nudo de nuestra investigación – las relaciones que los alumnos producen, las intervenciones docentes y la posibilidad de la emergencia de la fundamentación.
Es por eso que en la propuesta que llevamos a las aulas, los alumnos se enfrentan a problemas vinculados al modelo exponencial pero sin una explicitación ya que el tema no había sido tratado previamente por cada docente en clase. La actividad fue presentada "sin título" de modo de evitar que los alumnos asociaran estos problemas con algún tema en particular y así promover la búsqueda de relaciones específicas de las situaciones dadas.

Las docentes tomaron decisiones sobre la gestión de estos problemas lo cual dio lugar a algunas variantes entre los distintos cursos. El capítulo "el Taller" da cuenta de esta diversidad.

4.2.6. La observación de clases. Entrada al campo - aula

La observación de clases fue realizada por el equipo de coordinadores del taller. Los instrumentos de recolección de datos fueron principalmente dos: grabaciones de audio y toma de notas (para confeccionar un registro de clases). Al final de la secuencia en tres de los grupos realizamos una video filmación de una clase de cierre con la implementación de un conjunto de problemas específicamente diseñado para tal fin.

Cada docente comunicó a sus alumnos que durante un tiempo de aproximadamente dos meses de clase serían observados por profesores del área de Currícula del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires interesados en la producción de explicaciones por parte de los alumnos a propósito de la resolución de un cierto tipo de problemas.
No medió con los alumnos mayor descripción sobre el tipo de explicaciones que se esperaba produjeran.

También se anunció la video filmación de la última clase (en tres de los grupos) pidiendo y obteniendo el consentimiento de los alumnos. Para entonces habíamos lograda una empatía tanto con las docentes como con los alumnos que nos permitió no solo la aceptación de tal propuesta[86] sino también un gran compromiso intelectual de los alumnos en esa instancia. Tanto el equipo de grabación de audio como el de video filmación fue utilizado por el mismo coordinador que realizaba la observación. De esa forma intentamos preservar el clima de clase minimizando la presencia de personas externas al contexto aula.

Durante la fase inicial de trabajo en pequeños grupos cada docente circulaba por los grupos y los observadores (solo uno en cada clase) también, registrando tanto los diálogos entre la docente y los alumnos como los diálogos que los alumnos mantenían sin la docente presente. En algunas ocasiones el observador dialogó con los alumnos a raíz de las producciones que encontraba en los grupos y para dar cuenta de la génesis de tales producciones.

[86] Esta propuesta había sido anunciada en una de las últimas reuniones del taller previas al comienzo a la observación de clases como una actividad posible y deseable en el contexto de la investigación y había sido por entonces rechazada por los docentes quienes estimaban distinto tipo de problemas al respecto, en su mayoría de índole institucional. Avanzada la observación de clases – más de un 50% del trabajo realizado – volvimos a proponerlo obteniendo el consenso de los docentes y luego el de las instituciones y de los alumnos. En este sentido mencionamos la empatía lograda tanto con los docentes como con los alumnos.

En cada fase de trabajo de puesta en común la observación fue de tipo no participante tratando así de preservar el clima de una clase usual de matemática. Luego de un par de clases los alumnos se mostraron familiarizados con la propuesta de trabajo. No pretendemos minimizar los efectos disruptivos que causa un observador en clase y mucho menos descartarlos pero creemos que los alumnos y docentes participaron con compromiso intelectual en el proyecto y desplegaron una actividad rica e intensa ya que imperó en las aulas un clima de confianza que se fue forjando a lo largo de todo el proyecto de investigación por un conjunto de decisiones tomadas y al que contribuyó principalmente el despliegue de trabajo cooperativo, compromiso intelectual e interés recíproco logrado en el Taller.

La observación (de gestos, tonos de voz, actitudes) y el registro de los diálogos tuvieron la intención de ayudar a comprender cómo dialogan los docentes con las explicaciones de sus alumnos – frente al pedido de los alumnos, por ejemplo, de sancionar sobre su adecuación. Del mismo modo quisimos rastrear cómo promueven la confrontación entre alumnos, o bien en qué situaciones propician debates. Con estos detalles presentaremos los registros de clases en los próximos capítulos. Nos parece necesario conservar algunas expresiones de docentes y alumnos que viven en la oralidad pero que dan cuenta del tenor de los diálogos establecidos en esa comunidad aula. Del mismo modo señalaremos algunos tonos de voz que, de no existir, pueden dar lugar a diferentes interpretaciones de las expresiones tanto de docentes como de los alumnos[87]. Finalmente necesitamos aclarar que en los registros no hemos editado los diálogos. Ellos figuran tal y como han sido registrados en audio.

4.3 El análisis

En esta investigación consideramos como unidad de análisis la clase de matemática. Como sostiene Laborde (2005: 2) "Tomar la clase como unidad de análisis requiere el estudio de las interrelaciones entre los **tres componentes principales del proceso de enseñanza**: el contenido matemático, la gestión de las diversas dimensiones temporales y la actividad del

[87] Rockwell (ibid.,86) señala la necesidad de comprender el significado de las palabras, el sentido en el que se dicen y la fuerza que tienen ya que esto da cuenta del efecto que tienen en quien las escucha. Agrega también "Toda interpretación también requiere inferir el significado de mensajes indirectos en la interacción, a partir de tonos y gestos. Es importante distinguir, por ejemplo, tonos de ironía, humor o seriedad en el habla"

docente quien prepara y gestiona la clase para asegurar el progreso del conocimiento de los alumnos así como también su experiencia de enseñanza". En nuestra investigación estos componentes son considerados y serán la temática de los Capítulos 6, 7 y 8.

La etapa de análisis se desarrolla en dos esferas: el campo docente que se analiza principalmente a partir de los registros del taller y el campo clase que se analiza con los registros producto de la observación de clases.

El análisis del "campo clase" continúa con la mirada puesta en el docente pero en este caso en su gestión de la clase[88]. Durante las clases hubo un intenso intercambio oral. Los diálogos se dan entre alumnos en el interior de los grupos, entre docente y alumnos de un grupo, entre observador y alumnos de un grupo y, finalmente, entre docente y toda la clase siendo estos últimos los que se refieren a la puesta en común. Sobre cada uno de estos diálogos nuestro interés está puesto en las intervenciones docentes, en describirlas y recuperarlas analizando en qué sentido son constitutivas de la emergencia de la fundamentación en la clase en la medida que ellas dan cuenta por un lado de la intención docente y también en la medida que ellas forman parte de la situación didáctica y promueven la actividad matemática de la clase.

Hemos hemos elegido uno de los cinco cursos observados para estudiar la gestión docente en función de dos razones: en primer lugar el material de audio y video recogido a partir de las observaciones realizadas en los cinco cursos fue pródigo: la riqueza de producciones orales tanto de alumnos como de docentes como de todos en conjunto superó nuestras expectativas.[89] En segundo lugar, la forma que creímos necesaria para procesar esta información fue la de un análisis exhaustivo y minucioso de los diálogos capturados por el audio y las notas de los observadores. Esta segunda decisión de un análisis de tal profundidad de los diálogos multiplicó la riqueza del material recabado.

A su vez, la decisión de selección de material descansa en las características de esta investigación. Siendo ella de carácter exploratorio, no necesitamos alcanzar la representatividad de una población a partir de una muestra sino dar cuenta de una actividad "posible".

[88] En el Marco Teórico, apartado 3.6 hemos precisado las dimensiones principales para nuestro análisis de las intervenciones docentes.
[89] En este sentido superó notoriamente el volumen de material que esperábamos recoger.

El curso elegido reune características halladas[90] en todos los otros cursos de modo tal que entendemos que la elección no deja afuera cuestiones que quisimos explorar y analizar. Finalmente, siendo el curso que disponía de mayor número de clases semanales de matemática (tres módulos de 80 minutos frente a los otros cursos donde se trabajaba dos módulos de 80 minutos) el desarrollo de toda la secuencia se realizó con más tiempo.

Para analizar al docente hemos ideado dos niveles de análisis que llamaremos: el **micro - análisis** y el **mezzo- análisis**[91] y que explicamos a continuación.

4.3.1 El micro análisis

El micro análisis identifica **pequeñas intervenciones** de las docentes durante diálogos que mantienen con los alumnos. Estas intervenciones son portadoras de una intencionalidad vinculada a la emergencia de la fundamentación y nos han permitido identificar maniobras discursivas que las docentes realizan a partir de las cuales:

- van comunicando y gestionando la puesta en acto de distintas funciones que cumple la fundamentación en la producción de ideas matemáticas,
- configuran un discurso coherente en el que están presentes reconstrucciones o ampliaciones de ideas,
- jerarquizan las producciones de los estudiantes, habilitándolos y regulando la asimetría que tiene con sus alumnos,
- promueven debates entre los estudiantes.

[90] Realizamos un primer análisis de todos los datos para tomar esta decisión.

[91] Hemos desarrollado estas dos dimensiones para el análisis de las intervenciones docentes inspiradas en el trabajo de Hersant y P.Glorian sobre la caracterización de las prácticas ordinarias de enseñanza. En este trabajo las autoras definen tres niveles para la consideración del contrato didáctico: macro contrato, mezzo contrato y micro contrato según escala de tiempo y de proyecto didáctico. El macro contrato aloja cuestiones relativas al objetivo global de enseñanza, el mezzo contrato toma aquellos emergentes de la resolución de una actividad, tal como la resolución de un problema, en tanto el micro contrato corresponde a un episodio particular tal como puede ser una pregunta específica dentro de la resolución de un problema. Estas dimensiones de las autoras nos ayudaron a dilucidar cuestiones temporales que estaban implícitas en nuestro análisis y que el armado y explicitación de dos de estos niveles – el micro y el mezzo - nos permite comunicar. Creemos que sería factible, del mismo modo, considerar un nivel de macro análisis que entendemos podría consistir en una mirada sobre la gestión docente a lo largo del conjunto de toda la secuencia pero que escapa al objetivo de esta investigación que consiste en analizar la emergencia de la fundamentación. Lo consideramos pertinente en otra investigación que profundice los resultados de ésta. Entendemos que para considerar los emergentes de la clase son adecuados estos niveles de análisis: micro y mezzo.

Para este nivel de análisis los datos relevantes son las expresiones, comentarios, sentencias de las docentes durante un diálogo. Además nuestro análisis e interpretación abarca el contexto inmediato en el que se desarrollan sin poner estas intervenciones en relación con otras (o incluso con otros diálogos). Tendremos en cuenta su contenido en el contexto de lo que se está considerando en ese diálogo y nos ajustaremos a ese momento del intercambio. Estas características nos impulsan a denominar este análisis **micro - análisis**.

Para llevar adelante el micro análisis utilizamos extractos de clase. En ellos preservamos la forma de locución de los actores. El registro da cuenta de la situación de oralidad. Las transcripciones intentan capturar los énfasis con los que se emiten algunas opiniones, las expresiones que alumnos y docentes utilizan en su manera de hablar y los silencios que se producen durante los diálogos (a veces incluso durante la intervención de un solo miembro del grupo). En algunos casos agregamos entre paréntesis o entre corchetes comentarios aclaratorios de estados de clima de la conversación. Intentamos de este modo una buena fidelidad del clima de trabajo en clase y de los elementos que están presentes durante los diálogos.

Estos extractos de clase toman diálogos entre grupos de alumnos y docente, y también entre la docente y toda la clase.

Realizamos el análisis del mismo fuera del extracto.

4.3.2 Mezzo análisis

El mezzo análisis es un recorte temporal que supone no sólo una interacción más larga sino una interacción a propósito de cuestiones que han sido tratadas varias clases antes del momento en que ocurre el diálogo. Para llevar adelante el mezzo- análisis dispondremos los diálogos entre alumnos y docente en episodios. Cada episodio da cuenta de una intencionalidad docente o de una actividad promovida por la participación de algún alumno. Para comunicar el análisis, en cada episodio el diálogo será insertado en una tabla de dos columnas ubicando a la izquierda el diálogo y a la derecha observaciones parciales sobre cada una de las intervenciones que nos permiten luego estructurar el análisis a desarrollar, el que quedará fuera de la tabla. Este recurso es en ocasiones utilizado cuando se realizan observaciones de clase y se utilizan sus registros. Dentro de la bibliografía consultada para este estudio los trabajos de Pedemonte (2005, 2007) y Duval (1991) presentan esta modalidad de análisis a dos columnas. La ubicación en dos columnas permite conservar la fuente original que queda visualmente restringida a la primer columna y que permite su lectura continuada sin rastros del análisis. La lectura horizontal permite ir alimentando la lectura del registro con los elementos que hemos considerado necesarios de destacar en cada entrada para luego recuperar en el análisis del conjunto de episodios.

Recorriendo el o los episodios de un diálogo identificaremos en el grupo de interacciones docente - alumnos las operaciones que las docentes realizan en torno a: la interpretación de las producciones de sus alumnos, la promoción de confrontaciones, colaboraciones y reelaboraciones respecto de sus producciones, la puesta en escena de reflexiones metamatemáticas para analizar la génesis de las producciones en busca de poner en evidencia los elementos de una fundamentación, etc. Este constituirá el **mezzo análisis**. Este nivel de análisis se nutrirá del nivel micro cuando sea pertinente.

Prestaremos también la atención en dichos diálogos a cuáles son las producciones a las que arriban los alumnos aún cuando no podemos decir que tales producciones estén provocadas exclusivamente por el docente. No solo no lo podemos decir sino que tampoco creemos que así sea, de hecho hemos diseñado la investigación a partir de la secuencia de problemas llevada a clase. Estamos analizando la gestión docente en el contexto de un tipo de trabajo especial, tanto por los enunciados como así también por la modalidad de trabajo. Entendemos que hay un entramado de factores que contribuyen a una producción de los alumnos.

5. EL TALLER. UN ESPACIO DE PRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

El Taller constituyó para esta investigación un núcleo de formulación de preguntas y producciones. Las preguntas alimentaban la discusión – debate sobre el significado, alcance y límites de un trabajo de prácticas fundamentadas en el aula. La producción de la secuencia para llevar a clase fue el elemento concreto y asible que se gestó durante el taller. Otros elementos vitales no son corpóreos aunque fueron claves en el proceso de conformación de la filosofía con la que las docentes llevaron luego a sus clases esta producción. En este capítulo presentaremos este recorte de los emergentes del Taller y dejaremos para el próximo aquellas cuestiones directamente relacionadas con la producción de la secuencia.

5.1 Construcción de una intencionalidad docente

El trabajo sin interrupción durante los ocho meses del taller permitió (atravesando por distintos momentos) constituir junto con las docentes una **comunidad de producción sobre enseñanza de la matemática**. El espacio taller fue vital para la producción de una **intencionalidad docente**[92]. Con esta expresión queremos de algún modo aglutinar un conjunto de características del trabajo docente en la clase que constituyen un soporte vital para involucrar a los alumnos en la producción de justificaciones y que permiten concretar la voluntad o el deseo de las docentes de que los alumnos elaboren los fundamentos de su actividad. Sin mediar un proceso de discusión, dichas cuestiones, sabíamos, no iban a estar presentes aún cuando las docentes compartieran con nosotros desde el inicio del taller la voluntad de trabajar con sus alumnos en la producción de justificaciones para su tarea.

Los primeros encuentros tuvieron el propósito de presentar la propuesta y generar un clima de confianza donde las docentes se configuraran como sujetos productores. La presencia de dos coordinadores y la participación de una investigadora de Didáctica de la

---

[92] Este concepto ha sido presentado en el Marco Teórico.

Matemática[93] representaba una forma de contribución al debate mas no una forma de fijación de pautas de la gestión de las docentes ni de la enseñanza. La modalidad de desarrollo del taller consistió en la problematización de temas y la búsqueda de consenso y acuerdos. Nuestra intención (la de la investigación) fue la de propiciar, desde el comienzo, un ambiente de discusión entre pares. Este enfoque nos aleja de la propuesta de la Ingeniería didáctica ya que en ella la etapa de producción de situaciones problemáticas y el análisis a priori del desarrollo de las clases es una tarea principal del equipo de investigación. Rechazamos esta alternativa en la medida que entendemos que, como ya lo hemos expresado en el marco teórico, el aprendizaje de los razonamientos matemáticos[94] requiere de acciones específicas del docente que permitan regular el contexto del aprendizaje. Estas acciones estarán siempre imbuidas de su intencionalidad (la que a su vez se forja a partir de cuestiones tales como su concepción de la matemática, de las posibilidades de trabajo en aula, de sus alumnos, etc.).

Recuperamos acá un tramo de una discusión –expresaron esta idea en numerosas oportunidades- en la que las docentes expresan el soporte que constituyó para ellas la discusión global en la configuración de su proyecto y la relación de esto con el posicionamiento de los alumnos:

Diálogo 5.1. (Taller 19) La construcción de una intención en el espacio de discusión colectiva y su relación con el posicionamiento de los alumnos

1.-Esp. Antes de entrar en la revisión. Sé que no hay todavía muchas clases desarrolladas, en algunas sobre todo, pero quiero preguntar. Esta propuesta de la exponencial, luego de todo este trabajo del taller y respecto de otros años ¿es igual que en otros años? ¿Es distinta?, y si es distinta ¿en qué?
2.-Doc_2. **¿La respuesta de los chicos? Muy distinta.**
3.-Doc_4. Muy enganchados
4.-Doc_1. Muy activos.
5.-Esp. **¿Y a qué se lo atribuyen?**
6.- Doc_2. Es una experiencia muy distinta. **El trabajo de proyectar la clase es muy solitario. No tenés con quien compartirlo o consultar. Esto te arma la cabeza de otro modo.**
7.- Doc_1. Los chicos se entusiasman en defender una idea y en debatir.
8.- Doc_4. y en explicarle al otro. ...(explica una situación de su grupo)

[93] La investigadora Patricia Sadovsky contribuyó al debate en el Taller.
[94] Esta cuestión nos plantea un conflico y hemos decidido mantener nuestro foco mencionando el aprendizaje de los razonamientos matemáticos en lugar del aprendizaje de la matemática en general luego de una larga reflexión. Estamos convencidos que la enseñanza de la matemática es de algún modo una enseñanza de los razonamientos matemáticos, aunque reconocemos que se realiza con distintos sentidos, matices y también con distinta presencia explícita de estos últimos. Esto nos lleva a pensar que el aprendizaje de la matemática requiere en general de acciones específicas del docente. Dado que esta tesis refiere a los razonamientos matemáticos hemos decidido dejarlo expresado de este modo.

Aunque tal vez no lo terminan de explicitar, en el diálogo anterior las docentes están estableciendo una relación entre el modo en que "se les arma la cabeza" para dar clase y el involucramiento de los alumnos en el proyecto, a la vez que atribuyen un papel relevante al grupo del taller como soporte de ese "armado". Nos interesa resaltar dos aspectos. En primer lugar, esta relación es **producida por las docentes** al reflexionar sobre la experiencia de participación en el taller. En segundo lugar, hace referencia a la relación entre enseñanza y aprendizaje en términos de posicionamientos**:** el del docente que se *arma* en la discusión colectiva y el del alumno que se involucra a partir de la intencionalidad docente. Interpretado desde la TS podríamos decir que las profesoras relacionan intencionalidad docente con devolución, aunque por supuesto ellas no usan esos términos ni están pensando en la TS en el momento en que se produce el diálogo.

Durante la producción de los problemas se tuvieron en cuenta "varias dimensiones de análisis" . Nos preguntamos:

a) .- qué tipo de producción esperábamos en la clase a propósito de un enunciado y qué conflictos deberían resolver los alumnos para abordar los problemas. En otros términos nos preguntábamos por **escenarios posibles** y potentes.

b) .- qué intervenciones docentes podrían favorecer las producciones y responder a los errores esperados o a bloqueos más o menos persistentes en la producción – esto es - qué forma podría tomar la **interacción docente - alumno** y cómo podrían materializarse las **devoluciones**.

c) .- qué características del modelo exponencial eran las más adecuadas, necesarias, imprescindibles o superfluas para propiciar el comienzo de la actividad y cuáles podrían desarrollarse en forma contextualizada y descontextualizada – es decir – **qué elementos del saber** se podían **poner en juego**.

d) .- cómo podrían ir acordando con los alumnos, a partir de algunos problemas contextualizados, hipótesis provisorias sobre el modelo exponencial que luego se retomaran en un trabajo descontextualizado. Es decir, cómo trabajar una **evolución de los conocimientos** nuevos.

Respecto de las **fundamentaciones** específicamente:

e) .- qué tipo de actividades-problemas serían las más fecundas para propiciar la elaboración de fundamentaciones como sostén de las afirmaciones y producciones de los propios alumnos.

f) .- qué tipo de fundamentaciones esperábamos que emergieran.

g) .- qué tipo de fundamentaciones íbamos a aceptar provisoria o definitivamente.

Una **hipótesis de trabajo** que se fue consensuando durante el taller fue que "**la incertidumbre promueve en los alumnos la necesidad de confirmar y sostener sus producciones. En tal sentido es un buen contexto para la producción de fundamentaciones**".

Convenimos en desarrollar un primer conjunto de problemas con contexto - más "externo" a la matemática - donde irían surgiendo los principales aspectos del modelo exponencial: la existencia de un factor multiplicativo constante entre determinados períodos (esto es dado k existe A_k tal que $f(x+k) = A_k \cdot f(x)$ para todo x[95]), el crecimiento constante o el decrecimiento constante y la recursividad del modelo marcada por el factor multiplicativo.

Hacia el final de la etapa de la producción de los problemas contextualizados (ver Apéndice) comenzamos a discutir junto con las docentes algunos aspectos generales sobre su gestión de la clase. Esta línea divisoria es ligeramente relativa en tanto las interacciones en la clase a propósito de los problemas son parte constitutiva de las ideas que se elaboran en la producción de la secuencia. En tal sentido algunas cuestiones importantes surgieron durante la etapa de producción de consignas y luego fueron revisadas.

Acordamos con las docentes que para esta secuencia de primeros problemas con contexto los alumnos tuvieran un tiempo para explorar, discutir entre ellos, producir respuestas y sus correspondientes explicaciones en pequeños grupos. Este acuerdo se basó en dos cuestiones. Una de ellas fue la preocupación que las docentes manifestaron por el "tratamiento del error" – denominación que las propias profesoras utilizaron- y sus

[95] Al considerar la fórmula de la exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ el término al que se hace referencia en términos de k es $A_k = a^k$

consecuencias en la motivación que los alumnos mantuvieran para mostrar a los demás sus razonamientos[96].

La otra cuestión, que se enlazó con la primera y fue llevada al taller por nosotros, fue el contexto de la **oralidad**[97] - concebida como una primera posible forma de trabajo en clase. En un escenario en el que los alumnos están elaborando sus ideas en forma oral, sus producciones se confrontan con las de otros alumnos y también dialogan con la propuesta-producción del docente. En tal caso recibirían observaciones de las docentes (y compañeros) sobre sus propias producciones y estas retroacciones podrían ser rechazadas o cuestionadas o simplemente no deseadas por los alumnos, en la medida que ellas dan cuenta frente a toda la "comunidad aula" de su posición frente a un problema y desentrañan su forma de razonar. Imaginamos que esta discrepancia podría perturbar, de este modo, el mayor involucramiento posible por parte de los alumnos que deseábamos ocurriera. En función de esta previsión acordamos con las docentes que el inicio de todo problema tendría una fase de discusión en pequeños grupos que permitiera que los alumnos colaboraran, en forma oral, en la defensa y solidez de sus producciones. Buscamos así fortalecer la posición de los alumnos y preservar nuestro objetivo de trabajo en clase[98].

El contexto de producción oral fue una constante de esta investigación, presente desde nuestra concepción de un proyecto de investigación de este tipo hasta la propia situación de observación de clase. Sin embargo **la oralidad se contrapone con las modalidades más instaladas en el dispositivo escolar** en la medida que es una actividad donde el control que puede ejercer el docente sobre las producciones de los alumnos se atenúa o hasta incluso se diluye. Es por esto que creemos que el trabajo de fundamentación entra en conflicto con las prácticas típicas del dispositivo escolar. Mostramos a continuación un

[96] Utilizamos la propia formulación de los docentes pues creemos que esta forma de referirse a determinadas producciones de los alumnos tiene un significado cuyo análisis, que hemos desarrollado en el Marco Teórico, es necesario para comprender el posicionamiento docente en su gestión de la fundamentación y más en general en todo su trabajo. En esta línea creemos que para convocar a los alumnos a un trabajo intelectual es necesario superar la concepción de error atribuida tantas veces a las respuestas de los alumnos que no se encuadran en lo que los docentes esperan recibir de ellos, así como también que no respetan reglas matemáticas que los docentes conocen y que los alumnos están aprendiendo. El concepto de error suele disolver la idea de que las producciones de los alumnos obedecen a una lógica que ellos construyen durante su aprendizaje. Pasar por alto esta lógica es una forma de no ver, de no distinguir, elementos centrales de un proceso de aprendizaje.

[97] La oralidad, ya mencionada en el Marco Teórico, es una cuestión central para esta tesis pues partimos de la hipótesis de trabajo que la fundamentación se gesta en el trabajo oral.

[98] Un hecho que confirma esta previsión de los docentes puede verse en un ejemplo del capítulo 6, en el Diálogo 6.4 en el caso del problema de los cuadrados donde un alumno que había logrado una producción interesante sobre las áreas sucesivas no la ponía en discusión con los otros integrantes de su grupo que trataban el tema sino hasta que la intervención docente lo habilita y exhorta a que lo difunda, lo que nos muestra que a veces hasta un grupo menor genera un nivel de exposición no deseado que para algunos alumnos se convierte en una barrera para su trabajo.

diálogo en el Taller Nº 19 que da cuenta de la preocupación de las docentes sobre las repercusiones que un trabajo oral podría tener tanto en los alumnos como en sus propias prácticas de evaluación y seguimiento.

Diálogo 5.2. (Taller 19) La percepción de las docentes sobre la actividad desarrollada por sus alumnos y algunas consecuencias de esta modalidad de trabajo.

1.-Esp. Antes de entrar en la revisión. Sé que no hay todavía muchas clases desarrolladas, en algunas sobre todo, pero quiero preguntar. Esta propuesta de la exponencial, luego de todo este trabajo del taller y respecto de otros años ¿es igual que en otros años? ¿Es distinta?, y si es distinta ¿en qué?

2.-Doc_2. ¿La respuesta de los chicos? Muy distinta.

3.-Doc_4. Muy enganchados

4.-Doc_1. Muy activos.

5.-Esp. ¿Y a qué se lo atribuyen?

6.- Doc_2. Es una experiencia muy distinta. El trabajo de proyectar la clase es muy solitario. No tenés con quien compartirlo o consultar. Esto te arma la cabeza de otro modo.

7.- Doc_1. Los chicos se entusiasman en defender una idea y en debatir.

8.- Doc_4. y en explicarle al otro. ...(explica una situación de su grupo)

9.- Doc_2. Otra cosa que me gustaría comentar, ¡vos sos testigo de lo que trabajaron! (le dice a su observador) y cuando les puse la nota, que para mi no fue muy generosa....ellos no lo podían creer. Creyeron que les estaba poniendo mucha nota.... no pueden valorar el trabajo de ellos. Qué mentalidad que tienen de que algo que se disfrutó no se tendría que tener en cuenta!

10.-$Coord_1$. El peso de Doc_2 para su evaluación fue su participación en clase, su producción oral. Los chicos aparentemente no se dieron cuenta de lo mucho que trabajaron en este contexto. Yo no puedo comparar con otro trabajo porque no estaba presente pero Doc_2 sí porque los tiene de antes. Los chicos aparentemente no tienen idea de lo mucho que se ha hecho en clase. Doc_2 avisó varias veces que los iba a evaluar por su trabajo en clase, los chicos le preguntaban si el trabajo lo tenían que entregar y Doc_2 explicaba que no, que se trataba de trabajar en clase.

11.-Doc_3. ¿Te llevaste los trabajitos de día por día?

12.- $Coord_1$. ¡No! ¡Vio el trabajo en clase!

13.- Doc_3. A mi el problema que se me plantea es que yo en el tema anterior evalué con el trabajo en clase, pero me iba llevando hojitas pero ahora ... a veces.... hay chicos que necesitan nota y capaz que quieren una evaluación escrita porque por ahí se te escapa en la observación...

14.- $Coord_1$. Pero Doc_3 ....¡es lo mismo! .... vos decís.... escuchate lo que estás diciendo.

15.- Doc_3. Ya sé,... ahí me hace ruido, ¿no?....

16.- $Coord_1$. Vos decís: yo les evalué el trabajo pero les pedía la hoja escrita... ¿cómo crees que se ve del otro lado? Al chico le queda que lo único que sirve para la evaluación es la hoja escrita, el chico no ve otra cosa que eso que te ha entregado, el formato impreso....todavía lo estás reafirmando con eso que decís: "el que necesita nota quiere la evaluación". **Es así.... la evaluación es una hoja escrita en matemática.**

17.- Doc_1. **Pasa que la producción en matemática es fuerte si está escrita**. Las ideas que a veces son muy buenas se evaporan porque no las escriben y yo les pido que lo escriban.

18.- $Coord_1$. Pero la necesidad de escribir esa idea no tiene nada que ver con la evaluación.

19.-Doc_3. Pero de repente si ellos saben que vos necesitás que escriban más....

20.- $Coord_1$. Pero para ellos es una necesidad de registrar porque se les escapa a la velocidad a la que están pensando y hay otros pensando otras cosas.... Es un poco caótico... escribir nos hace acordar (en el sentido de consensuar).

El diálogo nos ilustra cuán presente está la producción escrita y la evaluación con su formato escrito en la cultura escolar, en el ámbito de las clases de matemática. Las docentes confrontan su entusiasmo - también visible en el propio texto del diálogo – acerca de la actividad matemática que están observando en aula en sus alumnos a partir de este proyecto junto con la viabilidad de la evaluación de dicha actividad. Una evaluación que tiene que cumplir el rito escolar: alumnos frente a un papel, resolviendo problemas, dando cuenta de sus saberes por escrito. Dispositivos escolares que no permiten atrapar determinadas actividades cuestionan de algún modo su existencia. Es en este sentido que hemos dicho, algunos párrafos atrás que **la oralidad entra en conflicto con el dispositivo escolar**.

El consenso sobre la necesidad de que los alumnos tengan un soporte de sus producciones nos llevó a acordar que se comenzaría entonces con una fase de trabajo fuertemente oral y en pequeños grupos[99]. Cada docente decidiría en qué momento realizar una puesta en común (esto es, realizar una puesta en común en cada clase o bien abordar un conjunto de problemas en una puesta en común dejando pasar las clases necesarias). No quisimos prescribir un modo de trabajo sino construir con ellas un proyecto que adquiriría recorridos particulares en función de las decisiones que cada docente tomara para gestionar sus clases. (como hemos mencionado en el capítulo metodológico, 4.1 entendemos que es el docente el que regula estos momentos en función de las situaciones que se dan en su clase: producción de los alumnos, alteraciones de la rutina de trabajo debido a factores institucionales, presencia-ausencia de grupos de alumnos, etc.).
Elaboramos enunciados donde las fundamentaciones se hicieran necesarias como una forma de asegurar-confirmar el trabajo de los alumnos[100]. Con esto queremos señalar que frecuentemente los enunciados de los problemas piden explícitamente validaciones de las respuestas de los alumnos. Decidimos no trabajar de este modo, pues esta forma artificial de propiciar la fundamentación dificulta la comprensión del sentido que este trabajo puede tener.

[99] En la instancia de pequeño grupo las discusiones orales se apoyaban también en escrituras elaboradas por los alumnos.
[100] Evitamos el pedido explícito de explicaciones con el usual formato – "fundamente su respuesta".

5.2 Anticipar las Producciones de los Alumnos

Durante la producción de consignas hubo un interlocutor implícito: el alumno. Buscábamos armar un conjunto de problemas que les permitieran trabajar a los alumnos distintos aspectos de la función exponencial. Nos preguntábamos a propósito de cada enunciado qué tipo de actividad generaría en los estudiantes. Mostraremos aquí como las docentes pensaban las consignas en relación a los alumnos.

Diálogo 5.3. (Taller 13) Escritura del enunciado de los piojos y anticipaciones de las interpretaciones posibles de los alumnos.

> Doc$_1$. "es que **los chicos te van a preguntar** pero los piojos ¿cómo los vamos a contar, contaremos las liendres?
> Coord$_2$. Si es verdad.
> Doc$_1$. Pero bueno también podemos pensar este problema como un problema discreto, como un paso intermedio donde el chico acepta mejor la continuidad[101]. Acá le ponés un período. Es el n/5.
> Doc$_2$. Yo **supongo que van a hacer eso**. Igual me va a costar un montón armarlo. El exponente fraccionario cuesta.
> Coord$_2$. También recuerden que hemos dicho que cuando la fórmula no se puede construir dejamos el trabajo para un momento posterior, pero dejamos aquí la marca de nuestra pregunta.

Queremos ilustrar en este ejemplo, por un lado, la posición de las docentes de elaborar una secuencia que desafiara a los alumnos pero que al mismo tiempo estuviera dentro de sus posibilidades. Por otro lado queremos mostrar la concepción de un trabajo que tenga una evolución en la producción de los alumnos dejando a cargo del docente la gestión de tal evolución. Con tal fin acordamos con las docentes una gestión que se encargara de mostrarles a los alumnos su **progresión** en el trabajo y la idea de que el aprendizaje tiene instancias de **incompletitud**.

Durante los talleres discutíamos colectivamente. Pero además de esta actividad, toda la producción de consignas se apoyó no solo en la discusión colectiva sino también en la producción individual de las docentes que, entre encuentro y encuentro, elaboraban propuestas que aportaban al taller. Estas propuestas incluían las consignas y las posibles

[101] Tomamos la intervención de la profesora tal y como fue dicha en el taller. Notamos que en este problema no es factible hablar de continuidad no obstante este era un tema que estábamos tratando: trabajar en los problemas desde los casos discretos hacia los continuos y una pregunta que flotaba era como ir haciendo el puente desde un modelo hacia el otro. En este sentido el comentario de la profesora se entiende en el siguiente sentido. El enunciado habla de lo que ocurre cada cinco días y nos podemos preguntar por los piojos en todos los días, o en todo momento, se pretendía una ruta hacia la continuidad.

explicaciones de las producciones esperadas para sus alumnos y del móvil que ellas tenían cuando las elaboraban.

Ilustramos aquí una discusión en el taller acerca de consignas producidas originalmente por algunas docentes puestas a consideración de todos los participantes del taller. En este extracto mostramos de qué forma las docentes imaginan las posibles producciones de sus alumnos teniendo en cuenta los contenidos explícitos e implícitos de las preguntas[102].

Diálogo 5.4. (Taller 13) Interpretaciones de los alumnos en la anticipación docente. El problema de los cuadrados que se expanden.

(Una docente lee la consigna que ha elaborado y la somete a discusión).

Doc$_2$. ¿Podrías indicar cómo es el área de este último con respecto al primero? Si repites este procedimiento varias veces ¿podrías indicar como quedarían las áreas sucesivas respecto al primer cuadrado? ¿Se podría dar una expresión generalizada para las áreas?
Doc$_1$. Por ahí depende del lugar en la cadena que ocupe. **Si vos le pedís la expresión generalizada del área ¿de qué va a depender esa expresión?** Cuál es la variable independiente?.
Doc$_2$. Yo estoy pensando como ofrecerle al chico de manera que lo entienda.
Doc$_1$. **Yo lo que digo es que cuando pregunta por la expresión generalizada... él tiene que ver cuál es la variable independiente**.
Doc$_2$. Sí, si te entiendo lo que pasa es que ....
Doc$_1$. No, yo digo, lo que se pregunta es una fórmula.
Coord$_2$. Ya sé lo que trata de decir Doc$_1$. Insisto en la denominación que le encontró Doc$_4$. Es que como hemos decidido llamar **paso uno** a este paso hay que ver en ese momento qué valor toma la variable y según eso te quedan distintas fórmulas. Doc$_2$ quiere que comparen áreas. La otra es decir que el cuadrado inicial tiene área uno, o que las medidas del cuadrado inicial es lado=1 y preguntarle por las áreas de los pasos 2, 3 y ... otro... Ah, el paso 1 es el segundo cuadrado. Yo acá veo útil, en éste, ponerlo en función de los pasos.... y en el otro problema....
Doc$_1$. Y en el otro te va a quedar n-1 ¿eso decís?
Coord$_2$. Estoy notando que hay una diferencia. Este cuadrado, que para nosotros es el segundo, es el cuadrado del paso 1. Hay que decir: este es el cuadrado uno este el dos, etc.
Coord$_1$. La variable es n-1. Igual si ponemos valor al cuadrado inicial no les queda otra que tomar de variable independiente al paso. Si lo dejas sin valores puede ser que tengan varias opciones.

Notamos aquí que la propuesta de la docente "dar una expresión generalizada para las áreas" produce una importante discusión sobre el significado de "expresión generalizada", que está implícitamente pidiendo la producción de una fórmula. Ésta, a su vez, necesita la identificación de variables independientes posibles, dado que la dependiente ya está dada por el pedido "del área". La intervención de una de las docentes subraya que dicha identificación no tiene nada de evidente para los alumnos. Cada docente encuentra

[102] Queremos destacar que los docentes trabajaban en varios cursos a los que se podría llevar esta producción y que durante la mayor parte del tiempo que llevó esta etapa de diseño de la secuencia no supieron en qué cursos se acordaría la observación. Esto contribuyó a la configuración, para cada docente, de un alumno genérico, aunque siempre, claro está, construido sobre la experiencia de cada uno como docente.

alternativas para las variables y al mismo tiempo alternativas para un enunciado adecuado que promueva su uso. Las profesoras ponen en evidencia los cambios, no menores, en la elaboración de los alumnos que pueden producir sutiles cambios en los enunciados.

Doc$_1$. ¿Y vos decís de pedir la fórmula y ellos van a tener que buscar la variable?
Coord$_1$. Y van a tener que decidirlo y hay que remontar esa discusión.
Coord$_2$. ¿Por qué tenemos este problema? El paso no nos solucionaba esto?
Coord$_1$. ¿Eso que buscás?
Coord$_2$. Estoy pensando que el chico dice "este tiene área uno o área A"
Coord$_1$. O nada.
Coord$_2$. **Si no le decimos nada ¿le pondrá Área A?**
Coord$_1$. Tendrá que comparar el área de ese con el que sigue
Coord$_2$. Es que le estamos diciendo que **compare** y después que **generalice**.
Doc$_1$. ¿Vos decís que le pidamos una tabla?
Coord$_1$. ¿Y lo pensemos más como ver una generalidad? ¿Como la construcción de una fórmula? **Hay que armarlo para que funcione en el sentido que queremos que funcione**. ¿cuál es el objetivo Coord$_2$.?
Coord$_2$. Yo no lo llegué a pensar así, no es que yo piense que cada ejercicio tenga que tener un objetivo. Yo creo que estamos discutiendo qué es lo más interesante que levanta. Según eso puede ser un primer ejercicio o no. Ya teníamos un primero.
Coord$_1$. **Una cosa es pedirles a los alumnos producir una fórmula observando una regularidad y otra cosa es que les pidas que comparen las áreas**... son otros argumentos. .
Coord$_2$. **Eso es lo que estamos buscando acá, la naturaleza de los argumentos**.

Esta situación fue repetida en otras ocasiones: el esfuerzo de los participantes por ponerse en el lugar de los alumnos es notable. Las primeras exploraciones sobre los problemas consistían en imaginar qué producciones surgirían a propósito de un enunciado para luego, a partir de una comparación, conjeturar en qué casos la necesidad de argumentar, validar, confirmar propiciaría mejor la actividad de fundamentar. En este caso puntual las alternativas eran dos: elaborar consignas que propiciaran la observación de una regularidad de las áreas por parte de los alumnos y a partir de ella la producción de una fórmula que diera cuenta de tal regularidad o alternativamente propiciar la comparación de áreas sucesivas y a partir de allí una observación de la recurrencia para poder enunciar la fórmula. Como se ve en el enunciado de la secuencia esta segunda posición imperó por su potencial para producir fundamentaciones.

El intercambio entre docentes sobre la elaboración de consignas y la definición del objetivo de la consigna, junto con las producciones esperadas - deseadas de los alumnos, nos permitieron comprender que no podríamos anticipar cada uno de los razonamientos posibles. La discusión de estos enunciados entre docentes y la confrontación de nuestros propios y distintos desarrollos nos ayudó a imaginar que las producciones de los alumnos podrían sorprendernos.

Para ilustrar esta situación mostramos un intercambio entre docentes durante la producción del enunciado del problema de los cuadrados donde el área iba en disminución. Una docente propone pedir a los alumnos la búsqueda de sucesivas áreas para cuadrados de distintas áreas iniciales, de modo que el factor A de la fórmula $f(n) = A \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ apareciera como una generalización de todos estos casos. Otra docente hace una propuesta para comenzar con A=1 y luego propone analizar el caso A=1024

Diálogo 5.5. Producción de enunciados que promuevan múltiples estrategias por parte de los alumnos.

$Coord_2$. ¿cómo seguimos el enunciado?
Doc_1. Después cambiás el área del cuadrado inicial "si el área del cuadrado inicial es de 1024, ¿podrías contestar las mismas preguntas a partir de tus respuestas anteriores?
$Coord_2$. Ojo porque esto no es lo mismo que planteaba Doc_2.Acá el área es una potencia de 4, en los ejemplos que daba Doc_2 el área inicial era cualquier otra, por ejemplo cinco o siete y creo que se levantan distintas estrategias. Aquí siendo una potencia de 4 estamos haciendo un corrimiento, es decir, que en algún paso llegamos a un cuadrado de área 1.
Doc_2. Yo no lo plantearía con números grandes porque estoy apuntando a la escritura de una nueva fórmula. **Y creo que con números grandes es más difícil** y **no permite ver lo que se hace de distinto**.
Doc_1. **Yo lo pensé por dos lados. Un chico puede hacer todo de nuevo, con sus mismos razonamientos, o también puede pensar, y** por eso va la pregunta en **referencia a sus respuestas anteriores**, que a cada área obtenida la multiplica por 1024, por eso le puse a partir de las preguntas anteriores. Hay una transformación de la función, porque va dilatando la función. Aunque no lo sepa esto, lo está haciendo.
$Coord_2$. Ah yo pensé en el corrimiento del que habíamos hablado en el otro encuentro.
Doc_1. Eso también puede ser. Por eso puse la potencia, para permitir las dos estrategias.

La docente que propone utilizar una potencia de cuatro en realidad luego está pensando para la resolución de su pregunta, en la dilatación, donde no es necesario que el número sea una potencia de cuatro. Por su parte, otra docente que ve que el número en cuestión es una potencia de cuatro observa que los alumnos podrían realizar un par de pasos, encontrar el paso donde el área es igual a uno y utilizar las respuestas anteriores para seguir, simplemente sumando los pasos que ya calculó necesarios para obtener el área uno. Finalmente la docente que propuso la potencia de cuatro ve como posibles ambas estrategias.

Anticipar las producciones de los alumnos nos permitió configurar escenarios posibles. No estaba presente una concepción de control total y anticipación completa de las producciones de los alumnos pues no nos parece una hipótesis aceptable. Entendemos que esta confrontación fortalece la posición del docente para comandar una clase donde, como veremos luego, emergen estrategias diversas en un contexto oral de actividad lo que demanda del docente una importante versatilidad para entrar en contacto con las producciones de los alumnos en "tiempo real". En este sentido creemos que el taller fue conformando una **intencionalidad docente**.

5.3 Delineando la Fundamentación

Todos los temas tratados en el taller eran motivo para revisar la concepción que nos íbamos formando acerca de la fundamentación. . En una de las reuniones una docente trajo las producciones de sus alumnos a propósito de una actividad que les propuso. En este apartado presentaremos una serie de explicaciones de los alumnos que fueron objeto de análisis por parte de las docentes y que nos ayudaron a precisar las características de esta actividad. La presentación consiste en la síntesis de las ideas surgidas durante la lectura de las producciones de los alumnos. No hay una exhaustividad de casos en la presentación que hacemos pues se trató de un material presentado a propósito de una actividad puntual en un curso.

Una docente había presentado a sus alumnos como actividad escrita un conjunto de afirmaciones acerca de las sucesiones de números reales, a saber:

i) a_n es convergente en 2.

ii) a_n es geométrica.

iii) a_n es una sucesión tal que sus términos pares y sus términos impares tienden a $-\infty$.

iv) a_n no es aritmética.

v) a_n es oscilante.

vi) a_n es una sucesión tal que sus términos pares tienden al $-\infty$ y sus términos impares tienden al $+\infty$.

vii) a_n es divergente.

viii) a_n es una sucesión de signos alternados.

ix) a_n es aritmética.

x) a_n es tal que existe i tal que para todo $n > i$ se cumple que $a_n > 100.000.000$.

xi) a_n es tal que para todo n se cumple que a_{n+1}- a_n es cte distinta de cero.

El enunciado de la actividad es el siguiente:

Las afirmaciones i) a xi) se refieren a sucesiones. Elige dos enunciados, para cada caso, que puedan organizarse bajo la siguiente estructura: "Si........(hipótesis)........... entonces ....(conclusión)..............." Para cada grupo que armes deberás presentar la fundamentación que te permita asegurar la **conclusión** a partir de la **hipótesis.**

Presentaremos algunas elecciones y fundamentaciones (según la concepción de los alumnos) y el análisis realizado en el taller.

*Rta(1): Si **i)** entonces **iv).*** ***Sí una sucesión a_n es convergente en 2 entonces a_n no es aritmética.*** *Porque no existen sucesiones aritméticas que sean convergentes. Las sucesiones aritméticas, al ser su gráfica lineal, son siempre divergentes (al $+\infty$ o al $-\infty$)*

La fundamentación que la alumna construye tiene una estructura "no Q implica no P" que podría escribirse como "si fuera aritmética entonces no sería convergente, en particular no sería convergente a 2" aunque en el lenguaje coloquial que se utiliza esta estructura no se hace explícita. Más aún, compartimos con el equipo que el uso de esta estructura no indica que la alumna sea consciente de la presencia de esta estructura en su razonamiento. La explicación de esta implicación se apoya en un recurso de representación gráfico de las sucesiones que se había utilizado en clase según nos explica la profesora a cargo del curso. Algunas sucesiones habían sido representadas en clase como el gráfico punteado de funciones, en particular las aritméticas a partir del gráfico de funciones lineales. La alumna se apoya en esta gráfica – aunque no la realiza, es decir que la está evocando - para indicar que tenderá hacia más o menos infinito.

Una primera revisión de este escrito en el taller nos llevó a considerar que la sentencia organizada por la alumna es falsa y la fundamentación no es válida - no ya en su estructura sino en su contenido – ya que la alumna sostiene que no existen sucesiones aritméticas convergentes olvidando el caso de las sucesiones aritméticas constantes o de razón nula presentadas en el curso[103]. Analizamos con las docentes que una producción como ésta da lugar a una intervención docente que plantee a los alumnos qué cambios harían, por un lado, para que la sentencia fuera verdadera y por el otro para que la explicación fuera válida.

> *Rta(2): Si **viii)** entonces **iv).***
>
> ***Sí una sucesión a_n es una sucesión de signos alternados entonces a_n no es aritmética.***
>
> *"a_n no es aritmética porque las sucesiones aritméticas son divergentes o convergentes, pero no pueden ser oscilantes".*

En esta respuesta también aparece el uso implícito de la estructura "no Q $\Rightarrow$ no P" y en esta caso la sentencia organizada es verdadera.

La alumna sostiene su explicación en una caracterización realizada en clase sobre las sucesiones aritméticas ya citada por la otra alumna en la cual, mediante un recurso gráfico se concluyó que las sucesiones aritméticas no constantes divergen en tanto las constantes convergen. Sin embargo la alumna no se apoya en la representación gráfica - que es portadora de mayor información sino en la conclusión a la que habían arribado en clase a partir de la representación gráfica, esto es, que las sucesiones aritméticas son divergentes o convergentes. A partir de este hecho - ser convergentes o divergentes - no se puede inferir que la sucesión no resulte de signos alternados. Entendimos en el taller que hay aparentemente un implícito en la explicación que necesita revelarse y esto nos hizo pensar que la **fundamentación es incompleta**. Las docentes propusieron así que esta era una oportunidad para intervenir proponiendo a los alumnos, por un lado, ejemplos de sucesiones convergentes y divergentes y también oscilantes, y por el otro, observar otras características presentes en la información gráfica que permitan sentenciar la imposibilidad de oscilar para este tipo de sucesiones.

Otra fundamentación dada por otro alumno para esta misma conexión de enunciados es la siguiente:

> *"Una sucesión de signos alternados no puede ser aritmética ya que en esta todos los términos están ligados al anterior por la suma de una constante, por lo que no puede ser una sucesión de signos alternados"*

[103] Este hecho queda confirmado con su explicación gráfica ya que no tiene en cuenta las funciones lineales constantes.

El recurso para fundamentar es la estructura "no Q ⇒ no P" el mismo pero en este caso se apoya en la escritura utilizada en clase, según nos explica la profesora, para definir a las sucesiones aritméticas de la forma a_n=n.r + b y la caracterización de la diferencia entre términos sucesivos de la sucesión también realizada en clase. El alumno sostiene de este modo que sumando reiteradamente una constante no se puede ir cambiando de signo y esto, entendimos, resulta una fundamentación válida de su conexión.

*Rta(3): Si **vi)** entonces **viii).***

Si a_n es una sucesión tal que sus términos pares tienden al $-\infty$ y sus términos impares tienden al $+\infty$, entonces a_n es una sucesión de signos alternados.

"Porque los términos pares son negativos y los impares son positivos".

La sentencia organizada es falsa y la fundamentación no es válida[104]. El alumno está imaginando que el comportamiento que se espera a partir de un N suficientemente grande está ocurriendo desde el comienzo. Sin embargo destacamos que tiene algunos elementos que esperamos de una fundamentación, esto es, la explicación es genérica ya que no se apoya en un ejemplo sino en las características de la clase que describe, (al menos en la formulación que vemos, es probable que el alumno esté pensando en ejemplos mientras escribe pero está dando razones para toda la clase de sucesiones que se menciona) y la formulación tiene una estructura deductiva - ternaria que es la que se espera para este trabajo. Acordamos con las docentes que una intervención que muestre ejemplos de sucesiones que cumplan con la hipótesis elegida pero que tengan un principio del recorrido donde los primeros términos no sean negativos los pares y positivos los podría poner en discusión su afirmación, aún reconociendo el valor relativo de los contraejemplos –después de leer a Balacheff- para rechazar una afirmación falsa. Resultaría interesante a partir de este contraejemplo recuperar con los alumnos cuál ha sido el supuesto empleado por el alumno para su deducción. Seguramente a partir de ello se podrían buscar otras conexiones. Este último aspecto nos contactaba con una condición que se fue delineando como una idea potente a lo largo de todo el trabajo con los profesores: discutir con los alumnos las razones que los llevan a formular una proposición o proponer un procedimiento aparece como una oportunidad de adentrarse con ellos en una reflexión sobre el proceso mismo de fundamentar.

[104] En el sentido, tal como lo formula Klimovsky (1994: 86) que conserva la verdad.

Rta(4): Si ***viii)*** *entonces* ***v).***

Si a_n es una sucesión de signos alternados entonces es oscilante.

"Por ejemplo $a_n = 1/n$ si n es par (convergente a 0), y $a_n = -1/n + 2$ si n es impar (convergente a 2)".

La alumna asocia dos afirmaciones produciendo una sentencia que es falsa. Es interesante que no se trata de cambiar el papel de hipótesis por el de conclusión – entendimos que no hay una confusión en tal sentido - ya que no son verdaderas ninguna de las dos estructuras posibles: las sucesiones de signos alternados no tienen por qué ser oscilantes y las sucesiones oscilantes no tienen por qué ser de signos alternados.

En el momento de producir una fundamentación la alumna da un ejemplo, sin analizarlo ni proponerlo en carácter de ejemplo genérico, simplemente "ostenta" (en el sentido que Balacheff y otros le asignan a la ostentación) su ejemplo. Precisando nuestra concepción de fundamentación acordamos en el taller que "mostrar" ejemplos no resulta suficiente. Pero, además el ejemplo que construye la alumna no cumple la hipótesis y sí cumple la conclusión, ya que como bien ella lo señala, en términos de convergencia, se trata de una sucesión con dos puntos de acumulación. Es muy probable que el hecho de que una de ellas tenga como fórmula la expresión positiva "1/n" en tanto la otra tenga en parte de su fórmula la expresión negativa "–1/n" haya hecho creer a la alumna que tomaría signos distintos, con lo cual es posible que en su parecer este sea un ejemplo de una sucesión que cumple con ambas características: signos alternados y oscilante. No sabemos cómo estableció la alumna la relación entre la sentencia y el *ejemplo* ya que cabe la posibilidad de que haya pensado el ejemplo y luego *acomodado* la sentencia.

La intervención docente -propuesta y analizada con las docentes en esta oportunidad – puede albergar dos fases de trabajo. En una primera etapa se puede analizar con los alumnos las características del ejemplo presentado para que ellos adviertan que no se trata de una sucesión de términos alternados . En una segunda etapa se puede promover la búsqueda de ejemplos de sucesiones con signos alternados alojando la pregunta "¿resultarán inevitablemente oscilantes?". Las características de los ejemplos que se propongan podrán poner en evidencia la distinción entre sucesiones oscilantes y de signos alternados. Por último y a modo de reflexión se podrá analizar el papel de un ejemplo en la producción de una fundamentación utilizando algunos de los propios ejemplos propuestos por los alumnos que cumplan con la hipótesis.

Para concluir con este apartado observamos que el análisis de esta actividad realizada en uno de los primeros talleres instaló en las docentes la necesidad de atender a las formulaciones de los alumnos desentrañando la lógica de sus argumentos.
También se nos hizo evidente a todos los que leíamos las producciones y no habíamos participado en las clases que las fundamentaciones estás íntimamente vinculadas a los conocimientos disponibles para los alumnos: aquello que necesita fundamentarse es, en principio, aquello que no está ya instalado en clase como un saber institucionalizado y, a su vez, la fundamentación se alimenta de los conocimientos establecidos. Así la fundamentación adopta un aspecto local pues depende esencialmente de la forma en la que circularon los saberes en clase. Al mismo tiempo comprendimos la importancia que cobran los conocimientos producidos en clase en función del papel que podrán tener en las explicaciones de los alumnos.

5.4 Interacciones Docente - Alumno

Una vez acordada una etapa inicial de trabajo grupal para cada problema, surge otra inquietud relacionada con el rol del docente durante esta actividad de los alumnos. Las docentes, en esta fase de trabajo, se planteaban dos escenarios posibles. En uno de ellos sus intervenciones tenderían a preservarse de ampliar las explicaciones que los alumnos pudieran elaborar y limitarse a escucharlas sin señalar posibles errores esperando la etapa de puesta en común mientras que, en el otro escenario, podrían participar más activamente aportando contraejemplos que dieran señales sobre contradicciones y absurdos en las respuestas de los grupos propiciando así cambios y evoluciones en sus desarrollos. En la primera situación dejarían evolucionar las producciones de sus alumnos aunque al mismo tiempo dejarían también desprovistos a aquellos alumnos y/o grupos que no supieran qué plantear frente a los problemas. Emergen en esta instancia las interpretaciones docentes de diferentes opciones metodológicas para la enseñanza. Aún cuando todas se ubican en una perspectiva constructivista del conocimiento el abanico de opciones desde una "presencia

muda" del docente hacia una presencia activa del docente se pudo apreciar en diferentes momentos del taller.
Situándose el docente en el primer escenario y absteniéndose de participar en grupos, las relaciones elaboradas por los alumnos tendrían como primera retroacción la que ofrecieran sus propios compañeros de grupo en tanto que el debate posterior funcionaría como segundo ajuste o retroacción para las producciones grupales. En cambio en el segundo escenario, al promoverse la interacción docente-alumno se generarían una primera evolución de las nociones y relaciones postuladas por los alumnos con una consiguiente posición más sólida de la producción de cada grupo.
Las docentes se preguntaban de este modo qué características podría adquirir esta primera fase adidáctica[105] del trabajo. Esta inquietud de las docentes mostraba así que existen concepciones que asocian lo adidáctico con la ausencia del docente. Al mismo tiempo se concibe la intervención docente diluyendo la autonomía o la construcción de autonomía de los alumnos. La observación nos permitió confirmar que el docente puede modificar el medio de los alumnos de diferentes maneras produciendo distintos escenarios en los que se sostiene la adidacticidad, a partir de sus intercambios con los grupos.

Nos interesa mencionar con referencia a esta inquietud planteada que en ocasiones los docentes conciben-anticipan - esperan que los alumnos recorran una serie de pasos en la resolución de problemas (seguramente en relación con la propia forma en la que los docentes lo han concebido) y ven las actividades de los alumnos en términos de coincidencia o disidencia respecto de este recorrido imaginado por ellos. Los recorridos imaginados (que surgen en el análisis previo de los problemas) pueden ser más simples o más complejos, más lineales o más abarcativos de opciones pero en cualquier caso cuando el docente pone en primer plano "una forma de trabajo" y analiza las producciones en términos de "más o menos distantes" respecto de su forma de pensar el problema, concibe un trabajo menos rico. Los alumnos tienen que dirigir su accionar hacia aquello que el docente ha concebido[106].

En otra lógica trabaja el docente que se posiciona desde las producciones de sus alumnos y se cuestiona la posibilidad (o no) de resolver un problema (o responder a una consigna siendo ésta la que fuere) a partir de las ideas que ha planteado un alumno.

[105] En el Marco Teórico se presenta la noción de adidacticidad. Aclaramos que este término no fue un término usado con los docentes.
[106] Este tema es mencionado en el Marco Teórico en el apartado "El docente y el error".

Esta cuestión es absolutamente central en referencia a la producción de fundamentaciones y al involucramiento de los alumnos en un trabajo intelectual. Es por eso que la hemos tomado como uno de los aspectos de la **intencionalidad docente.** Ya hemos mencionado que la producción de argumentos, explicaciones, demostraciones, validaciones no es algoritmizable y los recorridos no son únicos. **Entendemos que para que un alumno pueda ser productor se requiere un docente que pueda pensar junto a él**.

Convenimos con las docentes que su intervención durante la fase de trabajo grupal estaría condicionada por la posibilidad de los alumnos de producir ideas: intervendría más centralmente a través de confrontaciones y devoluciones en aquellos casos en que los alumnos se vieran frenados en su trabajo por una duda-contradicción u otra situación. Este acuerdo daba un buen margen de maniobra a las docentes.

A esta primera fase de intervenciones docente alumnos sigue una segunda fase en la cual los alumnos, ya en una puesta en común, comunican, discuten y analizan sus producciones, ¿qué harían las docentes frente a producciones muy homogéneas o muy heterogéneas? En referencia a las fundamentaciones ¿qué aceptarían como fundamentación? Estas cuestiones ocuparon nuestra atención a continuación.

Resolvimos en equipo que si las explicaciones de los alumnos se apoyan en ejemplos que "se muestran", si no hay anticipación, ni exploración, si las respuestas son contingentes cada docente retomaría durante la interacción el cuestionamiento de tales explicaciones a través de preguntas sobre la validez de sus explicaciones en otros contextos: "esto que ustedes dicen ¿será siempre así?". Esta formulación a la que llegaron ¿les da seguridad, certeza?, ¿es la más amplia posible?, ¿tiene en cuenta todos los posibles?, ¿se contrapone a la que se formuló la clase anterior?. La **memoria de clase** comenzaba así a ser una cuestión relevante para el progreso de esta actividad.

En la etapa final del taller cuando ya todos habían finalizado sus clases, algunas docentes señalaron que este aspecto de la gestión de la clase las confrontó con prácticas a las que no estaban acostumbradas. La escuela, entendemos, define para el docente un lugar distinto, y esta propuesta chocó en este aspecto y en tantos otros con algunos dispositivos escolares. Las docentes se vieron en la necesidad de revisar sus prácticas y resolver sus intervenciones "controlando sus impulsos de intervenir con explicaciones en las producciones de sus alumnos" (las comillas señalan los términos utilizados por las propias docentes), o bien, como nosotros hemos denominado, "regulando su asimetría". Esta tensión se vio en la observación de clase. La propuesta de trabajo analizada en el taller trató de formas distintas la idea de un estudiante autónomo. Sin embargo la institución escolar con sus marcas indelebles de control fagocita algunas alternativas de trabajo. Los docentes van maniobrando dentro de algunos espacios que a veces caen por el mismo peso institucional. Burbules señala, en su estudio sobre el diálogo en la enseñanza, la necesidad de "prestar atención a los contextos institucionales e ideológicos que constituyen la situación de habla; no hace falta decir que esos factores suelen obstaculizar las posibilidades dialógicas de determinados participantes en situaciones particulares, y que no siempre son remediables a pesar de la persistencia y de las buenas intenciones de los participantes" (Burbules: 1993, 41). Encontramos dos aspectos institucionales relevantes del contexto - como lo señala Burbules - a los que debimos prestar atención durante el proyecto pues entendimos condicionaban la emergencia de la fundamentación puntualmente pero, más en general, de una modalidad de trabajo en el aula tal y como la planteamos. Uno de ellos es el conjunto de expectativas que tiene el alumno respecto del docente descriptos por la TS en el concepto de "contrato didáctico". Otro de ellos es el conjunto de expectativas que tiene la institución escolar respecto del docente que condiciona su tarea, naturalizando ciertas prácticas, como por ejemplo la de predeterminar el tiempo asignado a la enseñanza de un tema independientemente de la "reacción" de los alumnos.

5.5 El Alumno Productor de Ideas

La configuración de una trabajo fundamentado traía aparejada otra configuración: la de un alumno con capacidad para producir ideas. Teníamos ideas generales sobre la representación de los alumnos que tenían las profesoras de este equipo surgidas de las entrevistas iniciales y sabíamos que las distintas concepciones posibles iban a influir en la gestión de clase. El taller dio oportunidad a que las docentes plantearan en términos de posibles y de obstáculos una representación de sus alumnos. También el propio Taller fue modificando, a veces solo parcialmente, esta configuración. En este apartado presentamos los emergentes del taller y el tratamiento que tuvieron.

5.5.1. Aceptación y rechazo

En el primer taller algunas docentes trajeron como inquietud la resistencia de los alumnos para estudiar ciertos temas de matemática, como un hecho que se repite año tras año en los mismos temas. La resistencia de los alumnos surgió como tema en la medida que debíamos definir el área temática en la que íbamos a desarrollar el proyecto. Durante muchos meses de trabajo - aún después de haber definido el área conceptual donde trabajaríamos - las docentes no tenían claridad respecto de la adhesión o rechazo que nuestro proyecto de enseñanza tendría entre los alumnos. Queremos decir con esto que todo el grupo tenía presente que una condición para el aprendizaje es que el alumno acepte la devolución que le hace el docente de la situación adidáctica (aunque ningún miembro del equipo lo planteara en estos términos). Interpretamos que en función de esta incertidumbre y también para alimentar el proyecto, las docentes ensayaban en sus clases algunas actividades preliminares que incorporaban elementos de la discusión desarrollada en el taller y cuyo funcionamiento en las aulas a la vez alimentaba las discusiones del taller. Las docentes testeaban de este modo el potencial del proyecto del trabajo de fundamentación en el que estaban inmersos.

Con el correr de tiempo y la puesta en escena de las actividades que habíamos desarrollado las profesoras pudieron constatar –y nosotros también- que los alumnos adhieren con genuino interés a un proyecto de enseñanza donde la figura central es el propio alumno en su calidad de productor de ideas. En este sentido la experiencia de trabajo colectivo de construcción de un proyecto –como lo hemos señalado al principio de este capítulo- modifica para estas profesoras una perspectiva muy instalada en ciertos ámbitos según la cual los alumnos se motivan más o menos en función de los temas que se traten. Aunque no hemos profundizado estas ideas con las profesoras del taller, el trabajo realizado nos permite vislumbrar la potencialidad de los espacios de trabajo compartido sobre proyectos para el aula para poner en discusión ciertos puntos de vista muy arraigados. Consideramos que es necesario seguir explorando acerca de esta potencialidad.

5.5.2. El lenguaje matemático en las producciones de los alumnos

La fundamentación tal y como lo hemos planteado en el Marco Teórico se concibe desde un lenguaje familiar. Esta característica fue bienvenida cuando la planteamos a las docentes ya que ellas en su actividad de enseñanza son conscientes de la necesidad de permitir que los alumnos utilicen expresiones sin rigor matemático en sus producciones, explicaciones y razonamientos tanto escritos como verbales - esto es dar cabida en clase a una informalidad en el lenguaje - como una forma de propiciar la participación. Todas coincidieron en que estas primeras formas de expresión se iban luego enriqueciendo con el aporte del docente y por lo tanto se propicia una evolución en el lenguaje. (Taller Nº 1, p-9) La evolución del lenguaje estaba presente en las docentes – siendo entonces pre-existente al taller- y se hablaba entonces de una graduación en la incorporación y uso de expresiones matemáticas. Transcribimos un breve intercambio en el cual una docente se pronuncia sobre el valor de algunas explicaciones de los alumnos que si bien carecen del "lenguaje apropiado dictado por la matemática"[107] son portadoras de las ideas y conceptos matemáticos que se espera se pongan en juego en la clase

Diálogo 5.6. (Taller 1) Sobre las configuraciones de una docente acerca de lo que puede constituirse en una fundamentación.

Doc$_1$. Ellos buscan muchos ejemplos. Creo que el ejemplo es protagonista en la validación-fundamentación. Por ejemplo, cuando uno busca ejemplos que cumplan condiciones y de repente aparece el ejemplo que no cumple - "el contraejemplo" - y eso es muy bueno.

Coord$_2$. En el otro caso podría decirse que en algún momento el cúmulo de ejemplos condensa en un ejemplo genérico donde hay, muchas veces aunque no todas, armada una fundamentación, ¿no?

Doc$_1$. Sí claro. Suponete estaban analizando sucesiones que eran divisiones de polinomios y estaban analizando los límites. Por ejemplo $\frac{n^2+1}{n}$. Un alumno dice que n^2 va a infinito y que n también. Pero **otra chica dice que n^2 va mucho más rápido y que en las sucesivas cuentas que se pueden hacer se separan. Entonces si la brecha es cada vez más grande eso tiene que ser divergente**. Para mí eso es una validación - fundamentación

[107] Las comillas intentan resaltar el valor relativo de la expresión. Como hemos señalado en el marco teórico, la adecuación del lenguaje es relativa a una comunidad y la institución Matemática tampoco tiene parámetros universales. Cuando los docentes hablan de "lenguaje apropiado de la Matemática" suelen tener como referencia aquello que se ha instalado en la institución escolar a lo largo del tiempo, no necesariamente a la comunidad Matemática.

(las otras docentes coinciden con Doc_1 en considerarlo una validación-fundamentación).

Doc_1. Sí claro! **Para mi es una validación. Lo que pasa es que por ahí no usó la noción de límite....** (dicho con tono de enumeración meticulosa)

$Coord_2$. Vos lo que querés decir es que no es estrictamente una demostración. "no lo demostró"

Doc_1. A ver (con risa) cuando nosotros estudiamos matemática....

$Coord_2$. Eso no hubiera sido aceptado! (risas)

$Coord_2$. Bueno pero a vos te satisface eso ahora porque **ahí hay entendimiento**. En esa explicación había alguien que estaba entendiendo de qué cosa estaba hablando. Después el consabido $\forall\, \varepsilon\, \exists\, n\, /...$ es pura retórica, no?, suena más a un manejo de un lenguaje sin que haya necesariamente entendimiento. Por eso yo entiendo el comentario anterior (en referencia a lo que se aceptaba o no antes) y entiendo su pregunta (realizada por el mismo profesor en otra parte no reescrita de este diálogo) acerca de si este tipo de ejercicios lleva al alumno a entender qué hace cuando produce una deducción y lo ayuda a comprender en qué consiste el acto de fundamentar o si se trata de un "como si".

Doc_1. Yo no lo tomé como una destreza en el manejo de un lenguaje.

$Coord_2$. Sí pero fijate que muchas veces sentimos una cierta incomodidad en el momento de enseñar ciertos temas de cierta forma y que esa incomodidad deviene de comprobar que muchas veces ese manejo, uso y ostentación del lenguaje es bastante mecánico y no trae entendimiento. **Y ahora que estamos pensando acerca de ciertas prácticas podemos decidir qué queremos hacer entrar y qué no en este juego para que lo que se haga no consista en repetir de memoria un repertorio de afirmaciones sino en entender – aunque sea con menos vocabulario y formalidad – por donde van las ideas.** Pero eso que está diciendo en este contexto lo va a poder trasladar a otros, no hace a los números que pusiste ni a la situación que le pusiste, y es más por ahí hasta lo va a sacar de la matemática y por ejemplo lo va a llevar a una clase de física. Por eso me parece que es vital... distinguir de "ponerse contenta o yo me doy por satisfecha en tanto conformidad" a **"consensuar que esto es para nosotros una explicación razonable"** y luego, a partir de ahí ver como los propios alumnos acuerdan y comprenden cuáles son aquellas explicaciones que son aceptables de aquellas que no".

La docente señala que dar cabida a un lenguaje coloquial puede favorecer la producción de explicaciones portadoras de entendimiento y toma distancia de la concepción del lenguaje como destreza. A la vez reconoce que es ella, en tanto profesora, la que decide y regula qué aceptar y qué no. Priorizar la entrada de los alumnos en un diálogo les permite así, no solo dar cuenta de sus ideas sino que también aporta a la construcción de nuevas ideas. Veremos en el Capítulo 7 como la Fundamentación puede promover tanto la validación de las proposiciones que se sostienen como también puede ser un instrumento para la construcción de nuevas ideas.

5.5.3. El tiempo en la escuela

Al finalizar la producción de los problemas con contexto y de cara a la presentación de los problemas descontextualizados propusimos a las docentes realizar con los alumnos una revisión de todos los problemas con contexto indagando en cada caso el aspecto de las fórmulas que hubieran surgido o completando la producción de fórmulas llegado el caso. Esto habilitaría a las docentes a formalizar la fórmula de la familia exponencial. Ante esta propuesta las docentes dudaron de la factibilidad de tal actividad. La posibilidad de revisar prácticas anteriores en clase topaba desde su perspectiva con un conjunto de dificultades no menores y específicas que iban desde las ausencias de los alumnos que conllevan a lagunas en sus carpetas hasta la costumbre de no guardar por mucho tiempo y o perder el material de trabajo. La cultura atomizada de la escuela se hacía presente tomando una forma – en este caso la compartimentalización del tiempo - que iba a operar como obstáculo de cara a la actividad de la fundamentación. Teníamos por entonces una idea de la importancia de la apoyatura en prácticas anteriores para sostener un trabajo de este tipo[108]. La observación (que será analizada en los capítulos 7 y 8) nos mostró la enorme importancia de esta posibilidad de volver a producciones anteriores y de habilitar la reflexión y comparación de estrategias y otras producciones. Queríamos también proponer la evocación de los problemas con contexto en la parte del trabajo descontextualizado. Nuevamente necesitábamos que los alumnos dispusieran de sus producciones anteriores. La memoria escolar o el tiempo didáctico se volvían elementos de importancia para considerar. Consensuamos con las docentes algunas formas de trabajo que eviten este "olvido" de los alumnos tales como entregar el conjunto de consignas en bloque, ir pidiendo algunas producciones escritas individuales o grupales o también disponer de material impreso para solucionar imprevistos.

5.6 Contenidos potentes en la enseñanza para la producción de fundamentaciones

La demostración está asociada en la escuela a la enseñanza de la geometría. Es este el contenido privilegiado para dar inicio a la actividad de abstracción y demostración. Con el

[108] Desarrollamos en el Marco Teórico la noción de evocación y de tiempo didáctico.

propósito de concebir un trabajo "posible" en la escuela media ya habíamos definido a la fundamentación como el tipo de práctica a desarrollar. . En este sentido, entendida como práctica, todo el trabajo es pasible de ser fundamentado. Sin embargo, reconocíamos a priori que hay zonas más potentes que otras para esta actividad. La conceptualización desarrollada sobre la fundamentación y presentada al inicio del taller era provisoria y luego de ser comentada a las docentes propusimos que su reformulación deviniera de un proceso dialéctico en el cual la práctica de fundamentar fuera concebida a propósito de la enseñanza de un área conceptual, entendiendo que esta decisión delineaba las prácticas de fundamentación posibles.

La búsqueda del área temática fue recorrida junto con las docentes. Partimos de una pregunta: qué contenidos podían resultar más potentes para que se pusiera en primer plano aspectos referidos a la fundamentación. Una primera aproximación para responder a esta pregunta fue consensuar que ciertos contenidos del curriculum de la escuela media habilitan más que otros a cuestionarse y discutir acerca de aspectos que tratan, a armar hipótesis, a desarrollar ideas albergando incluso la alternativa de que "otro" tenga el derecho a cuestionarla. Un contenido con tales "posibles" sería considerado **potente**, porque lo que es potente es sostener una idea, hacerse preguntas, dudar de uno, es entrar en la incertidumbre y discusión con la idea del otro, es arribar a conclusiones, es construir conocimiento aunque éste resulte local o provisorio.

5.7 Actividades que promueven la emergencia de la fundamentación

La exploración de contenidos potentes estuvo asociada a la exploración de actividades dentro de dicho contenidos. Con ejemplos en sus mentes el equipo fue proponiendo un conjunto de actividades que queremos mencionar y desarrollar. Sabemos que no todas ellas podrían adaptarse a la enseñanza de cualquier tipo de contenidos pero, en este esfuerzo por categorizar, definir y generalizar han surgido algunos modelos de actividades que entendemos es importante tomar y presentar como un resultado de todo este proceso de formulación de condiciones en clase para la emergencia de la fundamentación:

a) desarrollar conjeturas

b) trabajar la estructura “si......entonces” a partir de distintas actividades, por ejemplo unir hipótesis con conclusiones, determinar hipótesis para alguna conclusión, determinar de un conjunto de conclusiones posibles alguna que se pueda deducir de alguna hipótesis.
c) Decidir si una sentencia es verdadera o falsa.
d) Encontrar contraejemplos que permitan dar evidencia sobre la falsedad de una sentencia.
e) Dar condiciones para que una afirmación resulte verdadera siempre o en un determinado contexto.
f) Debatir sobre conjeturas que se refutan unas a otras
g) Comparar ejemplos de objetos matemáticos, teniendo como objetivo la búsqueda de características (teóricas) en común. No se trata de tener un listado de propiedades y de ponerlas en funcionamiento en los ejemplos o determinar si están presentes o no sino de promover mediante la observación, la elaboración por parte del alumno de tales características, su enunciado. Posteriormente se puede inquirir si tales características serán comunes a todos los ejemplos de una categoría de objetos.
h) Construir modelos matemáticos que representen situaciones de la realidad y problematizando su adaptación a la realidad.
i) Propiciar el intercambio de información que los marcos gráfico y algebraico pueden aportar sobre ciertos objetos a la luz de alguna pregunta.

5.7.1 Un caso especial: los problemas con condiciones

De entre todos los tipos de actividades mencionados en el apartado anterior, este tipo de problemas ocupó un tiempo considerable del taller, y finalmente también ocupó un lugar importante en la secuencia por su potencia para introducir a los alumnos en un proceso de reflexión y de abstracción motorizando fundamentaciones.

Ya para el segundo Taller una docente nos presentó un problema que había desarrollado con sus alumnos y del análisis de la actividad concluimos que estos problemas suscitaban una oportunidad para trabajar el proceso de generalización con los alumnos. El problema tenía el siguiente enunciado:

Cuáles son las condiciones que se pueden imponer a los parámetros a, p, q para que la gráfica de $f(x) = a|x+p| + q$ resulte tener cada una de las siguientes características.

- **a. Una sola raíz real.**
- **b. Dos raíces reales**
- **c. El eje de simetría desplazado horizontalmente**
- **d. El eje de simetría desplazado verticalmente,**
- **e. El vértice en el cuarto cuadrante.**
- **f. El vértice sobre el semieje x^-.**

Algunas respuestas de los alumnos eran puntuales ya que se basaban en ejemplos: "Si $p = -1$, $a = 1$ y $q = -2$ entonces tiene dos raíces reales". Este tipo de respuestas eran aportadas por alumnos que habían ensayado distintos ejemplos de esta familia de funciones con sus correspondientes gráficas y que habían encontrado en algún momento algún caso o algún par de casos donde aparecieran –según los items pedidos - por ejemplo, dos raíces reales. La obtención de tal respuesta podría ser en cierto modo azarosa y en tal caso los alumnos no estarían en condiciones de fundamentar por qué razón este ejemplo cumplía y otro no. **Explicar la génesis de las respuestas surgió en el taller como una forma de intervención docente que promueve la emergencia de la fundamentación**.

Vimos además que no todos los alumnos tenían el mismo control sobre el efecto que cada parámetro tenía sobre la gráfica y, en tal caso, su exploración era más o menos controlada según este conocimiento inicial (del papel de los parámetros). La propia exploración producía conjeturas sobre la intervención de cada parámetro en la gráfica y esto daba oportunidades de producir respuestas con distinto grado de generalidad sobre las condiciones y al mismo tiempo de producir conocimiento sobre esta familia de funciones.

La generalidad de las condiciones podía entonces variar partiendo desde el ejemplo puntual que convenimos en aceptar como una condición hacia otras con mayor grado de generalidad como por ejemplo "Si a es positivo, p es cualquiera y $q = -1$ entonces tiene dos raíces reales".

Arribamos a este acuerdo después de un proceso de discusión que partió de posiciones bastante diferentes por parte de las docentes. Aquí mostramos en el diálogo esta situación:

Diálogo 5.7. (Taller 2) Qué explicitaciones se requieren para conformar la búsqueda de condiciones.

Doc$_1$. Si vos lo que querés es que haga el salto a los parámetros genéricos no le podés poner buscar las condiciones.
Coord$_1$. Eso que te dice el chico y te lo justifica, busca evidencia es lo más pertinente en términos de un proceso. Porque queremos que este chico en algún momento haga lo mismo que el otro que puede hablar de los parámetros.
Coord$_2$. ¿Querés que este alumno haga lo mismo que el otro?
Coord$_1$. Y sí que piense un poco más genéricamente
Coord$_2$. ¿ustedes también quieren eso? (interpelando a las otras docentes que están escuchando atentamente).
Doc$_3$. Y el que pensaba así me gustaba más (risas).
Doc$_6$. **Nos gusta más porque generaliza** y eso nos convence.
Doc$_1$. No el mismo razonamiento pero **sí que generalice**.
Coord$_1$. Yo sí quiero que salga con esta producción.
Coord$_2$. Para mi no consiste en una validación con un ejemplo, un alumno empezó a trabajar y por ahí decidió que esa era una condición. **Habría que ver cómo explicamos que esto es o no es una condición**. (Para algunas docentes esta producción se interpreta como dar un ejemplo y para otras se puede interpretar como una condición)
Doc$_4$. Pero éste te dio un ejemplo.
Coord$_1$. El chico está concibiendo que esta es la respuesta que está esperando el docente, **acá hay que decidir qué cosa significa deme una condición**.
Coord$_2$. Pero aún así otras condiciones que ya dimos, no siendo ejemplos de un solo valor para cada parámetro tampoco son los más generales. **¿Cómo se ve que se está buscando la condición más general?** ¿Es ésta la condición que se está buscando?
Coord$_1$. Por ahí hay que ver que ese enunciado no te habilita a todo. **Para nosotros dar una condición es dar la condición más amplia pero para el alumno...**
Coord$_2$. Por eso yo digo que es gestión del docente hacer aparecer estas generalidades.
Doc$_4$. A todo esto los chicos están acostumbrados a que si yo les pido ejemplos no se los digo así. Les digo dar ejemplos.
Coord$_2$. ¿Vos querés decir que cuando decís dar condiciones los alumnos contestaron con generalidad o no contestaron nada?
Doc$_4$. No. Yo digo que para mis alumnos buscar condiciones es buscar la mayor generalidad posible. Si no, yo les digo buscá un ejemplo o dos o lo que sea.
Doc$_6$. Y los que no respondieron con ejemplos ni como la monada de alumno esa que mostraste, ¿qué hicieron? (risas).
Doc$_4$. Pusieron condiciones para la p.
Coord$_1$. Ahora si hilamos fino tampoco es lo mismo decir a positivo y q negativo o bien a negativo y p positivo. Tampoco es el mismo enunciado que "que tengan distinto signo".

Este análisis nos permitió ver que los problemas que piden al alumno la elaboración de condiciones propician la exploración y actividades de síntesis que se apoyan en la reflexión, en la abstracción y también en la generalización. En estas circunstancias la fundamentación – explicación genérica que promueve el entendimiento - es parte constitutiva de cada uno de estos procesos. A su vez la participación del docente se hace necesaria en función de las producciones de los alumnos para gestionar la diversidad de producciones, para organizarlas y o confrontarlas, señalando los alcances provisorios de los alumnos.

Al determinar condiciones los alumnos están maniobrando sobre la hipótesis de la estructura "si...(hipótesis)...entonces...(conclusión)...". En esta situación la mayoría de las situaciones nos llevan a considerar familias de funciones que vendrían dadas por fórmulas con parámetros y cuando los alumnos determinan qué hay que pedirles a esas funciones para que cumplan con alguna propiedad eso se traduce en dar valores a los parámetros.

En el campo de la geometría que entra en la escuela, las familias de figuras geométricas que los alumnos estudian no estás definidas por parámetros sino que se expresan mediante relaciones. Son estas las relaciones que los alumnos analizan cuando tienen que imponer condiciones. Al trasladar este estudio de familias de objetos al campo de las funciones se hacen presentes los parámetros. Así surgió para nosotros una familia de problemas que consideraríamos en nuestra propuesta didáctica.

Trabajar con condiciones no se materializa únicamente en buscar condiciones. En una primera instancia hemos producido y analizado problemas donde los alumnos tienen que elegir de entre un conjunto de distintas condiciones cuál es la adecuada para ciertos propósitos, es decir que las condiciones no deben ser producidas por ellos pero sí elegidas por ellos de un conjunto de posibles condiciones[109]. Estas condiciones permiten conectar fórmulas con gráficos. Hemos anticipado a partir de la experiencia de las profesoras con estos problemas que estos ejercicios favorecerían la actividad exploratoria y serían un buen punto de partida para que luego los alumnos tuvieran que generar "las condiciones" en otros problemas.

En referencia a la actividad exploratoria también nos pareció importante distinguir que algunas exploraciones son azarosas en tanto que otras van guiadas por una lógica, obedecen a una sistematicidad y una intención de control por parte de los alumnos. Los datos que evalúan responden a preguntas que ellos se van formulando: la dialéctica entre preguntas y exploraciones va conformando un escenario para la fundamentación. Los docentes, en la medida que se anotician de este proceso pueden colaborar en el sostén y guía de las **preguntas que orientan la exploración** de los alumnos.

Entendemos que de este modo se producen dos diálogos o dialécticas: uno entre la formulación de preguntas - a veces de los propios alumnos pero fundamentalmente desde el docente a través de los problemas que trae - y la exploración de los alumnos y otro entre

[109] En el apéndice de problemas, el Nº 8 de la segunda sección corresponde a este tipo de problemas que estamos mencionando y será analizado en el próximo capítulo.

la producción de ejemplos y las fundamentaciones que los alumnos producen como resultado de un proceso de generalización y abstracción que surge del análisis de los ejemplos.

Estos dos diálogos se conectan finalmente por la relación que hay entre la exploración y la producción de ejemplos tendiendo un puente que conecta la formulación de preguntas o conjeturas con la producción de fundamentaciones.

EXPLORACIÓN	FORMULACIÓN DE PREGUNTAS Y CONJETURAS
EJEMPLOS "QUE EXPLICAN" PRODUCTO DE LA EXPLORACIÓN	FUNDAMENTACIONES PRODUCTO DE LA ABSTRACCIÓN/GENERALIZACIÓN QUE SE PRODUCE DESDE LOS EJEMPLOS

Esta actividad no está restringida a los problemas de condiciones pero ellos fueron la base que dio lugar a esta conceptualización.

5.8. La gestión docente y los posibles en clase a partir de la experiencia del taller

La concepción de este conjunto de problemas, la formulación de la práctica "fundamentación" a desarrollar en clase y en general todas las cuestiones ya planteadas en este capítulo contribuyeron a consolidar la necesidad de una gestión docente que propicie la producción de los alumnos, que entre en diálogo con sus producciones, que piense junto a ellos, que - detectando formas de razonar y elaborando preguntas a los alumnos - contribuya a que ellos puedan comunicar sus formas de pensar y resolver problemas a otros. El docente pone así en juego la comunicación como una forma para hacer circular el conocimiento, y activa la reflexión sobre procedimientos como una forma de abstracción.

A modo de cierre señalamos que las docentes reflexionaron sobre los elementos destacados del taller en el último encuentro. Una de las conclusiones que creemos es la más potente es que todas reconocieron haberse animado a desarrollar y explorar en clase formas de trabajo novedosas acordando que ello se debió tanto a la posibilidad de pensarlas previamente en el marco de una discusión con pares y expertos como así también a la alternativa de poder traer de regreso la experiencia, abordar un análisis y tener una devolución en el mismo taller a posteriori.

Creemos importante señalar que para que las docentes desarrollaran prácticas nuevas hubo también un proceso nuevo que tuvo lugar durante el taller y este consistió en la configuración de un alumno genérico – a partir del que todos traíamos, docentes y coordinadores aún cuando no fueran coincidentes – capaz de interpretar este proyecto aceptándolo como tal, y capaz de elaborar parte o todo el conjunto de producciones que estábamos anticipando. Entendemos que las docentes no se olvidaron de aquel alumno que traían al taller pero alojaron preguntas y posibles que configuraron su intencionalidad. En síntesis, la configuración de una tarea de enseñanza factible se desarrolla junto a la conformación de un alumno capaz de abordarla. Este aspecto de la actividad de análisis a priori que desarrollamos en el taller es la que marca una distinción importante con aquella que se propone mediante la ingeniería didáctica donde el objeto de enseñanza y los sujetos involucrados son genéricos. El alumno que se conformaron las docentes a lo largo del taller mantenía características concretas de su experiancia en el aula.

Otra de las cuestiones que las docentes destacaron - y que desde nuestra propia mirada también consideramos un hecho de relevancia - es que la observación de clases les permitió compartir con otro colega la apreciación tanto sobre las actividades, gestos, respuestas, preguntas, producciones de los alumnos como las respectivas de ellas mismas. Este espacio de reflexión sobre sus prácticas les permitió desarrollar una capacidad de auto-observación que no habían podido desarrollar antes y que enriqueció su propia mirada sobre ellas mismas y sobre la clase. En todos los casos las primeras observaciones registraron un nivel inicial de tensión en las docentes, entendemos que por la observación en sí misma, pero esta tensión se fue disipando en el transcurso de la observación de clases y se transformó en todos los casos en un clima de trabajo en equipo donde la confianza se instaló en la clase. Las docentes tenían un gran interés hacia el final de la secuencia en reconstruir situaciones de clase con el observador, indagar los puntos de vista del observador respecto de momentos de la clase que involucraba a sus alumnos pero también a ellas mismas y descubrir cómo en la oralidad eran posibles varias lecturas tanto respecto de diálogos con los alumnos como así también respecto de sus propias intervenciones. La lectura de registro de sus clases les permitió recomponer escenarios de trabajo en aula y verse a si mismas con más objetividad. Esto reforzó su entusiasmo por la reflexión sobre sus prácticas.

De la misma manera las docentes advirtieron haber alcanzado una nueva forma de escuchar las producciones de sus alumnos en el sentido de escuchar y percibir expresiones que antes no parecían haber estado presentes. En este sentido vemos que la decisión de elegir docentes con experiencia en el 4º año y con experiencia en la institución en la que trabajan permitió que se advirtiera este cambio. Poder estar atentos a las formas de razonar de sus alumnos requiere, no obstante, más que un proceso previo de reflexión sobre ellas. Requiere también una asignación de tiempo para su exploración, problematización y desarrollo en clases. Esta es una decisión que afecta al currículum. El tiempo destinado a la enseñanza de la exponencial fue mucho mayor que el que se destina usualmente. Esto fue compartido por todas las docentes a pesar de que su trabajo se desarrolla en distintas modalidades de enseñanza.

Las docentes reconocieron haber experimentado una importante tensión durante las fases de trabajo grupales de sus alumnos para refrenar sus impulsos de intervenir en las producciones, diálogos y discusiones de ellos. Entendemos que existe una lectura todavía simplista acerca del significado de la situación adidáctica que aporta la TS y - más en general - aquellas nociones que aporta el constructivismo sobre la necesidad de dejar a los estudiantes que construyan solos el conocimientos sobre la cual los docentes encuentran todavía más preguntas que respuestas a la inquietud referida a su espacio de acción en el aula. Con el tiempo este impulso refrenado se fue transformando por intervenciones que propiciaron el diálogo, la explicitación de las posiciones de los alumnos y otro conjunto de interacciones que permitieron una devolución del docente a sus alumnos fértil para la producción. Daremos cuenta de ello en los próximos capítulos.

5.9 Síntesis del Capítulo

A modo de cierre queremos destacar que el Taller pasó por distintas etapas de trabajo a lo largo de los ocho meses de funcionamiento y que partiendo de una discusión genérica sobre la práctica de la fundamentación se constituyó en un espacio de reflexión donde se consolidó una intencionalidad docente necesaria para la gestión de los problemas en clase a través de un proceso de construcción de confianza que se apoyó en una concepción de las docentes como sujetos intelectuales que conformaron junto a coordinadores y especialistas una comunidad de producción.

6. ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DE PROBLEMAS

INTRODUCCIÓN

En este capítulo analizaremos el material producido por el equipo durante el taller y llevado luego a clase con los alumnos. Mostraremos qué objetivo nos propusimos y en tal caso dialogaremos con el capítulo anterior en términos de algunas discusiones del taller que sostuvieron este diseño. El análisis incluye – claro - las anticipaciones realizadas que necesariamente pondremos en relación con el posterior desarrollo en campo. Hemos decidido no restringirnos a las anticipaciones y nutrir también este análisis con algunas producciones de la clase que nos parecen especialmente significativas para ampliar el abanico de posibilidades que ofrece la propuesta. La labor del docente queda momentáneamente en un segundo plano y será objeto de un análisis exhaustivo en los próximos capítulos

Durante el trabajo en el taller diseñamos junto con las docentes del proyecto seis problemas donde el modelo exponencial surge como forma de describir diferentes fenómenos. Quisimos que en cada uno de ellos los alumnos fueran indagando sobre las características de procesos de crecimiento y decrecimiento relativos a diferentes contenidos.[110]

Los enunciados muestran, a partir de distintos tipos de datos, un cambio en las variables mencionadas y en cada uno de ellos las consignas tienen la intención de que los alumnos tengan que explorar las situaciones, y formular (ya sea como conjetura, hipótesis o como afirmación) un modelo de evolución de estas magnitudes.

[110] A partir del aporte de los docentes en el Taller de un conjunto de problemas que se utilizan frecuentemente en la presentación del modelo exponencial en la Escuela Media ideamos estos problemas donde los alumnos se encuentran con procesos de crecimiento y decrecimiento de: áreas de figuras geométricas (elegimos cuadrados), poblaciones (en este caso de piojos y bacterias), montos de dinero (tomamos sueldos) y de la intensidad lumínica al descender en las profundidades de una laguna.

Acordamos entregar a los alumnos estas secuencias sin mediar explicación alguna sobre la función exponencial[111]. Tampoco aparecía mencionada la función exponencial en las consignas entregadas (ni como título ni como parte de ningún enunciado). El análisis de estos problemas se desarrolla en el punto 6.1.

En un segundo momento y recuperando las relaciones que los alumnos elaboraron en la primera etapa, propusimos una serie de problemas -los problemas descontextualizados- que dieran la oportunidad de trabajar con algunas propiedades de la función exponencial. Estos problemas son objeto del análisis del punto 6.2

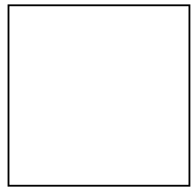
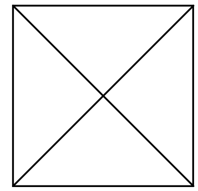
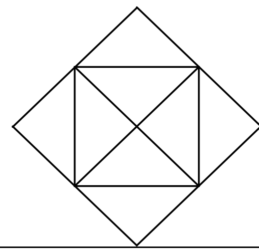
6.1 PROBLEMAS EN CONTEXTO

Los dos primeros problemas abordan cuestiones geométricas a partir de la construcción sucesiva de cuadrados (en el primer caso con un área que va en aumento en el segundo en disminución, a continuación los enunciamos). Pedimos a los alumnos que comparen áreas sucesivas y de este modo analicen la evolución de las mismas. Nuestro objetivo último consistía en que los alumnos construyeran las fórmulas de las áreas genéricas.

6.1.1 Áreas de cuadrados en expansión

El docente dibuja un cuadrado en el pizarrón y traza por los vértices, paralelas a las diagonales. Luego insta a los alumnos a qué figura se obtiene y a justificar su decisión. La intención de esta tarea conjunta es la de promover la producción de relaciones que los alumnos podrán reutilizar para abordar el problema (analizando la variación de la medida de los lados de los sucesivos cuadrados) y, simultáneamente, iniciar el trabajo de fundamentación.

[111] Remitimos al lector al Capítulo Metodológico, sección 4.2.5

Primero	Segundo
	
Tercero	
	

Una vez definido de qué figura se trata, el docente explica que llamarán "**el paso**" a esta construcción que da lugar a un nuevo cuadrado

Se proponen las siguientes preguntas:

a. Compara el área del cuadrado obtenido en el paso 1 con el área del cuadrado original.
b. Si se repite el paso varias veces ¿podrías indicar cómo serán las áreas de los cuadrados que se van obteniendo respecto del cuadrado original?
c. Si llamamos ***A*** al área del cuadrado original indica qué área tendrá el cuadrado generado en el paso 17.
d. ¿Se podría dar una expresión generalizada del área del cuadrado generado en el **paso *n***? (también en este caso el cuadrado original tienen área ***A***).

<u>ANÁLISIS DEL PROBLEMA</u>

El primer "**problema de los cuadrados**" tiene dos fases de trabajo. En la primera el docente construye en el pizarrón a la vista de sus alumnos un cuadrado. A partir de esta construcción les relata, mientras dibuja, una nueva construcción y les pide que decidan de qué figura se trata (promoviendo al mismo tiempo una validación). Buscábamos de este modo que las docentes elaboraran en clase junto a sus alumnos una **fundamentación** que les permitiera justificar que la nueva figura es efectivamente un cuadrado. Esta forma de comenzar la actividad nos permitía iniciar el trabajo frente a los alumnos con una clara muestra de la intencionalidad de nuestro proyecto. Antes de llegar a la versión que finalmente tratamos en las clases, analizamos en el taller distintos escenarios posibles para la presentación de "*este*"[112] problema.. El docente podría sentenciar luego de la construcción

[112] Las comillas intentan comunicar que al cambiar el escenario, cambian el problema con lo cual deja de ser *este* problema.

en pizarrón, que esa nueva figura es un cuadrado y motorizar justificaciones junto con sus alumnos. También puede presentar a la figura como un cuadrilátero y convocar a los alumnos a decidir por el tipo de figura produciendo una explicación que avale su decisión. Esta convocatoria puede por lo tanto tener distintas connotaciones que se sostendrán a partir de la forma en la que el docente comunique el pedido de justificación. El espectro es sumamente variado, como puede verse a partir de las siguientes consignas analizadas con los docentes:

.-"Ustedes deben decidir si este es o no un cuadrado", (lo importante es decidir, no se trata de dar razones en principio),

.-"Este es un cuadrado y ustedes deben mostrar por qué lo es", (se establecen dos imposiciones, el alumno debe aceptar que la figura es un cuadrado y debe buscar una forma de mostrarle al docente que está en condiciones de validar esa afirmación),

.-"No sabemos qué figura es esta, necesito que me cuenten qué figura consideran que es y en qué se apoyan para decirlo", (se genera un contexto de incertidumbre del que se saldrá a partir de la producción de explicaciones del alumno, el docente comunica que esto es lo que necesita saber).

Cada una de estas propuestas refleja un modelo de interacciones entre alumnos y docente que creemos es diferente[113]. Notemos que la última propuesta da un lugar de especial consideración a las producciones de los alumnos. El docente comunica que necesita saber y entender qué elaboran los alumnos a partir de esta construcción. El docente necesita conocer qué ideas surgen, es una convocatoria al oficio de pensar, al trabajo intelectual donde el foco está puesto en la producción del alumno[114]. En este sentido y en concordancia con nuestra hipótesis de trabajo creemos que este último tipo de propuesta[115] promueve con mayor énfasis diversas explicaciones por parte de los alumnos.

Esperábamos que esta validación colectiva pusiera en evidencia las herramientas geométricas necesarias para la segunda fase de trabajo. En ésta se les plantea a los alumnos

[113] Ya que en cada consigna hay implícito un sujeto alumno en condiciones de: decidir, explicar, preguntarse o de responder a las preguntas de otro. También hay un docente que se interesa por las preguntas de su alumno o que espera sus respuestas.

[114] Heinze et al clasifican los problemas de demostración en "open proof task" y "closed proof task" según la formulación del problema en consonancia con nuestras observaciones. (2008: 451)

[115] En esta propuesta vemos un contrato didáctico donde el alumno recibe la incertidumbre y la responsabilidad de una producción de argumentos que sostengan su salida de tal incertidumbre.

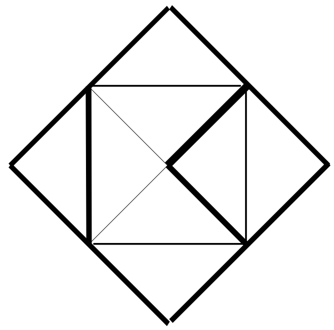
que se siguen construyendo cuadrados con el mismo método que el explicado por la profesora en el frente y se pide a los alumnos que establezcan relaciones entre un cierto cuadrado y el obtenido en el paso siguiente, esperando que arriben a la relación multiplicativa entre los pasos en la comparación. Finalmente se solicita la construcción de una expresión general del área de un cuadrado en un cierto paso n.

En el taller imaginamos dos alternativas para promover la construcción de la fórmula. Una de ellas consistía en preguntar por el área en algunos pasos concretos (paso 1, paso 2, paso 17, por ejemplo) pero entendimos que esto no necesariamente propiciaría la comparación y que esta comparación de áreas es una característica de la exponencial que queríamos comenzar a señalar aún cuando no fuera completamente necesaria para producir la fórmula de las áreas. Sin comparación, creíamos, los alumnos verían una **regularidad** a partir de la tabla armada que podrían traducir a la fórmula $A\text{x}2^n$.

Otra alternativa consistía en comparar el área de un paso con el área del paso subsiguiente y manejar la recursividad para formular la expresión general. Preferimos esta última alternativa ya que propiciaba una mejor **fundamentación** a la fórmula.

Supusimos que la construcción colectiva de la primera fase permitiría a los alumnos observar que en cada construcción de un paso el nuevo cuadrado tenía el doble del número de triángulos[116] que el anterior y a partir de allí concluiría que el área era el doble. La construcción realizada y discutida entre todos levantaría varias propiedades geométricas que podrían utilizarse para la comparación de áreas. Los alumnos podrían apoyarse en la igualdad[117] de triángulos isósceles, en los cuadrados que se van obteniendo (se marca en el esquema a continuación) y que forman el cuadrado más grande o bien responder "a ojo", con esto último queremos señalar que lo visual comande las explicaciones. En esta situación imaginamos posible que algunos alumnos dieran valores a los lados del cuadrado original y, eventualmente a los que se van generando a partir de él.

[116] Nos referimos a los triángulos isósceles rectángulos en los que la hipotenusa tiene la longitud del lado del cuadrado del paso *n* y los catetos la longitud de la mitad del lado del cuadrado del paso *n*+1.
[117] En referencia a la congruencia de triángulos.

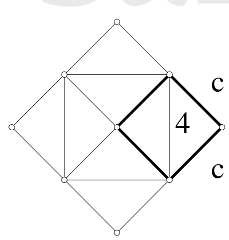


Esperábamos poder analizar luego con los alumnos las diferencias entre una respuesta comandada por “el ojo” y una respuesta que se basa en propiedades de las figuras que se tratan. Esta distinción es parte del objetivo de la secuencia: una respuesta en matemática que se apoya en lo visual no da acceso a las razones de la relación que se está identificando, la fundamentación es el soporte de la comprensión y de la confianza en la producción.

Las explicaciones que habíamos anticipado tuvieron lugar en la clase pero también surgieron otras, tales como ésta que combina propiedades de la figura con recursos de medición y cálculo y que exponemos aquí:

Diálogo 6.1. Problema de los cuadrados. Cálculo de lados.

En una hoja cuadriculada, un alumno tiene dibujada la construcción que se genera a partir del paso uno. El lado del cuadrado original mide 4 cuadraditos de la hoja cuadriculada. El alumno anota que el área del cuadrado original es 16. Se observa la siguiente producción en la hoja del alumno.



$c^2 + c^2 = 16$ $\quad 2\,c^2 = 16$ $\quad c^2 = 8$ $\quad c = \sqrt{8}$

$$\sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$$

Al obtener este resultado y comparar este resultado, ocho, que para el alumno es el área del nuevo cuadrado, con el área del cuadrado original el alumno se sorprende. La profesora – que observa su desarrollo – le pregunta en ese instante si es esa el área del cuadrado del paso 1. El alumno permanece desconcertado. La profesora pregunta entonces cuánto mide el lado del cuadrado grande. Inmediatamente el alumno se percata del error y corrige, escribiendo:

$$2\sqrt{8} \times 2\sqrt{8} = 4 \times 8 = 32$$

y sentencia: "es el doble".

El alumno comenzó asignando una medida a un lado lo que establecía a su vez un valor al área inicial. Esto le permitía encontrar un valor para el lado y el área del cuadrado siguiente, producto del paso 1. Es interesante que analicemos el modo en que el alumno obtiene su respuesta a la primera consigna ("compara el área del cuadrado del paso 1 con el área del cuadrado original"). Su hipótesis sobre el doble se apoya en los valores asignados y no responde a la generalidad del enunciado (ya que el área del cuadrado original es A). La inferencia que el alumno hace (el área del siguiente es el doble) se apoya en dos valores encontrados y no es de ningún modo la única posible (entre los valores 16 y 32 una relación posible es que 32 es el doble pero se podrían inferir muchas otras, por ejemplo que el nuevo cuadrado tiene un área que es la del cuadrado original más 16). El razonamiento se organiza sobre el cálculo del nuevo lado una vez que se ha asignado un valor específico al lado original utilizando para ello un conocimiento del área de la geometría (el valor de la hipotenusa por Pitágoras). Reconoce una incógnita temporal, a la que llama c, y así encuentra el valor de la mitad del nuevo lado. Luego calcula el área del cuadrado del paso 1. El alumno está evocando la relación de Pitágoras sobre un caso particular y a partir de él realiza una inferencia. Creemos que no se trata ni de un ejemplo genérico ni de una experiencia crucial en términos de Balacheff, lo cual nos lleva a pensar en la posibilidad de ampliar la categorización con relación a los tipos de prueba que realiza el autor.

Entendemos que estos cálculos para su respuesta a la primera consigna ("compara el área del cuadrado del paso 1 con el área del cuadrado original".) no se ajustan a las características de las fundamentaciones que estamos promoviendo, pues su hipótesis sobre el doble se apoya en los valores asignados, no responde a la generalidad del enunciado (ya que el área del cuadrado original es A).

Nos interesa este ejemplo pues da cuenta de una situación usual entre los estudiantes donde conviven cuestiones particulares (en este caso la asignación de valores al elemento "lado" convirtiéndolo en un ejemplo puntual del caso genérico en el que se encontraba) con otras generales, como aquellas que le permiten evocar relaciones ya instaladas (en este caso Pitágoras) junto con una actividad de inferencia y diagnóstico apoyado en datos concretos.

Este mismo razonamiento - que entendemos resulta una exploración con valores que supera una cuestión de medición pues se apoya en las relaciones entre distintos elementos de la figura - fue empleado por otros alumnos en los sucesivos cuadrados que se generan en los sucesivos pasos, hasta que pudieron generalizar - esta hipótesis "del doble" - a un lado de valor genérico. Notamos que la fórmula de "área igual al cuadrado del lado" (saberes previos) está muy presente y esto hace que algunos alumnos levanten las relaciones entre áreas y lados aún cuando ellas no fueron traídas al conjunto de alumnos en la discusión inicial en pizarrón. También creemos que la noción de área está asociada a cálculos por parte de los alumnos, seguramente en función del tipo de prácticas que se sostienen durante su enseñanza y esto dificulta que establezcan la comparación sin apelar a algún tipo de cálculo.

En los incisos b) y c) del problema nuestro objetivo es que los alumnos vayan recorriendo nuevos pasos, vayan explorando las relaciones entre las áreas de pasos sucesivos y, al mismo tiempo representen estas nuevas áreas en función del área original. Creímos que este trabajo iba a contribuir a la formulación del área de un paso genérico en términos del área original que se pide en el inciso d).
Anticipamos que los alumnos, habiendo observado la duplicación de áreas en el primer paso avanzarían tratando de comprobar esta hipótesis en los pasos sucesivos y que esta herramienta les permitiría formalizar la producción de la fórmula general ($y = A \cdot 2^n$) lo que demanda, de alguna manera, un proceso de reconstrucción, a partir de la experiencia realizada con los incisos anteriores.

En este proceso de reconstrucción se generaban algunas inconsistencias. Algunos grupos de alumnos sostenían que las áreas se los sucesivos cuadrados se iban duplicando, incluso podían decir qué relación tenían con la original para los primeros dos o tres pasos pero, al considerar el paso 17, las relaciones anteriores se perdían o los alumnos no encontraban cómo expresarlas de manera general aunque localmente pudieran saber que en un área es el doble de la del paso anterior. Mostramos a continuación un diálogo que da cuenta de este hecho.

Diálogo 6.2. Comparando áreas. Docente y grupo de alumnos

Doc_1. Olvidate del valor que elegiste. Independientemente del valor que vos elegiste. Ellos fueron escribiendo lo que les daba con respecto a los pasos. A ver Guillermo

explicales lo que hiciste. Cómo fueron escribiendo a cada área según lo que valía la anterior.
A(Guille). **Primero el doble, después el cuádruple, tercero el óctuple. El cuarto 16 veces más grande** y el 17 ese número que está ahí.
Doc_1. Vos tenés que explicarles qué hiciste para llegar, ¿**vos hiciste A^{17} para llegar**?
A(Guille) no, ellos hicieron,
A1. no, no te da lo mismo.
Doc_1. Pero ¿Qué es A?
A1. El área.
Doc_1. entonces vos estás manipulando con el área?
A1·. **Entonces** $A.17$
Doc_1. A ver, ustedes tienen que rebatir lo que está diciendo cada uno si no están de acuerdo**. El dice que al área del primero lo multiplica por 17; no hace todas las cuentas que vos dijiste**.
A2. Sí, sí, **lo eleva a la 17**.
A3. No, eso es otra cosa. Yo acá hacía el cuadrado del área.
A2. Está bien profe haciendo AxA está bien. Bah, **A a la 17 te tiene que dar.**
Doc_1. A a la 17 te va a dar. ¡Momento! **El dice que hace A. A. A... 17 veces**, ustedes ¿están de acuerdo?
A2. No, porque nosotros estamos haciendo primero 64+64, después 128+128 (los alumnos hacen referencia a valores con los que estaban explorando los primeros pasos)
Doc_1. Yo **los invito ahora a escribir** lo que están diciendo a ver si esto los ayuda. Suponete, yo te digo, escribime el área que te quedó en el paso 1.
A1. 2. A
Doc_1. Bueno escribilo.

Transcribimos este diálogo porque concentra en un solo grupo de cuatro alumnos muchas de las hipótesis que fueron surgiendo en distintos grupos sobre el cálculo del área en el paso 17. Resulta interesante que, aún cuando los alumnos pueden describir una duplicación en los primeros pasos, puestos a imaginar el área de un paso lo suficientemente grande como para que opere "una tensión" hacia la generalización, esa duplicación no se refleja en las escrituras que proponen para expresar el paso 17. Vemos así – en un análisis a posteriori - que la producción de las primeras áreas no pone en evidencia para algunos alumnos la relación que existe entre "el paso" y el área del cuadrado en dicho paso. Efectivamente, lo alumnos explicitan 64 + 64 = 128; 128 + 128…pero a los ojos de los estudiantes éstos son cálculos parciales que no parecen insertarse en una secuencia de tantas duplicaciones como pasos se hayan "realizado". En otros términos las relaciones que se establecen en los primeros "pasos" no se generalizan de manera inmediata. La docente propone la escritura como una forma de organizar y contrastar todas las hipótesis en juego. Luego, en el próximo capítulo, veremos cómo gestiona el docente todos estos procedimientos.
En otros grupos, los menos, tanto la evolución como la generalización de la escritura se daban según nuestras anticipaciones.

Diálogo 6.3. Alumnos comparando áreas sucesivas.

Este grupo de tres alumnos está comparando las áreas entre el cuadrado inicial y el del primer paso

A(Bruno). El segundo cuadrado que hicimos es el doble. Contá. En este hay uno, dos tres y cuatro triángulos. En este hay ocho. Contá este, aquí hay ....

Bruno va contando y las chicas lo miran contar y van controlando que los triángulos que cuenta tengan el mismo tamaño.

A(Bruno). Si seguimos, el próximo tiene 16 triángulos. Seguro que si seguimos va a ser 32 triángulos.

Las chicas desconfían que los triángulos que está contando Bruno tengan el mismo tamaño y él les muestra que son todos iguales.

A1. para mi es lógico lo que decís.
A(Bruno). vos Ceci, ¿qué decís?
A(Ceci). creo que sí, pero no estoy muy segura.
A(Bruno). Este va a ser 3x4, el otro 3x16, el otro 3x32.
A1. ¿por qué 3?
A(Bruno). Es un ejemplo. Si le tirás valores en el dibujo **no vas a poder ver lo que ocurre midiendo.**
A1. ¿cuál es el 17? ¿Lo tenemos que hacer 17 veces?
A(Bruno). ¡No! **Es para que lo pienses**.

Los alumnos de este diálogo están razonando con autonomía, confrontan sus afirmaciones y explicitaciones con el consenso de sus pares; razonan hipotéticamente - si supongo que el área de un triángulo es 3 entonces obtendré la secuencia de áreas de los sucesivos cuadrados: 3x4, 3x16, 3x32, etc.-; descartan la actividad de medición para esta fase de exploración de conjeturas[118]; y finalmente, interpretan la intención del docente sobre ellos: ser alumno en esta clase es adoptar una posición de anticipación y fundamentación (no se trata de hacer esto 17 veces, hay que pensar cómo sería)[119].

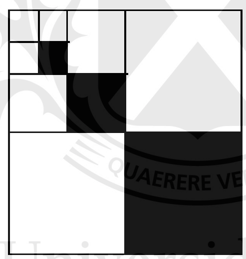
Las formas en las que habíamos formulado los problemas de entrada respondían al objetivo de la **fundamentación**. Es por eso que muchas preguntas confrontan a los alumnos a producir respuestas a preguntas abiertas. En tal sentido preferimos preguntar "qué relación hay entre el área de los cuadrados en pasos consecutivos" (en este primer

[118] "porque no te permite ver" dice Bruno donde entendemos que está queriendo señalar que con la medición el proceso que tienen que dilucidar queda enmascarado.
[119] Volviendo a leer nuestro marco teórico didáctico TS, notemos que en este caso "ser alumno" no se opone a "ser autónomo", ya en el proyecto que el docente trasmite "ser alumno" **es** "ser autónomo".

problema de cuadrados por ejemplo) a pedir "mostrar que el área de un paso n es el doble del área en el paso anterior justificando su respuesta". La producción del conocimiento estaba intencionalmente puesta del lado del alumno. Esto nos abría la puerta a un trabajo de exploración, debate, afirmación, refutación, que cada docente iba a acompañar.

6.1.2 Áreas de cuadrados que decrecen

Con la intención de ofrecer la oportunidad de sostener en el tiempo[120] algunas de las relaciones producidas, propusimos un segundo problema en un contexto similar al anterior: cálculo de áreas de una sucesión de figuras que se van transformando de acuerdo con un criterio dado. El enunciado del problema es el siguiente:



Observa la siguiente figura
Al cuadrado inicial de área 1 se le trazaron las medianas y se sombreó el cuadrado inferior derecho. En este ejercicio se llama "**paso**" al trazado de las medianas y al sombreado del cuadrado inferior derecho. A partir de cada paso se continúa con el cuadrado opuesto como se ve en el dibujo.

a. ¿Cuál es el área del cuadrado que queda sombreado en el primer paso, en el segundo y en el cuarto?
b. ¿Habrá algún paso en el que se obtiene un cuadrado de área 1/60?
c. Si sabemos que el área que quedó sombreada en el séptimo paso es $\frac{1}{16384}$ ¿cuál será el área sombreada en su siguiente paso? ¿y en su anterior?
d. ¿Habrá una expresión general que permita saber el área de los sucesivos cuadrados sombreados según los **pasos** que se hicieron?
e. ¿Podrías contestar la pregunta anterior si el cuadrado original tiene área ***A***?

[120] Remitimos a la noción de tiempo didáctico desarrollada en el marco teórico.

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Aunque, como dijimos, el problema es similar al anterior, ahora se trata de una función decreciente (en lugar de creciente) y se establece el área del cuadrado original.

La parte a) del problema tiene por objetivo que los alumnos identifiquen que los sucesivos pasos generan una cadena de áreas que permite "pasar de un paso al siguiente" dividiendo por 4 el área del paso anterior, o en forma equivalente multiplicando por $1/4$, aunque esta equivalencia no sea reconocida por todos los alumnos al momento de la resolución.

Pensábamos como probable que algunos alumnos únicamente pudieran arribar a la respuesta contando desde el área inicial cada vez que necesitaran determinar el área en algún paso avanzado de la serie de cuadrados. En tal caso volverían a esta cuestión en el inciso c) donde una vez más, si bien podrían responder realizando todo el cálculo desde el inicio, esta tarea sería cada vez más pesada.

En este ejercicio imaginamos que la pregunta por la existencia de algún paso donde un área tuviera un valor específico iba a ser rica de cara a la fundamentación. Pensamos que los alumnos explorarían mediante tablas pero que las tablas no serían suficientes para responder negativamente a esta pregunta, debiendo elaborar algún argumento generalizador ("vemos que las áreas son cada vez más pequeñas, el área del paso 2 es 1/16 y la siguiente 1/64 entonces no puede tomar el valor 1/60" por ejemplo, o también "vemos que las áreas son una fracción de la forma 1 sobre una potencia de 4 y 60 no es potencia de 4"). A diferencia de otras propuestas se trataba de explicar las razones por las cuales un hecho no podía ocurrir. Si bien las explicaciones no siempre fueron completas, esta pregunta hizo observar con mayor detenimiento el aspecto de la sucesión de áreas que los alumnos estaban obteniendo. En el siguiente diálogo vemos cómo la pregunta por el área de 1/60 cuestiona el modo de trabajo que estaba utilizando un grupo.

Diálogo 6.4. Comunicar las construcciones personales. Diálogo alumnos - docente.

A3. ¿Habrá algún paso en el que el área de 1/60? (leyendo parte del enunciado)
A2.¿Por qué 1/60?
A3. Claro porque acá les da "uno sobre" y a nosotros nada. Por eso digo que tenemos que trabajar con fracciones.

A1. ¿1/4 cuánto te da?
A3. 0,25. A ver si lo pasamos a fracción.
A2. Bueno pasalo a fracciones entonces. Pero con ese 3,9 por 10 a la −3 ($3,9\times10^{-3}$) no vamos a poder.
A1. ¿A ver eso de 1/60? ¿Un cuadrado de área 1/60? Y si ...¿alguna vez lo vas a hacer 60 veces?
A2. Tenés que partir esos cuadrados 60 veces. Te queda una milésima

La escritura decimal (que los alumnos habían adoptado) esconde la regularidad que muestra la escritura fraccionaria de las áreas de los cuadrados y los alumnos advirtieron esta cuestión en función de esta pregunta. Corrigieron su escritura y elaboraron al mismo tiempo una hipótesis que no duraría mucho tiempo sobre la forma de llegar a un área de 1/60 (realizar 60 pasos).

A2. Suty, hacé 1/60
A1. 0,016 periódico en 6.
Doc. **El tenía una idea que por ahí les sirve**.
A1. para que no haga el kilombo de los decimales lo hacemos con fracción. 0,5 es $\frac{1}{2}$, 0,25 es $\frac{1}{4}$ y se va repitiendo .... (el alumno explica tímidamente su idea, pero se lo explica a la docente no a sus compañeros que no toman en cuenta su intervención)
A3. 0,125 es 1/8? pasá a fracción. Y 0,6?
Doc. ¿qué estabas haciendo vos entre un paso y otro? Vos lo habías dicho. (La docente insiste en que Suty cuente su estrategia).
A1. ¿qué dije? (Suty, es reacia a hablar en voz alta)
Doc. Vos antes habías dicho que **en cada paso los lados se dividían por dos y así tenías 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$**, ¿y después?
A1, 1/8 y después no me acuerdo cuál le sigue, por eso le pedí la calculadora.

La docente intentaba ayudar a comunicar a todo el grupo la idea de una alumna, Suty, que seguramente por timidez no exponía lo que había observado y tenía escrito en su cuaderno. Luego el grupo avanzó con la propuesta de Suty que, de todos modos, al apoyarse en la regularidad de los lados (siendo ésta $\frac{1}{2}^{n}$) todavía debía reconstruir las áreas sucesivas. Sus compañeros del grupo estaban encontrando por entonces la otra regularidad de las áreas al convertir los decimales a fracción.

Habíamos elegido el número 60 pues no siendo una potencia de cuatro es, sin embargo un múltiplo de cuatro. Esperábamos que esto cuestionara algunas construcciones como las del primer problema. En el siguiente diálogo la docente pone a prueba este recurso con un grupo de alumnos.

Diálogo 6.5. Distinguiendo una estructura. Docente- grupo de alumnos.

Al. No hay ninguno que sea *un sesenta* (refiriéndose a la fracción $1/60$)

Doc_1. ¿Por qué?
Al. Porque te pasás, vas de 4 en 4, el anterior es 32 y saltás a 64, no tocás el 60. No llegás nunca a 60 **multiplicando siempre por 4.**
Doc_1. Pero 4 por 15 sí es 60, no entiendo cómo es esto de que vas de 4 en 4 y no llegás al 60. 60 está, sale de 4 x 15
(El alumno piensa frente a la intervención docente unos instantes. Luego responde)
Al. No..., no son múltiplos de 4, es 4 x 4 x 4...no es 4 x 1, 4 x 2...**son los elevados...**no está el 60.

En este caso se puede observar en el alumno una confusión inicial en cuanto a múltiplos y potencias de 4. Este valor fue elegido para el problema justamente para confrontar un decrecimiento en términos de múltiplos (lineal) con un decrecimiento en términos de potencias (exponencial). **El docente pone en evidencia estas contradicciones para generar nuevas explicaciones**. Este proceso permite que algunos alumnos identifiquen que se trata efectivamente de potencias de 4 y no de múltiplos de 4, aportando a la idea del tipo de decrecimiento exponencial: 60 no es una potencia de 4, o bien $1/60$ no es una potencia de $1/4$.

La parte c) exige a los alumnos detectar el área anterior o posterior a una dada. Se trata de identificar que para avanzar un paso multiplico por $1/4$ y para retroceder divido por $1/4$. De este modo propiciamos nuevamente la comparación de áreas sucesivas (reconociendo que no es la única vía de responder a estas preguntas como ya lo hemos mencionado)

La parte d) representa un salto en el problema ya que se intenta que los alumnos avancen sobre la recurrencia "paso a paso" para elaborar una posible generalización de este proceso a través de una fórmula del área que dependa del paso "***n***" que se está considerando. Esperábamos entonces que algunos alumnos escribieran expresiones multiplicativas similares a la siguiente: $\frac{1}{4} \text{ x } \frac{1}{4} \text{ x } \frac{1}{4} \text{ x } \frac{1}{4} \text{ x } \ldots$, la cantidad de veces que fuera necesario.

Queremos notar que es inherente a estos dos problemas considerar la variable independiente como número Natural. No obstante se podría analizar la variable entera ya que los números negativos podrían pensarse como una recursividad invertida (¿cuál pudo ser la situación en un paso previo para que estemos ahora aquí? ¿Y en dos pasos anteriores? etc.) Es decir que se podría pensar en un devenir de pasos hacia delante y hacia atrás, de modo que la variable independiente pudiera extenderse a los números enteros.

No fue esta la actividad planteada durante las clases pero sí fue parte del análisis del taller. Esto le permitió a las docentes, en primer lugar, ahondar en las posibilidades de cada ejercicio, y también prever posibles análisis de sus alumnos, respuestas o preguntas eventuales. Creímos que esto era necesario para que cada docente pudiera tener elementos para gestionar una clase donde los alumnos explorarían situaciones en función de las consignas abiertas que les estábamos presentando[121].

Concluimos en el taller que, si bien la variable independiente de estos modelos exponenciales podía llegar a ser considerada un número entero, el contexto de los problemas no permitía pensar en números racionales.

La diversidad de las producciones de los alumnos fueron tomadas en algunos casos como punto de partida para discutir cuestiones relativas al campo algebraico. El contexto y la modelización en este problema de los cuadrados da lugar a producir una fórmula que se apoya en la variación de las áreas como así también una fórmula que, utilizando la variación de la medida de los lados, reconstruye la fórmula de las áreas sucesivas. De este modo surgieron dos fórmulas: $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ y $g(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ que se presentaron en uno de los cursos en la puesta en común . Ilustramos en esta puesta en común como fueron retomadas y comparadas ambas producciones.

Diálogo 6.6. Reconstruyendo producciones de fórmulas. Puesta en común.

La docente va preguntando a toda la clase por las respuestas a las primeras preguntas y al mismo tiempo esto le permite elaborar en pizarrón esta tabla.

Doc_1. Yo voy anotando, n es el paso y A es el área.

N = paso .	A = AREA
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{64}$
4	$\frac{1}{256}$
...	

[121] Anticipábamos que producto de las exploraciones podrían surgir **fundamentaciones con** algunos de estos elementos en sus razonamientos, explícita o implícitamente y estaría a cargo del docente interpretar y dialogar con estas producciones.

A4. Profe pero vos dijiste que ...(no se escucha) entonces nosotros lo pusimos como que en el paso n era $(\frac{1}{4})^n$. Así $(\frac{1}{4})^0$ da uno que es el del paso 0, $(\frac{1}{4})^1$ es $\frac{1}{4}$ que es el del paso uno y así los otros.
Doc$_1$. Ah , les da bien. A ver, cuando ustedes fueron calculando las áreas ¿qué hicieron para ir calculando cada área?
Doc$_1$. Escucharon lo que hicieron ellas? Chicas fuerte!
A5. Al $\frac{1}{4}$ lo elevamos a la cantidad de pasos que hicimos.
Doc$_1$. Ya están dando como la regla. Ellas dicen que al $\frac{1}{4}$ lo elevan a la cantidad de pasos que hicieron. Y por qué aparece "elevado"?
A5. porque vamos haciendo $\frac{1}{4}$ x $\frac{1}{4}$ x $\frac{1}{4}$ ... los pasos
Doc$_1$. Como que la abreviatura era la potencia, así queda $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{4})^3$,
Doc$_1$. El equipo de allá pensó distinto la generación de las áreas, vale la pena que lo comentemos. El pobre Kevin luchaba con las chicas con que el $\frac{1}{4}$ y el $\frac{1}{4}$ pero nadie le daba bolilla porque estaban pensando en otra cosa. A ver, por qué no nos cuentan ¿en qué estaban pensando?
A6. Nosotros pensamos en $\frac{1}{2}$, por el lado.
Doc$_1$. A ver ellos en vez de generar áreas, primero generaron lados, **ellos no lo escribieron así pero yo lo voy a escribir así para que ustedes vean las cuentas que ellos hicieron.** En el 1º paso ¿qué lado tiene el cuadrado?
A7. 0,5
Doc$_1$. 0,5, la mitad. Entonces ellos dijeron Ah, listo si yo sé el lado del cuadrado ya sé el área, ¿cómo?
A6. Lo multiplicás por sí mismo.
Doc$_1$. Lo multiplicás por sí mismo o lo elevás al cuadrado, entonces te queda el área. ¿Qué hicieron en el paso 2 que sería este 2º cuadradito?
A6. Y para sacar el lado agarrás el $\frac{1}{2}$ y lo dividís por dos.
Doc$_1$. Entendieron lo que hicieron? Agarraron este lado y lo dividieron por dos. Ahora sería la mitad de la mitad. Y eso, ¿les dio...?
A6. $\frac{1}{4}$
Doc$_1$. Yo voy a poner así $\frac{1}{4}$. Y después cuando quisieron averiguar el área qué hicieron?
Ma. (que ya está montada en el razonamiento aunque no fue el propio) $\frac{1}{4}$ x $\frac{1}{4}$ = 1/16.
Doc$_1$. Vamos al 3º lado, a ver, el 3º lado de este cuadradito, ¿cuánto mide?
A8 1/16
Doc$_1$. No, cuidado, hablo del lado.
Ma. 1/8
Doc$_1$. 1/8 que es la mitad de $\frac{1}{4}$. Y entonces, una vez que tenían éste ¿qué hicieron?
A6. ahí sí, lo elevamos al cuadrado
Doc$_1$. Lo elevaron al cuadrado para el área. Entonces la pregunta para ustedes es ¿Cómo hicieron para saber en un paso n cualquiera cómo les daba el área? ¿Qué se supone que hicieron o buscaron primero?
A6. el lado.
Doc$_1$. Y ¿cómo buscaron el lado?
Ma. $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2}$ a la n. (Mariela no pertenece al grupo, está pensando junto con la explicación de la profesora).
Doc$_1$. Kevin dice que lo que "ellos" hacen... ojo, lo que ellos hacen, no lo que quería hacer Kevin (risas) es multiplicar $\frac{1}{2}$ un número de veces, a ver, en el primer paso tenían $\frac{1}{2}$, en el 2º paso $(\frac{1}{2})^2$, en el 3º paso $(\frac{1}{2})^3$, y así que en el paso n tendrían $(\frac{1}{2})^n$. Listo, ya tienen el lado en cada paso los chicos. ¿cómo llegan al área?
Ma. $(\frac{1}{2})^n$ al cuadrado.
Doc$_1$. $\frac{1}{2}^n$ al cuadrado o, como dice Agustín, que no le gusta poner cuadrado, él pone $\frac{1}{2}^n$ x $\frac{1}{2}^n$ (risas)

Pizarrón

N = paso .	LADO	AREA
1	1/2	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2} = 1/2^{2}$
2	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})^2$
3	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2})^2$
...n	$(1/2)^n$	$((1/2)^n)^2=(1/2)^n \times (1/2)^n$

A6. Profe, para que se vea bien la diferencia entre las dos fórmulas, lo que tenemos al final sería la fórmula que se basa en el lado sería $(\frac{1}{2}^{\ n})^2$
Doc_1. Claro.
A6. ¿Y para la fórmula general sería $(1/4)^n$?
Doc_1. Exacto y Florencia se tomó el trabajo de hacer la cuenta con cada una y resulta que da igual! ¿Por qué? Yo no sé nada (todos hablan juntos)

Los alumnos tienen en pizarrón ambas tablas y se hace evidente la necesidad de fundamentar la igualdad de ambas fórmulas. La docente devuelve esta actividad a los alumnos quienes apelan al conjunto de saberes algebraicos para fundamentar una igualdad de la que seguramente ya están convencidos, por el sentido que las operaciones tienen en el contexto del problema, no se trata de fracciones o de potencias, son lados de sucesivos cuadrados y áreas de sucesivos cuadrados. Cada fórmula adquiere sentido en la configuración del problema que cada grupo armó. Seguramente en cada grupo hay una mayor convicción respecto de un término de la igualdad que del otro, pero el trabajo docente de mostrar los razonamientos que llevaron a establecer cada fórmula da la confianza en la restante para cada grupo. El álgebra es requerida ahora para consolidar tal convicción. En esta modalidad de trabajo se proyecta una comunidad matemática.

Ma. Distributiva con la división
A2. Profe, porque $(\frac{1}{2})^2$ es $\frac{1}{4}$ y vos tenés ahí $\frac{1}{2}^{\ n}$ y después al cuadrado.
Doc_1. ¿Y entonces?
A2. Sería como $(1/4)^n$.
Ma. Hacés dos distributivas.
A11. No podés hacer $(1/4)^n$ porque vos tenés primero $\frac{1}{2}$ ^n y después al cuadrado.
Doc_1. Ah, el te dice que vos estás cambiando el orden, él dice acá tenés $\frac{1}{2}^{\ n}$ y después al cuadrado y vos hiciste $(\frac{1}{2})^2$ y después a la n.
Ma. ¡Ay Dios! Profe (risas) si vos hacés algo... ahí hay una división y podés hacer distributiva con la división.
Doc_1. ¿Se puede? Pará, decime qué hago.
Ma. Te queda, en la 1º distributiva $(1^n)/(2^n)$.
Doc_1. Pará, ¿están de acuerdo con eso? Ella aplica la distributiva del exponente en la división.
A6. cuando había un cuadrado ¿no podias hacer?....
Doc_1. Bueno pará, vamos a ver ahora qué podemos hacer.
Ma. Ahora. El numerador queda en 1 por que 1^n es 1x1x1...=1 y ahora hacés distributiva con el 2.
Doc_1. Ah, ahora hago distributiva con el 2.

Ma. Sí en el numerador te queda $1^2 = 1$ y en el denominador te queda $(2^n)^2$ que es lo mismo que 4^n
Doc_1. Pará. $1^2=1$ y ahora nos quedamos acá. Miren...
A12. profe sólo vale lo mismo si n=1.
Doc_1. A ver, lo vemos (y empieza a preguntarles a los alumnos por distintos valores n=1,2,3,4 y ven que todos les dan igual).
Doc_1. Chicos, ustedes tienen una potencia y otra potencia.
A6. ¡multiplicás!
Ma. ¡2n!
Doc_1. Ah! Pará ya sacamos un paréntesis por lo menos. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ y $2n = n2$

A2. Y hacés el otro $2^{2^n} = 2^{2n}$
Doc_1. A ver, ¿se escuchan? Tienen algo terrible, no se escuchan entre ustedes y por ahí estamos diciendo lo mismo.
A2. es lo mismo cambiar.
Doc_1. Pero ellos no ven por qué decís que es lo mismo. A ver chicos la multiplicación es conmutativa entonces $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$
Doc_1. Buenos cerremos acá. Lo que les pido para la clase que viene escriban lo que van pensando para que después se pueda discutir..

De este modo las producciones de los alumnos permitieron discutir varias propiedades de la potenciación que se estaban poniendo en juego en este problema y que se utilizarían en los posteriores. Esta puesta en común problematizando las dos fórmulas surgidas en el contexto del problema y recuperadas para ofrecer una oportunidad de uso de operaciones y propiedades algebraicas, fue una decisión de la docente tomada durante la clase, en función de las producciones que veía en los diferentes grupos. El problema es portador de un trabajo potencial. La gestión docente es imprescindible para que se plasme.

6.1.3 El problema de los piojos

El siguiente problema, el **"problema de los piojos"**, genera un nuevo escenario en el que la modelización resulta más compleja que en los casos anteriores tanto por el dominio de la variable independiente como por la manera de comunicar la variación. Veamos el enunciado:

En la cabeza de un niño se coloca un número determinado de piojos a las 10 de la mañana del día lunes 05/05/08 y se observa la evolución de la población de piojos mediante un sofisticado procedimiento computarizado (o sea, los piojos se pueden contar ¡con precisión!).

Transcurridos 10 días el niño convive con 180 piojos en su cabeza. Si se sabe que una población cualquiera de piojos tarda 5 días en triplicarse
a.- ¿cuántos piojos habrá transcurridos 20 días?
b.- ¿cuántos piojos había transcurridos 5 días?
c.- ¿cuántos piojos se pusieron en la cabeza?
d.- ¿cuántos piojos había el primer día?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

El enunciado habla de una forma de incremento en los piojos puestos en la cabeza de un niño sobre los días múltiplos de 5 ("tarda 5 días en triplicarse"). La primera interpretación que hacen los alumnos es que disponen una forma para contar los piojos en los días 5, 10, 15, 20, etc. En ninguno de los cinco cursos hubo grupo de alumnos que considerara que esta consigna también se puede aplicar a otras secuencias de días: 6, 11, 16, 21, etc. Y así a cualquier otra sucesión de naturales con resto k (siendo k = 1, 2, 3 o 4 en la división por 5). Aún cuando la frase elegida fue "una población cualquiera de piojos tarda 5 días en triplicarse" los alumnos interpretan este enunciado como una información limitada a los días múltiplos de 5.

La pregunta por la cantidad de piojos en cualquier día es, no obstante, válida, natural, razonable. Es decir, el problema de elaborar una función $f(n)$ donde n sea el día (ante la otra alternativa que consiste en considerar que n es el número de veces que se produce una triplicación del número de piojos y por lo tanto un múltiplo de 5) resulta admisible en el contexto del enunciado del problema. El problema de modelización se enriquece pues, entre otras cuestiones, aparecen varias variables independientes posibles: los días múltiplos de 5, todos los días o el tiempo como variable continua. Este contexto nos pareció, a priori durante el taller, portador de buenas condiciones para la emergencia de fundamentaciones que sostuvieran las diferentes respuestas que seguramente se producirían en clase. El problema de los piojos trajo, en realidad, mucho más de lo que habíamos imaginado. Concebimos a este problema como un problema abierto, que admite diferentes soluciones pues sus datos están incompletos para producir una única solución. Este hecho, interpretamos ahora como análisis posterior a nuestro trabajo, fue un gran generador de fundamentaciones pues, entendemos, los alumnos se sentían de distinto modo interpelados por el contexto del problema y en función de dicha interpelación producían distintas relaciones que, para que fueran aceptadas por sus compañeros, necesitaban ser fundamentadas. Esto habilitaba centrar la mirada de la clase sobre la relación entre las condiciones de funcionamiento de la situación y el modelo que se elige para representarla y este es uno de los aspectos -lo hemos señalado- que configuran la problemática de la fundamentación tal cual la hemos delineado.

El problema de los piojos abona entonces el terreno de la variable independiente continua, que se presenta a continuación en **el problema de la laguna** que luego analizaremos.

Otra de las características que nos interesaba en este era el hecho de que la fórmula exponencial correspondiente -si se considera como dominio la cantidad de días o el tiempo continuo transcurrido desde que se inicia el recuento- tiene exponente fraccionario. Esto suscitó en el taller el planteo por parte de algunas docentes de la necesidad de presentar un repaso de temas de potenciación antes de encarar esta secuencia. Acordamos con ellas esperar a que los alumnos se enfrentaran con la dificultad y en todo caso proponer alguna explicación de observarse su necesidad para que los alumnos avancen. Esta preocupación -legítima- de las profesoras, la de interrogarse si los alumnos tienen conocimientos necesarios para abordar un problema de manera fundamentada, es central de cara a nuestra problemática y el trabajo del taller ayudó a ponerla en primer plano como condición para que los profesores pudieran construir la convicción de que sus alumnos tenían los elementos necesarios para elaborar sus fundamentaciones.

Durante el taller tomamos el trabajo de Vilotta, Diego sobre la Enseñanza de la Función Exponencial[122] en el que se mostraba que el modelo lineal tiene tal fuerza de representación en los alumnos que no solo surge como primera respuesta a la cuestión del cambio que plantean estos problemas sino que persiste aún cuando el modelo exponencial se ha presentado y trabajado. Imaginamos que este hecho podía propiciar una buena situación para que la **fundamentación** de distintos alumnos apoyara distintas hipótesis de trabajo sobre la evolución de estas magnitudes.

Al discutir el problema en el taller consideramos que los alumnos enfrentarían con comodidad las preguntas relativas a los "días múltiplo de 5" usando relaciones establecidas en los dos problemas anteriores. El nuevo desafío radicaba en responder por el número de piojos en el primer día. En esta instancia anticipamos que surgiría el modelo lineal como respuesta utilizando la proporcionalidad del crecimiento o cambio (si en los 5 primeros días

[122] Tesina de grado de la Licenciatura en Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional del Nordeste.

aparecen 40 piojos en 1 día aparecerán 8 piojos). Esta fue una de las formas de responder de muchos grupos de alumnos. Otros alumnos interpretaron que la pregunta no correspondía, pues no se conoce la forma de reproducción de los piojos (algunos alumnos preguntaron si tenían que contar las liendres) o también que no tenía respuesta, en función de los datos del problema. También en otros casos - aún elaborando y utilizando la función exponencial - algunos contestaron que, como la respuesta daba un número no Natural - números "con coma"- no se podía considerar. Habíamos anticipado en el taller en nuestro análisis a priori muchas de estas respuestas y habíamos acordado con las docentes que ellas quedaban a cargo de reunir y comunicar (en el debate que se generara en la puesta en común) estas distintas producciones explicitando las diversas fundamentaciones subyacentes. Ilustramos a continuación algunas de las elaboraciones de los alumnos que dan cuenta de la diversidad encontrada. Presentamos producciones de tres cursos distintos.

Diálogo 6.7. Piojos al primer día. Producción (1)

En el siguiente ejemplo registramos la respuesta del alumno 1 en su carpeta.

Alumno 1, trabajando solo, produce esta tabla

1d -----------20p
5d -----------60p
10d----------180p
15d----------540p
20d----------1620p

También tiene escritas estas respuestas

a) hay 1620
b) hay 60p
c) se pusieron 20
d) no es posible saberlo

El alumno no quiso responder (le pregunté en mi calidad de observadora) cómo había pensado el problema (la pregunta d.- en este curso fue "cuántos piojos había en el día 7" en tanto que esta pregunta en las otras clases fue cuántos piojos había en el primer día). Pero un momento después tenía el siguiente diálogo con su compañera:

A1. A los 7 días no sabés porque no sabés cómo evoluciona
A2. Pero podés aproximar.
A1. Eso que querés hacer no es una aproximación es un promedio.
A2. Hacer un promedio también es hacer una aproximación.
A1. ¡Hacelo Lorena! ¡Que te molesta que yo no lo haga!
A2. Pero la profe me dijo que podía aproximar.
A1. Pero aproximar no es lo mismo que tomar un promedio nena.

A través de la discusión que mantiene con su compañera vemos que este alumno argumenta que la evolución del número de piojos no puede conocerse a partir de los datos del problema. Es por eso que el promedio que quiere hacer su compañera para él ni siquiera constituye una aproximación y, tal vez forzado por la necesidad de descartar la propuesta de su compañera sostiene que en este caso hacer el promedio no constituye una manera de aproximarse: el valor desconocido podría estar lejos. El valor desconocido podría estar lejos. Nos asomamos acá a un hecho que muchos autores –Balacheff y Lakatos entre otros - han relevado: la necesidad de establecer que algo no es posible promueve la producción de fundamentación[123].

En el próximo ejemplo vemos cómo el contexto interpela la producción y uso de la fórmula en un grupo que había desarrollado una fórmula para los días múltiplos de 5.

Diálogo 6.8. Piojos al primer día. Producción (2)

1.- Doc_1. Entonces me parece que ustedes me pueden dar una fórmula que me diga los piojos a los n días.
2.- A2. Tres a la $n/5$
3.- Doc_1. ¡Claro! Ahora digo, pensemos un poquito. Eso funciona ¿para cualquier números de días?
4.- A2. sí
5.- Doc_1. Ajá, funciona para 5, 10 etc. ¿Y si yo pongo? ... a ver qué contestaron en el punto d.
6.- A3. en el primer día no sabemos (en el punto d.- se preguntaba por los piojos al primer día)
7.- Doc_1. ¿Por qué? No me queda clara la explicación (la profesora está leyendo su carpeta).

Este grupo ha producido una fórmula y la primera intervención de la profesora los lleva a sostener que la fórmula se aplica a cualquier natural (todo en el contexto del problema pues se habla de días). La intención de la profesora es saber, si armada la fórmula, los alumnos pueden considerar su extensión a números que no sean múltiplos de 5 y si dicha extensión (explícita o implícita) entra en contradicción o no con la respuesta a la pregunta por los piojos en el primer día. Si bien este grupo ya había logrado fórmulas exponenciales para los problemas de las áreas de los cuadrados, la producción de fórmulas exponenciales en un

[123] No estamos afirmando que esta sola condición asegura que se produzcan fundamentaciones, sólo remarcamos que la necesidad de establecer que algo no es posible sitúa los alumnos en el tratamiento de una sentencia general y eso a la vez predispone a la producción de argumentos en alumnos que están inmersos en una práctica de trabajo fundamentado.

pequeño conjunto de sesiones de trabajo en algunos problemas no alcanza para instalar el modelo exponencial como un saber del grupo.

> 8.- A(Mar) es que en el primer día no sabemos exactamente lo que pasó; en el primer día podría ser cualquier cosa, sabemos lo que pasa cuando hacemos cada 5 días.
> 9.- Doc_1 .Ustedes dicen que no queda clara la evolución de los piojos, bien, pero esa fórmula nos habilita para hacerlo en el día 1. Es decir esa fórmula cuando la usan para un múltiplo de 5 encaja bien con los datos que usaron pero también se podría usar en otros números que no son múltiplos de 5.
> 10.- A(Mar) pero tendríamos medio piojo por ahí.

Una vez producida, para este grupo la fórmula queda, a priori, validada por el contexto. En la medida en que, por ejemplo, el resultado de la fórmula no sea un número natural su uso queda cuestionado (línea 10). Nos asomamos acá a cierta restricción por parte de los alumnos para extender la fórmula: la misma tiene que respetar el funcionamiento que ellos están concibiendo del contexto, no están en condiciones todavía - esto puede ser objeto de trabajo en la secuencia- de separar modelo y realidad de modo tal de aceptar describir de manera aproximada la cantidad de piojos con un modelo que arroja números irracionales. Recordemos que en el marco teórico hemos señalado que la validación del modelo que se utiliza es uno de los aspectos de la fundamentación que estamos considerando en este proyecto y en este sentido el ejemplo nos "habla" del trabajo de discusión con los alumnos que requiere habilitar el uso de un modelo para describir un contexto[124].

El diálogo anterior continúa centrado en el aumento de piojos día por día y en establecer qué significa -como plantea el problema- que la variación sea pareja (líneas 11 y 12). En el marco de la discusión el Alumno 3 sentencia que los datos no alcanzan (línea 25).

> 11.- Doc_1. Y ustedes dicen que esa variación les permite ver que lo que se agrega cada día es parejo. Eso ¿qué quiere decir?
> 12.- A(Mar). Que siempre se agrega lo mismo, el primer día 2, el segundo también etc.
> 13.- Doc_1. A ver eso, veámoslo con los números que tenemos. En el día cero había 20 piojos, a los 5 días hay 60, hubo una variación de 40 piojos en 5 días.
> 14.- A3. 8 piojos por día. (aparece la linealidad)
> 15.- Doc_1. Del día 5 al 10 hay 120 nuevos entonces hay un cambio parejo de ....
> 16.- A(Mar) 24 piojos
> 17.- A3. Si reemplazás esa fórmula con 1 te da 24.
> 18.- Doc_1. ¿A ver?
> 19.- A(Mar) Te da 24,9 casi 25
> 20.- Doc_1. La fórmula en el medio no nos está dando lo mismo.
> 21.- A3. Yo no sé sacar lo que pasa en el medio.

[124] Analizamos este aspecto del trabajo desde la perspectiva del docente en el Capítulo 8.

22.- Doc_1. Parece que tenemos una idea intuitiva de lo que pasa adentro y esta fórmula no nos dice lo mismo
23.- A(Mar) Es más exacto.
24.- A3. Para mí eso está mal, no es que siempre suman 8.

Marianela va fluctuando su apreciación sobre la fórmula. En el extracto anterior (líneas 8 y 10) la cuestionaba porque no da un número natural pero en este diálogo opina que la fórmula es más exacta (línea 23). En cambio el Alumno 3 valida su respuesta a partir del contexto y si bien durante este extracto también fluctúa en su apreciación sobre la evolución de los piojos (líneas 14 y 24) finalizando el diálogo sostiene:

25.- A3. Para mí nunca se va a saber cuántos piojos va a haber con exactitud. Porque los piojos ponen distinta cantidad de huevos.

Para este grupo de alumnos el valor de verdad asignado a la fórmula se confrontaba con el contexto del problema permanentemente. El diálogo "modelo-contexto" está muy presente en ellos siendo el contexto la validación permanente del modelo. En particular A3, frente a la incertidumbre que le genera extender la fórmula que el grupo ha producido hace prevalecer una representación de la situación "real" que invalida el intento de buscar la fórmula para los valores intermedios y en algún sentido invalida también la ley que se propuso en el enunciado del problema para contar la evolución de los piojos (aunque el alumno no lo piense así). Podríamos decir que a esta altura de la elaboración de los alumnos, el contexto "le gana" al modelo. Efectivamente, *nunca se va a saber con exactitud porque los piojos ponen distinta cantidad de huevos* se contrapone *a una población de piojos tarda 5 días en triplicarse*. La fórmula puede o no ser una representación "fiel" de la situación, puede resultar correcta en unos datos y no en otros. La validez de dicha fórmula en tanto modelo está en proceso.

Veremos ahora otra producción (en otro curso) que asigna a la fórmula la explicación de todo el proceso.

Diálogo 6.9. Piojos al primer día. Producción (3)

A(Juan). **tenemos que encontrar la fórmula para ver lo que pasa en el primer día**. A ver, tenemos que 20×3^n sirve pero cada 5 días.
Al. ¿Y si graficamos?
AJ. Es exponencial
Doc_3. ¿Por qué decís que es exponencial?, ¿ustedes también piensan que es exponencial?
AJ. El problema es que se triplica para cada 5 días.
Doc_3.¿Si te dijeran que se triplica cada día entonces no tendrías problemas?

AJ. No, seguro sería exponencial. Día 1.... 20x3, día 2.... 20x3x3... y así seguís.

Quieren producir una fórmula pero no avanzan entonces la profesora sugiere que hagan una tabla. Para elaborarla se preguntan por las variables que intervienen.

AJ. x es cantidad de días, y es cantidad de piojos. Al día cero, ahí ya hay un tema. Si llamamos n a la cantidad de días y n es el exponente....hacemos 20 "por algo a la n", hay que hallar el algo. Cuando n es cero queda 1 y nos da 20. ¿Está bien?
Doc$_3$. Están cerca. ¿Y en 5 días qué exponente necesitan?
AJ. 5 si n es la cantidad de días.

Esta es la tabla que arman en el equipo.

Días	Piojos
0	20
5	20.3
10	20.3^2
15	$20.\ 3^3$

Doc$_3$. Pero vos te diste cuenta que vas multiplicando por potencias de 3. En 5 días ¿qué exponente pusiste?
AJ: ¿A los 5 días? uno
Doc$_3$. ¿A los 10?
AJ. 2
Doc$_3$. ¿Y en 15?
AJ. 3. Ahí está, si quisiéramos ver cuántos piojos hay el primer día tendríamos que poner 20x $3^{1/5}$ **¿se puede poner 1/5 en el exponente?**

Esta última pregunta nos llama poderosamente la atención. Como puede observarse a partir del diálogo, el alumno encuentra una regularidad que - al plasmarla en una fórmula - interpela sus nociones algebraicas. Se pregunta de este modo por la posibilidad de operar con la potenciación en el campo de números racionales - lo que no estaba dentro de su saberes previos. La modelización trajo de este modo una pregunta matemática ¿existe esta operación? ¿tiene sentido plantearla? Luego de explicarle a todo el grupo el concepto de exponente fraccionario[125] siguieron trabajando en la búsqueda de la fórmula de los piojos para un día n genérico. La expresión les pareció adecuada para contar los piojos del primer día a partir de la validación de la profesora (y la confianza de Juan en las "fórmulas").

AJ. entonces ¿queda así? 20x $3^{1/5}$
Doc$_3$. sí, ¿llegaron a la fórmula general?
AJ. no podemos, porque tenemos los días pero no es lo que va en el exponente.

Este comentario da cuenta de que aún cuando el alumno, a partir del diálogo anterior a este último, encuentra una regularidad (no podemos saber qué es lo que piensa exactamente

[125] El grupo conocía las raíces de diversos índices y la profesora presentó el exponente fraccionario en términos de la potenciación y de la radicación.

pero seguramente ha observado que los exponentes que él utiliza son los días divididos por cinco) que le permite dar una expresión para los piojos del primer día, esto todavía no lo habilita a construir una fórmula para un día n genérico. Continuamos el diálogo con Juan según su producción para el primer día y extendiéndola hacia otros días que no fueran múltiplos de cinco (el primer día nos permitía también indicar los piojos en otros días con restos de 5 módulo uno) y esto permite que Juan elabore la fórmula.

6.1.3,5 Una producción inesperada

El problema de los piojos dio lugar a que cada docente arribara con los distintos grupos de alumnos a diferentes respuestas en cuanto al número de piojos en el primer o séptimo día (según los enunciados entregados) y las consensuara luego en la fase de puesta en común. Así, en algunas clases primó, la idea de que el número de piojos no podía establecerse fuera de los días múltiplos de 5 pues no se conoce la forma de reproducción del piojo. En otras clases se utilizó mayoritariamente la fórmula de crecimiento de tipo exponencial $f(n) = 20 \cdot 3^{n}$, donde n indica los períodos en los que se triplica y por lo tanto se va en escalas de 5 en 5 para los días y también surgió la fórmula $f(x) = 20 \cdot 3^{x/5}$, donde x señala días.

Finalmente, un tercer tipo de respuesta que apareció en sólo un par de grupos, explicó el número de piojos de un modo que no habíamos anticipado como posible para este conjunto de alumnos. Esta situación imprevista fue observada en dos cursos distintos y puso en evidencia la enorme riqueza de este problema. Afianzamos entonces a partir de esta experiencia la idea de **comunidad clase** como unidad de producción matemática.

Pero, además y tal vez incluso en primer plano (aunque dejaremos esto para el análisis de la gestión docente), este problema - junto con todas las producciones que alojó y generó - nos permitió afianzar una hipótesis de trabajo que habíamos discutido con las docentes en términos generales pero que aquí tomaba una forma muy específica: una condición fundamental, indiscutible, necesaria e importante para poder gestionar la producción de diversos razonamientos de los estudiantes es que **“el docente debe pensar junto a sus alumnos”**.

Diálogo 6.10. La modelización y el ajuste de la realidad en la producción de fundamentaciones Diálogo Docente – Grupo de alumnos.

Doc_1. El lunes a las 10 de la mañana ¿qué tiempo es?
(los alumnos hablan al mismo tiempo uno de ellos dice que es tiempo cero pero no parece ser escuchado por los demás)
Doc_1. El lunes a las 10 de la mañana me pusieron los piojos en el tiempo cero, el martes a las 10 de la mañana ¿cuántos tengo? Es el día 1.
A1. 180/3 y a eso lo divido por 5 días. (no se escucha)
Doc_1. ¿Cómo?
A1. 180/3 me da 60 y eso lo divido por 5 días. Me da 12.
Doc_1. 180 había a los 10 días
A1. Y eso lo voy a tener el 1º día: 20+ 12
Doc_1. Pará (le dice a otros alumnos que están proponiendo otra cosa) hagamos lo que él piensa, pero no es 180.
A1. Ah, no 60.
Doc_1 ¿Cuántos tenías a los 5 días?
A1. 60
Doc_1. 60 tenías el día 5, hagamos lo que él dice pero teniendo en cuenta lo que tenía el día 5.
A2. Vos dijiste 12 ¿o no?
A1. Pero cada 5 días se triplica, entonces lo tengo que dividir por 3
Doc_1. ¿Y esos 20 que son?
A2. ¿Para qué?
A1. Para ver cuánto tengo en un día
Doc_1. No, porque los 20 son los que te plantaron en el tiempo cero. Pero eso es lo que te plantaron. (se da una discusión entre los alumnos).Ah!, Yo creo que vos tenés una confusión. Vos tenés una cantidad y querés dividir esa cantidad en 5. Ahora yo te pregunto, del tiempo cero en el que te pusieron los piojos a los 60 del día 5, para vos ¿como hacés para saber el día 1?
A4. ¡No hay! ¿Por qué hay?
Doc_1. Porque transcurren 5 días, el día 5 hay 60
A3. Para mi hay 32 (suponemos que está haciendo 20+ 12)
A2. 40 =60-20 son los piojos que le crecieron, los que.....
Doc_1. Los nuevos. En el tiempo 0 tenías...
A1. 20
Doc_1. Pasaron 5 días y tenías...
A1. 60
Doc_1. Pasaron 10 días y tenías...
A1. 180
Doc_1. Pasaron 15 días y tenías 540. Bueno, muy bien, él lo que dice es que va a explicar lo que puso acá. Y dice que aumentaron 40 piojos. Ahora vos ¿qué decís?
A1. Que quiero saber cuánto aumentaron por día
Doc_1. Claro, yo quiero saber cuánto aumenta por día. Ojo, no en un día, el primer día. Entonces ellos te dicen que hagas 40/5. Son 8, el primer día tengo....
A1. 28,
Doc_1. ¿El segundo día?
A1.36
Doc_1. El 3º día?
A1. 44
[la docente sigue preguntando de a uno hasta el 10. Los alumnos van calculando los datos pedidos hasta llegar al décimo día y ocurre lo que esperábamos]
Doc_1. ¿El 9º?

A1. 92
Doc$_1$. ¿Y el 10?
A1. 180! jajajaja ....
Doc$_1$. ¡No, no! ¡Ocho más! ¡entonces tenemos 100! Y ustedes tenían 180.

Esta había sido la devolución discutida durante el taller, íbamos a mostrar que el modelo lineal no era el recurso a utilizar en estos problemas a partir de los contraejemplos que estaban disponibles en función de las elaboraciones anteriores. Sin embargo este grupo tuvo una retroacción frente a este planteo que no habíamos anticipado.

A2. Entonces me dio mal usted. Acá es distinto, no son siempre 8...
Doc$_1$. Ah parate el dice que yo esto solo lo puedo hacer hasta el día 5.
Obs. Claro, sumar de a 8 funciona hasta el 5º día, dice él.
A3. No son proporcionales. No me da lo mismo yo hice las variaciones que hice acá y no me da lo mismo.
A1. Después lo tenés que hacer con 120=180-60
Doc$_1$. Convengamos que hay algo que acá ustedes pusieron que es que la variación no es siempre la misma cada 5 días, entonces ustedes dicen que van a tomar la variación de cada 5 días y ahí lo van a dividir por 5 y así lo van a hacer. **¿Qué es lo que les dice que así está bien? ¿por qué ustedes pueden hacer eso?, ¿cómo lo pueden justificar?**
A2. **¡Porque te da!**
Doc$_1$. ¿Qué es lo que te da?
A1. Profe ¿por qué la complica tanto? ¡no lo complique más!

Los alumnos ajustan sus conocimientos de la linealidad y proponen -pensamos que sin mucha anticipación- un modelo lineal por intervalos. La docente exigida por la velocidad que le demanda el trabajo oral -y por la sorpresa al constatar que los datos que van produciendo los alumnos "encajan" en el planteo- está intentando justamente "pensar junto a sus alumnos".[126]

Doc$_1$. A ver, ustedes ven que cada 5 días se triplican, ¿estamos de acuerdo con esto?
Todos, ¡sí!
Doc$_1$, Toman el 120 dividen por 5 ¿cuánto te da?
A1. 24
Doc$_1$. Entonces en el 6º día tendrían 84...... yo digo una cosa. Del día 1 al día 6 ¿cuántos días pasaron?
A1. 5 días
Doc$_1$. Día 1 tiene 28, día 6 tiene 84, ¿se triplicaron?
A1. Sí
Doc$_1$. Aja. Día 2 al 7 pasaron 5 días teníamos 36 y ahora tenemos 108 ......

Acá se produce un momento de tensión donde la docente entiende que el modelo podría ser adecuado, aún cuando no tiene certeza. Los alumnos vuelven a confirmar sus cuentas y

[126] En realidad los alumnos no habían producido una fórmula pero era evidente que podían calcular la cantidad de piojos pues entendían el procedimiento que habían ideado. No tenían una formulación genérica pero sabían como proceder.

datos del problema y así están confirmando su modelo. En este contexto la docente da una respuesta provisoria que da cuenta de su posición.

Doc$_1$. Bueno, te digo una cosa? Yo hoy les voy a dejar una tarea pero yo me llevo otra ¿eh? Me van a hacer pensar en el fin de semana.

La docente deja al grupo de alumnos de "la poligonal" con un cierre provisorio de su producción y lleva esto al taller.

El modelo poligonal propuesto por los alumnos responde a la consigna "cada cinco días se triplican" y fue de este modo recibido como una nueva producción. La docente se encargó de traer al taller la definición de una poligonal (o función lineal a trozos) que respondía a los datos. En el espacio Taller explicitamos que para exigir el modelo exponencial y rechazar el modelo de la poligonal era necesario un enunciado que planteara la forma de variación no solo para una variación fija – en este caso cinco días – sino para cualquier amplitud posible. En otros términos, el modelo propuesto por los alumnos responde a la condición:

Cualquiera sea el valor de t, $f(t+5) = 3 \times f(t)$

En tanto que un modelo exponencial exige algo más:

Para cualquier valor real h existe $k(h) = k_h$ de modo que la igualdad

$f(t+h) = k_h \times f(t)$ se verifica para todo t real

Esta última condición no es verificada por el modelo poligonal.

La producción por parte de los alumnos del modelo poligonal suscitó en nosotros reflexiones en dos planos: a) los modos de aproximarse a la construcción de un modelo exponencial a partir del análisis de ciertos contextos particulares y b) la exigencias del docente confrontado a la interacción con alumnos a los que se invita a producir abiertamente.

Con respecto a la primera cuestión, el análisis nos lleva a valorar dos cuestiones. Por un lado subrayamos el interés de plantear un problema que admita diferentes modelos posibles porque resulta un modo fecundo de centrar la mirada de los alumnos en el análisis de las condiciones de funcionamiento del contexto. Por otro lado, remarcamos la fertilidad de introducir el tratamiento del modelo exponencial (y tal vez, más en general de un modelo nuevo para los alumnos) **a partir de un conjunto de problemas** (y no de uno solo) cada uno de los cuales va aportando diferentes rasgos del modelo hasta llegar a una caracterización acabada.

A nivel del trabajo del profesor, creemos que el diálogo anterior da cuenta de dos condiciones que hemos mencionado en el marco teórico. La oralidad imprime en el docente un conjunto de exigencias a las que debe prestar atención. A su vez la oralidad y el trabajo en pequeños grupos es promotor de un alto nivel de producción y de validaciones en un escenario en el que se ha instalado el debate (incluso el que se da al interior de los grupos).

Por otra parte entendemos que el docente se ve tensionado ante tal situación, también para él hay un cambio del contrato. Los alumnos esperan un docente que tenga respuesta para todos sus interrogantes y que no aloje "la duda". Los docentes tienen muchas veces esa misma expectativa respecto de sí mismos. Si no opera un cambio del contrato didáctico el docente rechazará de varios modos más o menos silenciosos ponerse a prueba frente a sus alumnos, y esto no dará condiciones suficientes para la emergencia de un trabajo de compromiso intelectual.

También vemos que la producción de los alumnos rompe la asimetría docente- alumnos[127]. Es necesario un involucramiento genuino del docente con la producción de los alumnos que sea superadora de una lectura de zozobra respecto de la escena y de sí mismo. Dudar con ellos y confirmar a posteriori con ellos que el modelo funciona es la mejor estrategia. El vínculo con los alumnos se alimenta del vínculo con el conocimiento.

6.1.4 Problema de la laguna

Como anunciamos antes, después del despliegue realizado a partir de los tres problemas anteriores, se propone un problema con dominio continuo y en el que la variación se expresa en términos de porcentaje. Veamos su enunciado:

Una laguna contiene sedimentos uniformemente distribuidos que reducen la transmisión de la luz a través del agua. Dicha luminosidad se reduce en un 20% cada vez que se avanza un metro hacia la profundidad de la laguna, (es decir, cualquiera sea el nivel de profundidad en el que se encuentre el buzo, al descender un metro pierde el 20% de luminosidad que tenía).

[127] Queremos destacar que éste era un grupo de alumnos descrito por la docente como un grupo con un desempeño en la materia por debajo de la media del curso. En tal sentido esta situación de producción resultó una excelente e inesperada noticia para sus integrantes. Este hecho volvió al taller para un análisis.

Un buzo está pronto a sumergirse en dicha laguna; si consideramos la intensidad de la luz (medida en unidades lumínicas), como de 100 unidades en la superficie:

a. Realizar una tabla que indique la luminosidad para cada uno de los primeros 10 metros.

b. ¿Puedes decir qué intensidad de luz tendrá el buzo al bajar 0,5 m?

c. Nuestro buzo en cuestión tiene instrumentos de medición que pueden detectar luz hasta una intensidad del 0,2 unidades lumínicas.Teniendo en cuenta este dato, ¿podrá detectar luz si baja a 20 m?

d. ¿Hasta qué profundidad podrá descender con su instrumental, para todavía detectar cierta luminosidad?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

El **problema de la laguna** comparte con el segundo problema de los cuadrados que la magnitud "luminosidad de la laguna" resulta decreciente. Ahora bien, se presentan por su parte dos elementos nuevos: por primera vez, el alumno se encuentra con una situación exponencial donde aparece el continuo dado que se puede pensar la luminosidad en cualquier punto del agua. Además se utiliza por primera vez un porcentaje como forma de describir el cambio. Se mencionó en el taller que los alumnos olvidan la forma de trabajar con porcentajes y se discutió la posibilidad de realizar un repaso del tema. Creímos que un trabajo de cada docente en pizarrón podía condicionar la forma de abordar el problema pero acordamos que cada profesor decidiría si realizar o no alguna intervención en la clase, en la medida que detectara como impedimento el dominio de sus alumnos del porcentaje en los cálculos que necesitaban realizar.

La tabla que se les pide al inicio tiene por objetivo dejar datos con los que pudiéramos confrontar luego tanto la luminosidad en el medio metro como las preguntas c.- y d.- sobre la luminosidad a los 20 metros y la profundidad última hasta la cual el buzo podría detectar luminosidad con su aparato de medición.

La anticipación que hicieron las docentes sobre el uso de porcentajes fue constatada luego en todos los grupos, en el sentido de que el cálculo de porcentajes tuvo que ser recordado por las docentes en casi la mitad de cada curso. La idea de que el porcentaje refería siempre a la última luminosidad y no a la primera debió aclararse con frecuencia.

Siendo este el cuarto problema que los alumnos abordan muchos de ellos quieren producir una fórmula como las que ya venían elaborando. Se enfrentan aquí con el siguiente problema: el dato sobre la disminución (comparado con el dato sobre la triplicación de los piojos y sobre la duplicación de áreas o la reducción a la cuarta parte de los cuadrados de los problemas uno y dos) está, por primera vez, indicado en forma de una quita. Esto hace que los alumnos formulen el cambio de la luminosidad en términos de una diferencia de valores para cada paso. Los valores de la tabla no habilitan la observación de una regularidad (a menos que la tabla esté errada y se trate de restar cada metro 20 unidades lumínicas, en cuyo caso la fórmula es lineal). Una condición para la elaboración de la fórmula consiste en comparar las unidades lumínicas entre un metro de profundidad y el siguiente observando que en cada metro se retiene un 80% de la luminosidad. Sin ver la equivalencia entre quitar el 20 por ciento y quedarse con el ochenta por ciento (lo que a su vez se escribe en términos de una multiplicación "0,8 de la luminosidad anterior") los alumnos no logran producir una fórmula. Esta equivalencia consiste entonces en parte de la **fundamentación** de la fórmula.

Aún así, la elaboración de la fórmula que los alumnos conciben en principio para un dominio entero no se extiende de manera inmediata a un dominio continuo. Veamos el siguiente extracto al respecto:

Diálogo 6.11. Campo de aplicación de una fórmula. Diálogo alumno - docente.

El alumno tiene anotado en su carpeta lo siguiente:

$100 \,.\, (0{,}8)^m \longrightarrow$ cantidad de metros

luminosidad
la superficie

Para obtener el 80%
sacar el 20% (100% - 20%)

Doc$_3$. ¿Usaste la fórmula para encontrar la luminosidad en medio metro? (estaba anotado en su hoja que en medio metro había 90)
A. No, lo hice antes, a ojo. (El alumno se pone a probar con la fórmula)
A. No me da, da 89,44 y no 90.
Doc$_3$. ¿Y cuál es el correcto? 90 o 89,44
A. ¡Claro!, no es el 10%, no es lo mismo, yo hice el 10, pero no es la mitad. Hay que hacer otra cosa!!!!!!

Evidentemente es tan fuerte en la imagen de los alumnos el modelo proporcional que disponer de una fórmula no constituye un recurso suficiente para "saltar" a otro modelo.

Aunque los alumnos todavía no tienen elementos para hacer funcionar la fórmula para cualquier valor, este último alumno detecta una contradicción entre el uso intuitivo de la proporcionalidad y la aplicación de la fórmula al valor 0,5. Esta contradicción tiene un valor productivo para avanzar en la extensión de la fórmula.

De todos modos, más allá de las dificultades de extensión de la fórmula recién señaladas el contexto de la laguna habilita la aceptación de un dominio continuo, a diferencia de lo que sucede con el problema de los piojos en el que muchos alumnos sólo aceptan trabajar con los múltiplos de 5. En este caso, la pregunta por la luminosidad en el primer ½ metro no es cuestionada y sí, en cambio, levanta distintas discusiones sobre el posible uso de la proporcionalidad en el problema. El uso que hacen los alumnos sobre el concepto de proporcionalidad no es siempre el mismo, se alude a distintas constantes de proporcionalidad y pocas veces se explicita, tanto entre alumnos como entre alumnos y docentes. Esto dificulta el debate, para muchos docentes resulta complejo desentrañar estas cuestiones durante las discusiones de sus alumnos.

Diálogo 6.12. La luminosidad y la no proporcionalidad del porcentaje. Docente y alumnos

Al. ¡profe!
Doc_1 . ¿Ya terminaron?
Al. ¡Sí!
Doc_1. ¿Y cómo es en medio metro?
Al. No, ese es raro, yo entendí que partiendo de cualquier lado si bajás un metro te quedás con el 20% menos pero si lo hacés en 0,5 no me va a dar, no va a ser el mismo de cualquier punto.
Al 2. Sí, yo lo hice, sí te da.
Al 1. No, no te da.
Al 2. Sí, mirá. Lo pensás. Hacés así: en 0 metros 100, en 1 metro 20 entonces es obvio que en medio metro es la mitad, diez.
Doc_1. ¿Por qué es obvio?
Al 2. No, no es obvio.
Doc_1. Pero eso dijiste vos.
Al 1. Si es como vos decís, si vos sacás el 10% de 100 te quedan 90 y después tenés que llegar con el 10% de nuevo a 80 y no llegás, llegás a 81 que es distinto. Te está faltando porcentaje.
Doc_1. ¿Podés explicar con un poco más de detalle para que te entiendan?
Al 1. Sí claro. Vos sacás el 10% y te da 90 pero el próximo 10% no te da 80.
Al 2. Y **pero llegás a 90 que es lo único que te piden y listo**.
Al 1. Y no, porque **tiene que ser proporcional**. Vos después tenés que llegar a 80 para comprobarlo, si no después no tiene sentido.
Al 2. pero te piden a medio metro. Es la mitad.
Doc_1. ¿Por qué?

Al1. **Porque es proporcional**
Doc$_1$. **Entonces si bajás el doble tenés que tener el doble del porcentaje. Acá bajás 1 metro y descontás el 20% entonces en dos metros ¿bajás 40%?**
Al1. Ah, no.

El diálogo anterior muestra que el análisis de la consistencia de los datos es potencialmente un punto de apoyo importante para aceptar o rechazar soluciones de una manera argumentada. Si bien el alumno 2 no va más allá de la consigna -lo cual estaría mostrando que la potencialidad de los datos se "activa" con un cierto posicionamiento del alumno y no es en sí misma portadora de garantías - el alumno 1 tiene la intención de controlar sus respuestas y para ello analiza que el dato obtenido vía proporcionalidad (la luminosidad a ½ metro) entra en contradicción con otros datos obtenidos de manera más segura a partir del enunciado del problema (la luminosidad a 1 metro de profundidad). La fundamentación de la proporcionalidad se rebate con la misma proporcionalidad aplicada al doble de la disminución de la profundidad.

En el taller acordamos con las docentes que la refutación a la respuesta del 10% se apoyaría en las tablas que ya habían realizado preguntándoles si las mismas daban cuenta de la proporcionalidad. Sin embargo la existencia o no de proporcionalidad podía aludir a distintas magnitudes en juego: la luminosidad, el porcentaje de la luminosidad restante, el porcentaje de pérdida de la luminosidad. Sin una explicitación de las magnitudes aludidas no pueden aclararse las posiciones de alumnos o docentes.

Otra relación anticipada fue la interpretación del porcentaje del 20% como una quita de la quinta parte. De este modo los alumnos deducen con más facilidad que la luminosidad restante representa $\frac{4}{5}$ de la que hay un metro más arriba. Este razonamiento les permite formalizar la expresión $L(m)=\left(\frac{4}{5}\right)^m \times 100$. En ese caso queda en manos del docente, generar la discusión que lleve a identificar la equivalencia entre las fórmulas que producen diversos grupos $L(m)=\left(\frac{4}{5}\right)^m \times 100$ y $L(m)=0{,}8^m \times 100$.

El problema no pide la producción de una fórmula, esto fue pensado para dejar en manos de los alumnos la decisión de producir una fórmula ya sea para economizar cálculos como para fundamentar respuestas. En particular, en el punto c.- los alumnos deben calcular la luminosidad en 20 metros de profundidad. Sin una fórmula que les permita hacer el cálculo con calculadora los alumnos tienen que realizar el cálculo de la luminosidad, ya sea 20 veces o bien, extendiendo la tabla pedida en el inciso a.- 10 renglones más. Anticipamos que esto favorecería la producción de tal fórmula. Sin embargo, la experiencia en aula no confirmó nuestra anticipación[128]. La generalidad como elemento de economía no está disponible y en todo caso será el resultado de una construcción.

En la parte d.- se les pide a los alumnos que den una precisión en centímetros. Este ítem no tiene como objetivo que los alumnos se involucren en la resolución de ecuaciones exponenciales. Se busca en cambio que a partir de esta consigna utilicen la fórmula para explorar valores hasta encontrar que el buzo perderá la posibilidad de medir con su instrumental a los 28 metros. A partir de ahí los alumnos siguen explorando en centímetros y para ello utilizarán exponentes decimales.

El contexto de este problema constituye también un soporte para elaborar una idea cuya aceptación ofrece cierta resistencia por parte de los alumnos: aunque la función decrece, no "toca" el cero. Veamos un extracto que ejemplifica esta cuestión:

Un grupo de alumnos está embarcado en el cálculo de la luminosidad a los 20 metros completando una tabla con la luminosidad en cada metro y utilizando el 80%

Diálogo 6.13. La luminosidad nula y el porcentaje. Docente y alumnos

Doc$_5$. ¿Va a llegar a cero?

A1. En algún momento sí.
A2. Y sí.
(la docente hace un silencio observando el desarrollo en carpetas)
A2. ¡Ah, no! pará.... no sé...
Doc$_5$. ¿Por qué dudás?
A2. Y porque para que te de cero resulta que **cero tiene que ser el 80% de algo** y cero no es el 80% de nada. Entonces no va a dar cero.

Nuevamente nos encontramos acá con una idea que da sus frutos: la necesidad de argumentar que algo no es posible promueve la producción de argumentos generales.

[128] Si bien algunos grupos producen la fórmula, lo hacen en general y como forma de responder a todas las preguntas. Por otra parte son muchos los grupos de alumnos que realizan todos los cálculos hasta llegar a los 20 metros de profundidad. Muchos alumnos se ocupan de repetir un enorme repertorio de cuentas. En algunos grupos se asignan roles para dividir la tarea de calcular y anotar los resultados en carpetas. En otros grupos todos realizan las cuentas para confirmar resultados y no cometer errores.

Con la intención de ofrecer la oportunidad de que los alumnos siguieran trabajando sobre las relaciones entre linealidad y variación exponencial planteamos el siguiente problema en el que proponemos la comparación explícita de dos situaciones, cada una respondiendo a un tipo de variación.

6.1.5 Problema de los contratos

Propusimos a los alumnos el siguiente enunciado:

Patricia ha recibido dos propuestas de dos empresas interesadas en su perfil laboral. Una de las empresas le ofrece ocupar el cargo de gerencia de proyecto especiales y le hace la siguiente oferta de sueldo: $10.000 inicialmente, y un aumento **mensual** de $4.000. La otra empresa le ofrece ocupar el cargo de gerencia de publicidad, un sueldo inicial de $10.000 y un aumento **mensual** de un 20%.

- ¿Qué oferta será más ventajosa?
- ¿cómo explicarías convincentemente la conveniencia de una de las ofertas respecto de la otra?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Como anunciamos el "**problema de los contratos**" tiene dos intenciones. Al tener en cuenta un modelo claramente lineal propicia que los alumnos tengan frente a si, los dos modelos en el mismo problema y , al verse confrontados a la comparación comiencen a establecer diferencias entre uno y otro. También tiene como objetivo trabajar con los gráficos y así generar condiciones para ver estas diferencias desde el lenguaje gráfico, en diálogo con el lenguaje algebraico. Anticipamos que las gráficas podrían surgir frente al pedido de una explicación convincente de la mejor oferta pues el recurso gráfico permite que los alumnos identifiquen relaciones que podrían no ser percibidas a partir del uso de tablas o de las fórmulas.

Si bien ambos contratos comienzan con el mismo sueldo, en un principio el aumento en el modelo lineal es superior al del modelo exponencial. De este modo si los alumnos solo realizan los cálculos para uno o dos meses concluyen que les conviene el modelo lineal, sólo a partir del octavo mes el modelo exponencial supera al lineal. En la experiencia en clase el uso de las tablas y la comparación fue la herramienta más usada, seguida de la elaboración de gráficos. Pensamos que el modelo lineal podría comandar la producción de gráficos pero la falta de idea intuitiva respecto de la gráfica del modelo exponencial no alienta a los alumnos a desarrollar gráficos, los gráficos surgen pero en pocos grupos.

Es importante también notar que la conveniencia de uno u otro puesto está condicionada al tiempo de permanencia en el trabajo. De este modo la respuesta no es unívoca y los alumnos tienen que considerar el comportamiento de la evolución del salario en cada empleo para decidir bajo qué condiciones es conveniente una u otro opción. Esto dispara la búsqueda de herramientas y argumentos que al mismo tiempo les sirvan de apoyo para convencer a otro.

Propusimos un último problema de esta serie para que los alumnos siguieran profundizando sobre las relaciones elaboradas.

6.1.6 Problema de las bacterias

El enunciado propuesto fue el siguiente:

En un laboratorio, están experimentando con una población de bacterias. Han observado que al reproducirse la masa de la población crece siempre en forma pareja, de manera que en cada hora aumenta un 25%. Al comienzo de la observación, el cultivo de bacterias tiene una masa de 60 gr.
¿Cuál será la masa de las bacterias después de dos horas?
Expliquen como evoluciona de la masa de bacterias a lo largo de las primeras 8 horas.

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

El problema no introduce muchas novedades respecto de los anteriores y posibilita el tratamiento de muchas ideas tratadas: el crecimiento y el porcentaje, las relaciones multiplicativas a partir de las aditivas, el análisis de la variación de los valores de este modelo en un cierto lapso . Toda la producción anterior se propone como referencia para validar las ideas que los alumnos pongan en juego para abordarlo.

6.1.7 Cierre e institucionalización de los problemas en contexto

Estos problemas permitieron abonar el trabajo de **fundamentación** en situación contextualizada. Destacamos que se observó en todos los cursos un alto nivel de trabajo y discusión en torno a esta actividad. También elaboramos algunos incisos optativos para estos problemas (ver Apéndice Nº 1) y otros problemas optativos atendiendo los distintos proyectos que las docentes necesitaban llevar adelante en sus cursos que diferían no solo en las horas cátedra de cada uno de ellas sino también en las orientaciones de los alumnos y en sus conocimientos matemáticos.

Para realizar el pasaje de los problemas con contexto hacia los problemas sin contexto se instrumentaron dos problemas que se trabajaron en principio con la misma dinámica que los problemas contextualizados (trabajo en pequeños grupos y luego puesta en común) pero que daban lugar a momentos de institucionalización de conclusiones más generales. Estos problemas se encuentran en el Apéndice luego de los problemas contextualizados y antes de los problemas que figuran bajo el título "Función exponencial").

En el primero se vuelven a considerar los seis problemas discutidos retomando en cada caso la fórmula que representa la evolución de cada una de las variables analizadas: áreas de cuadrados, piojos, luminosidad, contratos y bacterias, en los casos en los que se haya llegado a la producción de la fórmula. En caso de no haber producido fórmulas se les pide a los grupos que las produzcan en esta situación de revisión.
Este análisis tiene por objetivo que los alumnos consideren todas las fórmulas producidas buscando la emergencia de algún patrón para todas ellas (y encontrando que una de las de los contratos, siendo lineal debía ser excluida de este conjunto).
La problematización de este conjunto de fórmulas tiene por fin comprender el significado de los parámetros que han surgido. Para ello el docente pregunta durante la puesta en común – institucionalización qué cambios resultan en las fórmulas ante algunos cambios que ellos proponen en los enunciados El contexto sigue funcionando de apoyo para la reflexión sobre las fórmulas. Destacamos el término *instituir* porque es el docente el que de alguna manera impone que los alumnos vean las seis situaciones anteriores bajo el *cristal* de la fórmula exponencial. Anticipábamos en el taller que todo el trabajo realizado ofrecía a los estudiantes elementos para aceptar la generalización propuesta por el profesor pero queremos resaltar que dicha generalización no se desprende de manera natural de los problemas: hay una operación explícita y necesaria del docente para provocar un salto hacia la generalización y echar a rodar el modelo exponencial como tal.

También se les propone a los alumnos pensar la validez de estas fórmulas fuera de contexto definiendo así dominios para las funciones que quedan definidas mediante esas fórmulas. La observación de semejanzas permite instituir a la función exponencial "$f(x) = k \cdot a^x$" como la representante de todo este grupo de fórmulas.

A continuación el docentes presentan a cada grupo un conjunto de seis gráficas con la consigna de que establezcan si representan o no gráficas de las fórmulas de los problemas con contexto. El objetivo de este problema es que los alumnos busquen en las gráficas información pertinente que luego puedan contrastar con las que les dan las fórmulas y las utilicen para decidir.

Para muchos alumnos el contexto sigue estando presente de forma tal que si en un gráfico aparecen valores negativos de la variable esto descarta la representación. Hizo falta aclarar que los gráficos tenían el dominio que se había discutido en la presentación de todas las fórmulas. Giramos entonces con cuidado nuestro trabajo desde el mismo contexto como fuente de problemas y de soluciones hacia el contexto como pie de apoyo para la reflexión sobre un objeto matemático de estudio: fórmulas exponenciales y gráficos.

Los alumnos despliegan un conjunto de criterios: la ordenada al origen, el hecho de ser creciente o decreciente. Algunos alumnos ven que las ordenadas son todas distintas y así asignan cada gráfica a cada función a partir de este dato. Se explicita entonces que el enunciado del problema no asegura que todas las funciones estén representadas en gráficos y que si ellos eligen acuerdo a las ordenadas están asumiendo que seguro habrá una gráfica para cada fórmula.

Al poner en duda esta cuestión los alumnos se ven en la necesidad de buscar más información en las gráficas y fórmulas y así identifican algunos valores como para decidir. Para algunos alumnos esta actividad sirve a los fines de confirmar la solución propuesta mientras que otros consideran que se trata de una actividad previa a la decisión.

Una vez más pudimos observar que la ausencia de certidumbre genera en los alumnos estrategias de fundamentación.

Algunos grupos de estudiantes deciden que ante la imposibilidad de tomar todos los valores de la variable y de comprobarlos en la gráfica sólo están en condiciones de concluir que la gráfica va a ser "semejante" a la que se les entrega.

La puesta en común de este problema hizo énfasis en las estrategias utilizadas para tomar la decisión. Así se dio comenzó al estudio de la función exponencial que a continuación analizaremos.

6. 2 LOS PROBLEMAS DESCONTEXTUALIZADOS

A partir de estos problemas proponemos a los alumnos estudiar el comportamiento y algunas propiedades que caracterizan a la función exponencial. Se trata de situaciones que permiten reflexionar sobre sus gráficos y sobre las variaciones que éstos pueden sufrir en función de los valores de los parámetros que conforman la fórmula. Se propone también analizar crecimientos, decrecimientos, asíntotas, ceros, etc. De esta forma, nos adentramos en el estudio del modelo exponencial. Cada problema aporta algún elemento particular en este proceso de estudio, que consideraremos en el momento de su análisis.

Dentro de este conjunto de problemas los alumnos se encuentran recurrentemente frente a la necesidad de analizar o establecer condiciones para la validez de algunas propiedades o para la verificación de algunas características en el modelo exponencial. Así sostenemos el objetivo de convocar a los alumnos a la producción de argumentos, explicaciones y finalmente **fundamentaciones**.

6.2.1 Los elementos de la gráfica exponencial para las funciones 3^x y $1/3^x$

Proponemos un problema en el cual a partir de la confección de las gráficas se concibe un escenario que permitiría reconocer algunas propiedades de las expresiones exponenciales. Planteamos el siguiente enunciado:

1) Graficar las funciones $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $g(x) = 3^x$ y encontrar similitudes y diferencias en los gráficos. Comparar estas gráficas con las anteriores.

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

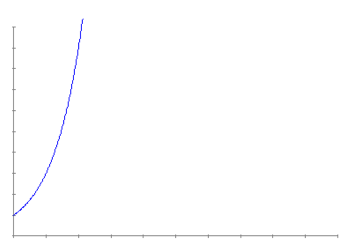
Los alumnos grafican y comparan las gráficas, encontrando como similitudes las asíntotas horizontales y la ordenada al origen. Como diferencias que una es creciente y la otra decreciente. También se menciona que están reflejadas respecto del eje y.

Los docentes colaboran para que las expresiones coloquiales de los alumnos ("en 2 y –2 dan lo mismo" por ejemplo) se puedan escribir con notación matemática ($f(2) = g(-2)$ cuestionando incluso por la relación recíproca $f(-2) = g(2)$ y por la generalización $f(x) = g(-x)$). Los alumnos observan todas las características. Sin embargo expresar esas observaciones en un lenguaje que atrape la generalidad de sus enunciados no es un recurso disponible. Frente a esto los docentes convocan a los alumnos a un trabajo de escritura para poder expresar sus observaciones. Creemos que este trabajo también abona a la **fundamentación**.

Diálogo 6.14. Examinando la gráfica. Docente y clase.

Al1. 3 a la x es creciente y la otra es decreciente.
Al(Bruno). Son simétricas.
Doc$_1$. ¿Qué entienden los demás cuando Bruno dice que son simétricas?
Al2. Una hace así y la otra al otro lado (realiza en el aire el recorrido de cada función con sus manos).
Doc$_1$. Los demás ¿qué entienden con la simetría?
Al3. Son opuestas.
Doc$_1$. No entiendo eso. Opuestas ¿es que...? Si yo tomo el uno acá, vos decís que la imagen ¿cuánto vale?
Al3. Tres, entonces en la otra si tomo –1 la imagen de la otra es 3.

Para la realización de las gráficas los alumnos se apoyan, en casi todos los casos, en el uso de tablas de valores. En muchos casos no consideran en un primer momento valores negativos para la variable independiente, quizá producto de haber tratado con situaciones contextualizadas que no demandaban considerarlos. Por ejemplo, en un curso, una alumna elabora el siguiente gráfico para $g(x) = 3^x$:



Ante esta situación, la docente pregunta si el gráfico termina en el eje Y. La alumna analiza su gráfico y sostiene que sí. La docente interroga entonces a la alumna: ¿No se le puede dar valores negativos al exponente?. Frente a este interrogante, la alumna asigna algunos valores negativos a la variable y continúa el trazado del gráfico.

Otro aspecto que surge tiene que ver con el hecho de que las imágenes son siempre positivas, para cualquier valor de x que se considere. Esta afirmación - propuesta por muchos alumnos - surge de la evidencia del dibujo, pero no es inmediato que puedan identificar las razones por las cuáles, estos gráficos, no admiten valores negativos. El siguiente extracto de un diálogo entre alumnos permite identificar un conjunto de preguntas y reflexiones, incentivadas por la docente, con la intención de que los alumnos salten de lo perceptivo hacia un terreno más argumental:

Diálogo 6.15. Examinando la gráfica. Docente y grupo de alumnos.

Doc_3. ¿No sigue la curva para los negativos? (señalando el eje y)
Al_1. Si ponés negativos, se da vuelta (señalando la fracción) y sigue siendo positiva, no cruza.
Doc_3. Bueno, pongamos entonces −1 ; −2 ;...
Al_2. Pero siempre la y va a dar positivo.
Al_3. ¿Pero no cruza el eje después? (señalando el eje x)
Al_1 (respondiendo). No, siempre queda positivo porque ponés negativos y se te da vuelta, pero siempre queda positivo.
Al_3. Ah, claro, da vuelta la fracción y queda positivo, no se hace negativo. Hay asíntota.

Mientras la docente interroga sobre el cambio de signo de la función un alumno se apoya en la variable –haciéndola recorrer los valores negativos- y así permite que otros alumnos empiecen a considerar los valores de las imágenes. El intercambio que se da entre los alumnos muestra que han tomado la pregunta de la docente y que pueden responder - ya ahora sostenidos por la operación y sus propiedades - que los resultados serán siempre positivos. A su vez la exploración les permite ver la tendencia y verificar la existencia de una asíntota.

En cuanto al crecimiento y decrecimiento de las funciones pasa saltar de "lo que se ve" hacia una explicación apoyada en la fórmula los docentes anticipan una relación – que será utilizada en el problema que se trabaja a continuación sobre $g(x) = 2^x$ - mostrando que cada vez que "se avanza un paso" se multiplica por 3 y por $1/3$. De este modo el "factor multiplicativo" (la base) que caracteriza al cambio exponencial condiciona el crecimiento o decrecimiento de la función. Este argumento será reutilizado a lo largo de los siguientes problemas.

6.2.2 La gráfica de $g(x) = 2^x$. Un trabajo oral

El objetivo de este ejercicio es que los alumnos puedan fundamentar para la gráfica de $g(x) = 2^x$ la característica multiplicativa de la familia de funciones exponenciales: $f(x) = k.a^x \quad \Rightarrow \quad f(x+1) = a \cdot f(x)$ y que puedan encontrar un correlato entre esa propiedad y la gráfica de la función.

Primera fase: El docente dibuja la gráfica de $g(x) = 2^x$ (preferentemente sin escalas, ni mencionando los valores que toman, según la fórmula $g(a)$ y $g(a+1)$) en el pizarrón , elige un punto "a" cualquiera sobre el eje x , luego el punto $a+1$, construye los segmentos paralelos cuyos extremos están sobre la función y luego traza el segmento horizontal que sale a la altura de $g(a)$ y corta al segmento de longitud $g(a+1)$, luego el docente enuncia, afirma, que este segmento último parte en dos segmentos iguales al segmento de longitud $g(a+1)$ pidiendo a los alumnos que analicen y fundamenten por qué la horizontal divide a dicho segmento en dos segmentos iguales.

En una segunda fase podrá preguntar si será cierto para cualquier a y $a+1$

En una tercera fase podrá preguntar qué ocurriría si se considera dos puntos a y $a+k$ (en la oralidad el docente planteará "si no fuera a y $a+1$ y en cambio fuera a y $a+2$, o a y $a+3$ ¿podemos prever qué ocurrirá?")

El propósito de este ejercicio es promover que los alumnos se apoyen en propiedades de la exponencial[129] para establecer la validez de una relación geométrica. A diferencia de los problemas hasta aquí trabajados en los que se promovía que fueran los alumnos quienes formularan conjeturas y trabajaran en su validación, en este caso es el docente quien enuncia una proposición y convoca a su fundamentación. Hicimos esta opción porque se trata de una relación bastante "oculta" para cuya emergencia se nos ocurrían intervenciones

[129] Dichas propiedades, entendemos, están presentes en la expresión algebraica y también fueron desplegadas en los problemas algebraicos.

tan orientadas que no implicaban desde el punto de vista del trabajo para los alumnos una gran diferencia respecto de la enunciación directa del profesor y sí en cambio resultaban mucho más costosas en tiempo.

6.2.3 Las ecuaciones $y=(-1)^x$ e $y=(-2)^x$. Condiciones para la base.

A través de este problema nos propusimos promover en los alumnos una exploración de casos que les generen herramientas para cuestionar los valores posibles de la base en la función exponencial. El enunciado es el siguiente:

3)

a) Confeccionar una tabla de valores para los pares ordenados que resuelven la ecuación $y=(-1)^x$

b) Idem para $y=(-2)^x$

c) ¿Puede definirse una función $f(x)=(-2)^x$? ¿por qué?

d) ¿Qué condiciones debe cumplir a para definir una función $f(x)=a^x$?

e) Con las condiciones del ítem anterior ¿qué condiciones debe cumplir a para que la función $f(x)=a^x$ sea

i) creciente?

ii)decreciente?

f) ¿Puedes encontrar algún valor de x para que su imagen sea 0?

<u>ANÁLISIS DEL PROBLEMA</u>

En nuestro análisis previo en el Taller anticipamos que los alumnos propondrían probablemente una tabla de valores para estas ecuaciones. A partir de esa tabla se pone a discusión la posibilidad de definir una función exponencial con una base negativa. La exploración de los alumnos se limitó en general a los números enteros, pero en varios cursos y en algunos de ellos en varios grupos los alumnos observaron que con algunos exponentes no se podía realizar el cálculo en la calculadora.

Durante el trabajo grupal las docentes devuelven a los alumnos esta cuestión propiciando que la exploración con la calculadora les permita esbozar alguna hipótesis sobre lo que están viendo.

Cuando se llega a la fase de puesta en común -debate[130] se enfrentan grupos que no han encontrado problemas más allá del comportamiento errático de los valores que intercalaban los resultados 1 y –1 (en el caso de la base –1) con otros grupos que han advertido la imposibilidad de realizar el cálculo pedido para valores "decimales". En estas circunstancias una alumna explica que algunos exponentes no pueden utilizarse y lo **fundamenta** de este modo:

Diálogo 6.16. Sobre la restricción de la base exponencial. Docente y clase.

La profesora está copiando en pizarrón todos los valores que los alumnos fueron encontrando hasta que una alumna dice que el valor 3,5 no tiene imagen. Otros alumnos contestan que la calculadora da "matemática error" cuando introducen esos datos.

Doc_1. ¿Por qué? ¿Y por qué digo yo cuando ponés 3,5 te da "matemática error"?
A1. Si la calculadora lo dice es palabra santa.
Doc_1. Lo digo yo. ¿Porqué para 3,5 dará "matemática error"?
A2(Antonella). Cuando tenés un numero negativo no podés elevarlo a un número decimal.
[Se provoca una discusión generalizada, hablan todos a la vez.]
A3(Marianela). O sea, al no poder ser raíz impar, tampoco podés elevarlo a uno sobre un impar.
[Sigue un gran murmullo]
Doc_1. Ah... ¡no sé!. Chicos esta cosa es importante. ¿A ver? ¿Cómo es? Despacio. Vamos... esperen. Vamos a llevar a una traducción para que ella me lo explique porque decía por ahí Antonella que los que son con coma, los decimales dice ella, que van a tener problema. No podemos hacerlo a la 3,5 pero vos explicá lo tuyo, ¿a ver?
A3(Marianela). **Que cuando vos tenés un número negativo no le podés hacer una raíz par, por que sino te da error porque es un número imaginario. Entonces, hacer una... por ejemplo, hacer una raíz de −1 es lo mismo que hacer $(-1)^{1/2}$. Entonces no podés a ningún número negativo elevarlo a la uno sobre un número positivo. Solamente sobre un número negativo. Es lo mismo que le estuvieras haciendo raíz de un número impar**.
A. Ah, tiene razón.
A. No pero si fuera uno se podría hacer.
Doc_1. Si fuera uno se podría hacer.
A. Si.
Doc_1. ¿Están de acuerdo con lo que ella dice?
A(varios). Si.

En este extracto del diálogo observamos que existe una confusión entre las designaciones de números pares, impares, positivos, negativos, seguramente producto de todas las

[130] Presentaremos en el próximo capítulo el rol del docente durante la puesta en común y allí mediante algunos diálogos se analizará las características particulares de este tipo de puesta en común.

exploraciones que los alumnos están haciendo. El docente podría capturar, en este extracto, un gran número de conjeturas resultado de la exploración y emergentes para fundamentar los hallazgos de los alumnos, por ejemplo:

- "un número negativo no puede elevarse a un número decimal",
- "no puede hacerse raíz impar entonces no puede elevarse a uno sobre un número impar",
- "raíz par de un número negativo da error porque es imaginario",
- "ningún número negativo se puede elevar a la uno sobre un número positivo".

Con esto queremos señalar:

a) la generalidad que van asumiendo las producciones de los alumnos,
b) el potencial de esta actividad de cara a la fundamentación.

Vemos en la explicación de Mariela una **fundamentación** ya que, utilizando un vocabulario del que dispone, está realizando un razonamiento que se apoya en un cálculo pero que se generaliza a otros. Su explicación se inicia tomando un número cualquiera negativo como base y explicando que las raíces pares no están definidas en el campo de los reales. Luego explica que todo exponente de la forma 1/n refiere a una raíz. Allí hay una confusión entre pares y positivos. Es decir Marianela está razonando al mismo tiempo entre las restricciones que se le pueden imponer a la base y aquellas que se le pueden imponer al exponente.

La exploración con estos valores representa una fase previa y constituye material de discusión para elaborar las condiciones que el problema pide a continuación. Esto es, se les pide a los alumnos que anticipen bajo qué condiciones pueden definir la función $f(x) = a^x$. Esperábamos que las dificultades encontradas en la exploración previa pusieran en cuestión la posibilidad de base negativa. Avanzamos luego pidiendo condiciones para que la función resulte creciente y decreciente. Las relaciones encontradas se reutilizarán en el siguiente trabajo en el que se propone una comparación entre cuatro funciones exponenciales.

6.2.4 Tablas comparativas de 4 funciones exponenciales

Presentamos a los alumnos un cuadro con preguntas relativas a las gráficas de cuatro funciones exponenciales con el objetivo de profundizar el análisis sobre la gráfica de la función exponencial utilizando para ello la comparación entre distintos ejemplos de la familia.

Problema 4)

Preguntas para responder de cada función que ya trabajaste	$f(x) = 2^x$	$g(x) = 3^x$	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
¿Qué sucede con los valores de y cuando la x toma valores cada vez más grandes?				
¿Podés encontrar algún valor de x para que su imagen sea 0?				
Contesta ¿Qué les pasaría a las imágenes de la función si las multiplicamos por **2**? Da tu respuesta en forma gráfica				
Ídem si multiplicamos por **–1**				
Ídem si multiplicamos por **0.5**				
Al multiplicar a la función $y = a^x$ por un número real $\boldsymbol{k}$ distinto de cero se obtiene la función $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ ¿mantiene la función $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ las mismas características?	Si k=1 Si k<0	Si k=1 -------------------- Si k<0	Si k=1 -------------------- Si k<0	Si k=1 ----------------------- Si k<0

características? Detalla similitudes y diferencias y busca sus causas.	Si k>0	Si k>0	Si k>0	Si k>0

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Proponemos a los alumnos tomar a las funciones $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ para realizar una exploración acerca de: la representación gráfica de cada función, la existencia de raíces, el comportamiento hacia el infinito, los cambios que se operan en las gráficas a partir de algunos valores específicos del parámetro k en cada una. Toda esta actividad es exploratoria y comparativa. Los alumnos son convocados a graficar, realizar cálculos utilizando sus calculadoras y así buscar similitudes y diferencias entre las distintas funciones. Es, en principio, una actividad sin un límite preciso, no surgirá un resultado en el proceso de resolución, que de cuenta de que han terminado de trabajar en el problema. A su vez, no tienen indicios que les confirmen que las características que creen encontrar son evidentemente las que se esperan de ellos. Deberán entonces sustentar sus hallazgos con la producción de explicaciones. Deberán fundamentar para fortalecer sus ideas antes de la puesta en común – debate. Entendemos entonces que hay una dinámica entre el problema semi-abierto y las características de trabajo que se instalan en la clase que estimula la emergencia de fundamentaciones (notamos que esto es compartido por otros problemas).

Algunos alumnos identifican también que el parámetro k es el responsable de condicionar el signo de las imágenes, llegando a reconocer inclusive la velocidad del crecimiento. Por ejemplo, en una discusión con todos los alumnos de la clase, aparecen las siguientes ideas:

Diálogo 6.17. El parámetro k en la gráfica de la función exponencial. Docente y clase.

Al_1. Si k es mayor que 1, la función aumenta más rápido..
Doc_1. Muy bien ¿Y si multiplicás por un valor de k menor que 0?
Al_1. Es como un espejo, se da vuelta...simétrico..
Al_2. Claro, cada imagen se da vuelta, pasa a ser negativa...
Doc_1. Muy bien. Y si se multiplica por 0,5, un número entre 0 y 1...¿qué pasa con la función? ¿Crece más rápido o más despacio?
Al_3. Corta en 0,5 ahora, va creciendo más despacio. Cada imagen se achica a la mitad, no?

Al_1. Te queda cortando por el número por el que lo multiplicás (refiriéndose a la "ordenada al origen")

6.2.5 Caracterización de las imágenes de la familia $f(x) = a^x$.

A partir del trabajo anterior planteamos generalizar las relaciones producidas:

5) Siendo $a > 0,\ a \neq 1$ caracterizar el conjunto de positividad y negatividad de $f(x) = a^x$.

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Este problema tiene por objetivo recoger parte de la información acumulada en esta tabla. Los alumnos necesitan comparar y generalizar a un enunciado indicando si deben distinguir o no casos según el valor de las bases. Es un trabajo en el que los alumnos se ven confrontados a formular condiciones para que la función tenga un cierto comportamiento. Durante la observación de clases notamos cierta confusión entre las nociones de crecimiento o decrecimiento y la positividad y negatividad. Los docentes propician discusiones que permitan zanjar estas confusiones. Asimismo señalan la necesidad de que las explicaciones se apoyen en situaciones generales y no solo en ejemplos disponibles para resultar convincentes, y de este modo puedan asegurar que sus enunciados siempre se confirmarán. Entendemos que esta exigencia es oportuna en este momento de la actividad de los alumnos. Esta tensión hacia la generalización es oportuna ahora en función del recorrido realizado hasta aquí y no podría haberse instalado desde el inicio. Pensamos que los problemas contextualizados siembren condiciones para estas exigencias en el trabajo descontextualizado.

Habíamos acordado con las docentes que en el caso de que algunos alumnos no lograran elaborar una respuesta al problema 5.- en términos de conjetura ellos podrían sugerir la construcción de una función de la forma $f(x) = a^x$ que tenga alguna imagen negativa. La imposibilidad de tal tarea abriría caminos interesantes en el proceso de análisis de algunas de las condiciones que caracterizan a este tipo de funciones[131].

Vemos en esta actividad algunos aspectos cercanos a la del matemático en el sentido que el matemático tiene fases de trabajo donde se plantea hipótesis, conjeturas que intenta probar, y cuando no puede hacerlo aumenta su incertidumbre, la que trata de eliminar mediante la búsqueda de contraejemplos, ya sea para refutar su hipótesis o bien para encontrar elementos que surgen durante esta construcción que puedan dar luz a elementos a tener en cuenta para su demostración o también para refinar sus enunciados con condiciones que hasta el momento no contemplaba.

6.2.6 Crecimiento y decrecimiento de la familia $f(x) = k \cdot a^x$

Los enunciados propuestos a continuación focalizan la actividad hacia la exploración para que través de la ella los alumnos puedan establecer en qué condiciones una función exponencial es creciente o decreciente.

6) ¿Qué modificarías en la función $f(x) = 3 \times 0{,}4^x$ para qué:
a) sea creciente?
b) la nueva función tenga una gráfica que sea simétrica con la gráfica original con respecto al eje y ?
c) su conjunto imagen sea $(-\infty ; 0)$?
d) Si crees que hay distintos tipos de transformaciones sobre $f(x)$ para lograr lo pedido en cada caso, explica cuáles son.

7) A) ¿Crees qué bastará, como anteriormente, determinar las condiciones sobre el parámetro a para decidir si $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ es creciente o decreciente?

B) En caso afirmativo explica por qué el crecimiento o decrecimiento de este tipo de funciones está ligado únicamente al parámetro a ; en caso negativo explica y valida ¿Qué condiciones establecerías sobre k y a para que la función $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ sea creciente? y ¿para que sea decreciente?

[131] Hemos utilizado esta misma estrategia en el problema de los cuadrados que decrecen al pedir a los alumnos que decidan si puede existir un cuadrado de área $1/60$. Las exploraciones permitieron a los alumnos precisar con mayor claridad las características de las áreas que iban surgiendo.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS

Los **problemas 6 y 7** fueron elaborados con el propósito de que los alumnos exploren con un caso particular primero y así luego intenten generalizar formulando conjeturas para el crecimiento o decrecimiento de la familia de funciones $f(x) = k \cdot a^x$. Se trata de analizar el papel que tienen los parámetros en el crecimiento y decrecimiento de las funciones. Nuevamente la tabla realizada en el **problema 4** entra en juego pues las relaciones que se establecieron a partir de ellas son disparadoras de preguntas y permite contar con ejemplos y contraejemplos para las ideas que se vayan sosteniendo. El trabajo plasmado por escrito comienza a ser vital para continuar ahondando en estas cuestiones y los alumnos van enfrentando la experiencia de ir condensando las relaciones producidas en enunciados cada vez más generales. Efectivamente, a partir del **problema 3** los alumnos ya han dado condiciones sobre el parámetro a para que la función $f(x) = a^x$ resulte creciente o decreciente. A su vez el **problema 4** ofrece evidencias de los efectos de multiplicar a algunas funciones particulares de esta familia de funciones (con base mayor a uno y base menor a uno) por distintos valores del parámetro k. Esperábamos que estos datos les permitieran elaborar explicaciones acerca de qué valores podrían modificar en la función $f(x) = 3 \times 0,4^x$ para que se convierta en una función creciente (para lo cual era necesario que se preguntaran y respondieran si esta función de partida era creciente, decreciente o ambas cosas), para que la nueva función tenga una gráfica que sea simétrica con la gráfica original con respecto al eje y , y, finalmente para que su conjunto imagen sea $(-\infty;0)$. Notemos cómo el tiempo está incluido en la secuencia que concebimos en la medida en que promovimos –por lo menos en la manera en que lo anticipamos- que los alumnos retomaran los problemas anteriores para repensar éstos.

Anticipamos que, siendo un problema de múltiples respuestas podríamos encontrar afirmaciones más generales y más particulares, elaboraciones de distinto tenor que alimentarían el debate posterior y permitirían elaborar un esquema de condiciones de trabajo con toda la comunidad aula.

El ítem c.- que pregunta por condiciones para que la imagen sea $(-\infty;0)$ fue pensado para abonar a la distinción entre crecimiento y positividad.

Las múltiples respuestas que tiene el ítem d.- resultan un buen contexto para que los alumnos debatan sobre la posibilidad de establecer condiciones mínimas y condiciones más generales para cada uno de los ítems.

En el **problema 7** pasamos a una fase de trabajo más general y abstracta esperando que el **problema 6** permita elaborar conjeturas sobre el papel de ambos parámetros.

El objetivo para este conjunto de **problemas 6 y 7** es que los alumnos puedan establecer, de manera fundamentada, las condiciones sobre “k” y sobre “a” para que la función sea creciente o decreciente. Dividimos el planteo de forma tal que los alumnos se percaten de la insuficiencia de condiciones sobre el parámetro a para definir el crecimiento o decrecimiento, antes de ponerlos en situación de buscar condiciones para ambos parámetros.

Aún así una exploración azarosa con valores de a y de k puede resultar de difícil conceptualización. No obstante pensamos que la organización de la tabla del problema 4 podría dar pistas acerca de cómo organizar la exploración. En la práctica los alumnos no tomaron la organización de estos datos para organizar la fase exploratoria de su trabajo.

El siguiente diálogo entre alumnos da cuenta de esta situación.

Diálogo 6.18. Conjeturas y ejemplos. Diálogo entre alumnos.

Al1.¿No hace falta saber k?
Al2. Sí, se necesita saber k.

Anotan en una hoja lo siguiente: “No bastará, ya que se necesita conocer el valor de k. Al no cortar al eje X, k determina ya que es la ordenada al origen y nunca corta al eje”.

Al3 (se pone a dibujar una función en gráfico cartesiano, para explicarle a otro y hace un gráfico que tiene $k < 0$ pero resulta creciente) ¡¡¡Uh!!!! Es creciente y k es menor que 0... No, no importa el valor de k, puede k ser negativo y creciente y puede k ser positivo y decreciente...No depende de k...
(Los otros alumnos del grupo se sorprenden y comienzan a dibujar otros ejemplos en sus carpetas)

El diálogo da cuenta de que disponer de ejemplos es tan solo un inicio para la exploración, pero entendemos que esta actividad en sí misma también se va enriqueciendo y va dialogando con las relaciones que los alumnos van estableciendo. En esta situación se genera un espacio para la intervención del docente.

En algunos grupos se comenzó incluso pensando que el parámetro a era el que comandaba el crecimiento o decrecimiento en tanto que el parámetro k era el responsable de la positividad o negatividad (estas hipótesis provisorias cayeron ya sea durante la propia fase de trabajo grupal o bien durante la puesta en común en debate entre grupos).

No resultaba evidente la forma en que ambos parámetros se pueden combinar para dar condiciones de crecimiento y decrecimiento como en este diálogo se puede ver.

Diálogo 6.19. Condiciones sobre un par de parámetros. Diálogo entre alumnos

Al_1. Mirá, no ves que acá ya dijimos que si a está entre 0 y 1, entonces decrece y si a es mayor que 1 crece (haciendo referencia a los gráficos de 2^x y $\left(\frac{1}{2}\right)^x$)

El resto de los alumnos de este grupo asienten, salvo uno de ellos que contesta:

Al_2. No.... pero si k es negativo seguro que va para otro lado…(esboza un bosquejo de un gráfico exponencial, con k negativo y decreciente). Si k es negativo entonces corta al eje Y debajo de 0... (esta frase provoca en el resto de los alumnos un desconcierto general)
Al_3. Viste, yo te dije que con a solo no alcanza...también vale k ...hay que usarlo...

El **problema 6** es un punto de partida para pensar el **problema 7** pero claramente resulta insuficiente. Los alumnos se abocan a producir ejemplos para elaborar alguna hipótesis sobre las condiciones. Los ejemplos particulares les permiten configurarse una imagen próxima a lo que ocurre, pero la búsqueda de condiciones supone recorrer muchos ejemplos particulares, que de todos modos no darán certeza, tal como se observa en el siguiente extracto de clase que se desarrolla durante un debate en el interior de un grupo:

Diálogo 6.20. La exploración con control. Diálogo entre alumnos.

Al_1. No, pará, vas a estar toda la vida poniendo números. ¿Cuántas funciones vas a hacer? No podés seguir con cada caso, te pide si es a o también si es k. ¿Qué vas a probar para 200 números k y otros mil a?
Al_2. Dejame ver qué pasa, pruebo con algunas y vemos si va para abajo o sube...
Al_1. Pero te vas a pasar toda la vida. Fijate, si a es mayor que 1, crece y si k es mayor que 0 va a seguir para arriba...
Al_2. Dejame ver, quiero probar ...(y escribe $y = 3.2^x$ $y = (-3).2^x$ y las grafica). Sí, depende también de k, porque acá crece y acá decrece. (Y sentencia) si a está entre 0 y 1 y k es negativo, decrece y si no, es al revés.

Para estos dos alumnos, en términos de Duval, el valor epistémico de los ejemplos de los que disponían hasta el momento (tanto de los que ellos habían producido como del que daba cuenta el conjunto de problemas anteriores) era diferente. La alumna se niega a continuar la exploración porque sin duda ella ya se ha configurado un escenario de situación para ambas variables. El alumno desconfía aún de otras posibles situaciones y necesita buscar más evidencia para confiar en lo que se podría producir con otros valores. La alumna recurre a la imposibilidad de probar con "todos" los casos posibles. El alumno seguramente no está imaginando tal escenario pero es evidente que la exploración que cada uno de ellos necesita para generar un mismo grado de certidumbre no es la misma. El uso del ejemplo que mantiene la base y cambia el signo del parámetro k constituye para este alumno lo que Balacheff denomina el "ejemplo crucial" ya que le permite imaginar una situación genérica a partir de un ejemplo. Notamos que el ejemplo no es azaroso sino que tiene la carga de la duda o hipótesis que el alumno está construyendo.

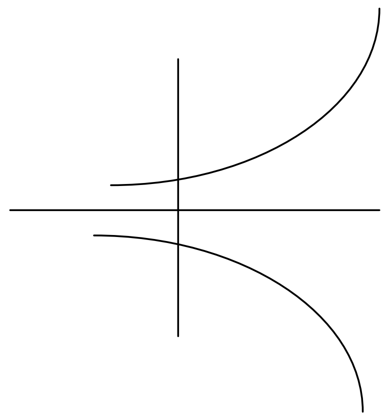
Los docentes analizan con los alumnos qué tipo de información se recaba a partir de las funciones que se usan como ejemplos para enfrentar este problema y ponen en debate si, apelando únicamente a esas funciones, es posible estar seguros que ocurrirá siempre lo mismo.

Presentamos un nuevo extracto donde surge una vez más la necesidad de acompañar la exploración con una guía producto de las preguntas que están presentes en el grupo. En este grupo se ve en las carpetas de los alumnos que han estado probando con varias funciones: $y = 1.2^x$ $y = 2.2^x$. En el momento que se acerca el observador un alumno dibuja y los demás miran y comentan

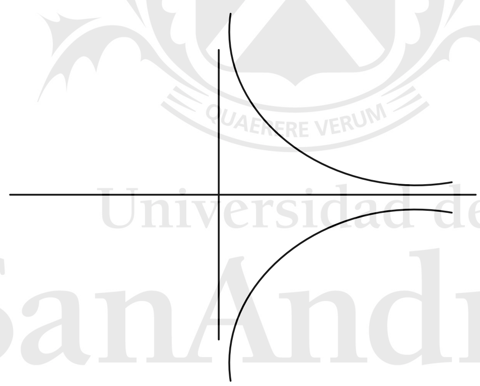
Diálogo 6.21. La exploración con control. Diálogo entre alumnos

Al1. Pero poné otro k, fijate cómo cambia si es otro el k.
Al2. No, vas a estar un millón de años así, no podés si tenés mil incógnitas...hay miles de k, miles de a y miles de x...
Al3. (es el que estaba dibujando) Pero **si no pruebo no veo** a que llego, no sé como cambia...
Al1. Sí, pero cambiá solo el a, **no cambies todo al mismo tiempo**, **no se entiende nada...** así no te vas a dar cuenta.
Al3. No, yo digo que si pruebo me voy a dar cuenta.
Al2. Pero ¿con cuántas vas a probar, con cinco millones de valores para k, para a, para x...(entendemos que la alusión a la variable x es por la tabla de valores).

Discuten entonces sobre qué valores de k usar a la luz de los gráficos siguientes que arman a mano alzada en el momento en que llega la docente:



Al1. Si k es positivo, es esta (y señala la que está encima del eje x) y si es negativo es esta otra (y señala la que está por debajo del eje x)
Doc$_4$. ¿Estás pensando en que es positiva y negativa?
Al1: Sí...
Doc$_4$. Pero se trata de analizar si crece o decrece...
Al1. Ahhhh, claro, puede ser toda positiva y decrecer y ser toda negativa y crecer (contradiciendo lo que había dibujado, y hace este otro dibujo)



Al2. Ah, no depende del signo de la función...

El alumno que sostenía que había que ensayar con dibujos anota estas funciones:

$y = 3 \cdot 2^x$ e $y = (-3) \cdot 2^x$ y comienza a hacer los gráficos. Concluye que también depende de k, que si es positivo o negativo y no solo de a y los demás acuerdan con él.

La evolución del trabajo de los alumnos desde las explicaciones a partir de ejemplos hacia las fundamentaciones -apoyadas en propiedades de las operaciones y los parámetros involucrados – nos confirmó que la actividad de la "**búsqueda de condiciones**"[132] que

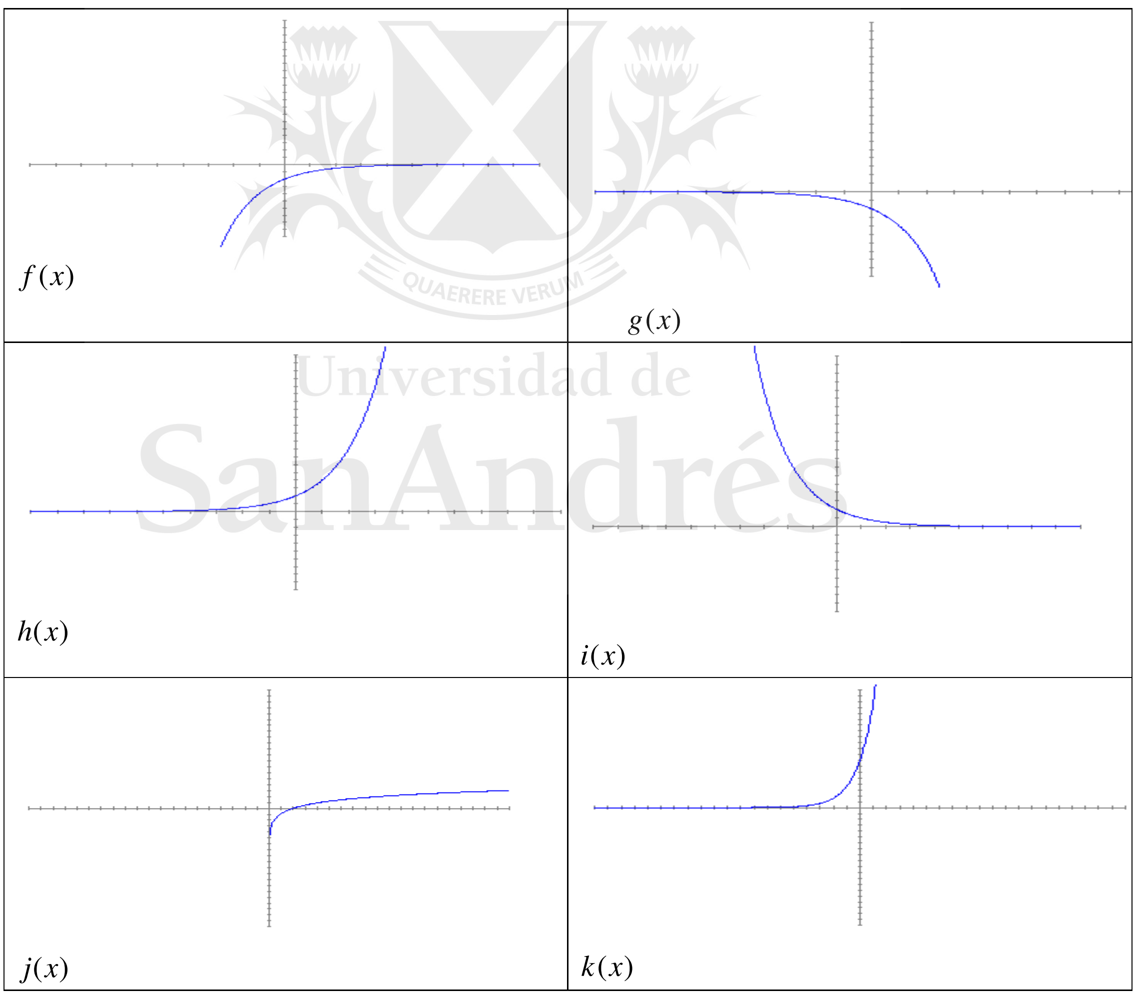
[132] La actividad de "búsqueda de condiciones" y la "incertidumbre" como contexto de actividades están analizadas en el capítulo del Taller y en el Marco Teórico respectivamente.

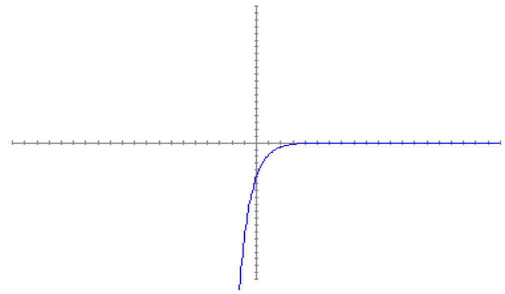
sostengan la validez de una relación abonan a la emergencia de la fundamentación. Al mismo tiempo entendemos que la **incertidumbre** que generan estos problemas es un factor que está contribuyendo en la misma dirección.

6.2.6 Gráficas y condiciones

Extendiendo la actividad de búsqueda de condiciones a la situación gráfica propusimos esta actividad a los alumnos:

8.- Las funciones graficadas tienen fórmulas del tipo $f(x) = k \cdot a^x$
Indicar cuáles de ellas corresponden a las condiciones detalladas de a y b en cada caso.



 $l(x)$	

condiciones de a y b   Funciones

$0 < a < 1$ y $b < 0$ ....
$0 < a < 1$ y $b > 0$ ....
$a > 1$ y $b > 0$ ....
$a > 1$ y $b < 0$ ....

9.- ¿Puedes encontrar una función exponencial que pase por los puntos (0,2) y (2,32)?
a) En caso de existir ¿es única?
b) ¿y por (1,200) y (4,25)?
c) Idem por (-1,-1) y (1,1)

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS

Los gráficos que presentamos en el **problema 8** poseen una particularidad: no cuentan con datos específicos. Los alumnos no tienen una forma de reconocer una fórmula explícita asociada al gráfico. En este sentido se diferencian de los gráficos que hasta aquí se les había presentado o bien de los que ellos mismos habían producido (aunque algunos alumnos ya habían realizado gráficos genéricos al trabajar en el **problema 7** de las condiciones, esta estrategia no había sido todavía compartida con toda la clase). Este problema tiene como objetivo profundizar el estudio acerca de las modificaciones que puede sufrir un gráfico a partir de los cambios de las condiciones de la base "a" y de la constante "k", que forman parte de la fórmula.

Se enfrenta a los alumnos nuevamente a la dificultad de considerar en simultáneo dos parámetros. Si bien cada parámetro afecta el comportamiento del gráfico de la función y en tal sentido hay una complejidad, parte de estas consideraciones ya las han estudiado en el problema anterior poniendo el foco en el crecimiento o decrecimiento de las funciones.

Las exploraciones toman distintas organizaciones, por ejemplo, algunos alumnos identifican en un primer momento la incidencia del parámetro a sobre el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = a^x$ y luego analizan cómo incide el valor de k en cada uno de los gráficos. Otros inician el trabajo decidiendo que el signo de k distingue funciones positivas de negativas y completan este análisis con el crecimiento o decrecimiento de cada función a partir de condiciones sobre la base a.

Algunos grupos de alumnos apelan a las actividades anteriores para dar cuenta de las relaciones entre los valores de "a" y de "k" y su crecimiento y/o decrecimiento. También ocurre que algunos alumnos utilizaron ejemplos, asignando valores particulares a *"a"* y a *"k"*, y, a partir de los resultados que van obteniendo, establecen qué gráfico corresponde a cada condición. Veremos en el próximo capítulo como el docente, en interacción con los alumnos logra señalar el papel que puede jugar el conjunto de problemas ya desarrollado como parte de una actividad exploratoria que aporta información para la inferencia, en el recorrido hacia la generalización. Es decir, la consideración de los problemas anteriores como referencia para pensar los nuevos no es en general espontánea y requiere de intervenciones del docente que se transforma de esta manera en un gestor privilegiado de la memoria de la clase.

El trabajo con el **problema 8** contribuye a que los alumnos se apropien de una representación de las distintas gráficas que puede tener familia $f(x) = k \cdot a^x$ en términos de los valores posibles para los parámetros. El **problema 9** que se presenta a continuación les propone a los alumnos que indiquen si es posible encontrar fórmulas de funciones exponenciales que pasen por determinados puntos. Esperábamos que la producción de gráficas del problema anterior funcionara como un recurso gráfico y esto fue lo que ocurrió en algunos grupos de alumnos. Otros grupos no sabían como abordar el problema y finalmente algunos grupos recurrieron a las relaciones multiplicativas para analizar la posible existencia de una función exponencial. En este último caso buscaban encontrar un factor multiplicativo que les permitiera, por ejemplo para el ítem a) multiplicar el número 2 por dicho factor una vez y de ese modo arribar a la imagen del número uno y al repetir el procedimiento arribar a la imagen del 2 que según el problema debía ser 32. Esta idea de factor multiplicativo les permitió confirmar que en el primer caso un candidato a tal factor es $x = 4$ en tanto que en el último caso pueden ver que un factor (que ya saben debe ser positivo) no puede convertir el $x = -1$ en un imagen positiva en ningún número de pasos. Por su parte los alumnos que apelan a los recursos gráficos indican para este último caso que estas imágenes no pueden sostenerse si hay una asíntota horizontal en cero. Otra de las explicaciones que dan los alumnos es que según sus análisis previos las imágenes son todas positivas o negativas pero no ambos cosas. Podemos ver entonces que el trabajo realizado va organizando ya a esta altura de la secuencia un conjunto de relaciones construidas por los alumnos que enriquecen las fundamentaciones que pueden producir.

6.2.7 Interacciones entre los cuadros gráfico y algebraico

Presentamos a los alumnos una dupla de problemas para poner en discusión propiedades algebraicas de los exponentes con apoyo gráfico a partir de los siguientes enunciados:

10.- a) ¿Será cierto que los gráficos de las funciones $f(x)=2^{x+1}$ y $g(x)=2\times 2^{x}$ son iguales? Si creés que sí, explicá por qué. Si creés que son diferentes, demostralo de alguna manera.

b) ¿Es $f(x)=2^{-x}$ una función exponencial? ¿por qué?

11.- a)¿Puedes encontrar algún valor de x tal que $f(x)=2^{x}-4$ tenga imagen nula?

b) ¿Existe algún valor de x tal que $f(x)=3$? ¿Por qué?

c) ¿Existe algún valor de x tal que $f(x)$ sea negativa? ¿Por qué?

d) ¿Puedes hallar algún valor del dominio de la función tal que $f(x)=-3{,}5$? ¿y para $f(x)=-3{,}9375$?

e) Ídem para $f(x)=-5$

<u>ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS</u>

El propósito de los **problemas 10 y 11** es propiciar la interacción del trabajo gráfico con el trabajo algebraico de modo tal que los alumnos analicen ciertas propiedades de la potenciación a partir de un soporte gráfico e, inversamente, anticipen relaciones entre gráficos a partir de propiedades de la potencia.

En el **problema 10** tuvimos como propósito que los alumnos que no se decidieran por demostrar la igualdad algebraicamente observaran que las gráficas tenían "muchos" puntos de coincidencia (puntos que dependían de los recursos que utilizaran para graficar) y que esa coincidencia interpelara la igualdad de las ambas expresiones ¿será que $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$? A su vez reconocer esa igualdad de expresiones algebraicas genera entendimiento sobre las funciones involucradas.

En clase observamos alumnos que sin graficar concluyen que los gráficos son iguales comparando los resultados obtenidos a partir de la confección de tablas de valores para cada función. En aquellos casos los docentes cuestionaron la certeza de los alumnos a partir de la tabla de valores, promoviendo un análisis de la coincidencia de los gráficos más allá de la tabla de valores.

De hecho, apelar a una de las tablas permitiría también discutir las propiedades de la potencia. Por ejemplo:

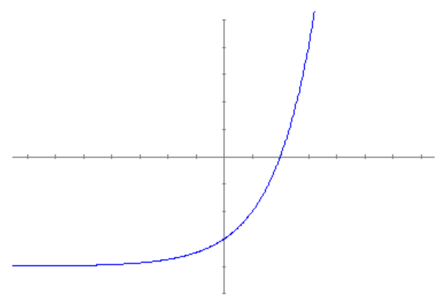
x	2^{x+1}	2×2^x
0	2	2
1	4	4
2	8	8
-2	½	½

Analizando con los alumnos el modo en que se relacionan los cálculos que se hacen en cada caso - se eleva el número dos a una cierta potencia y se vuelve a multiplicar por dos, es decir, aumenta en una unidad la potencia original – ellos identifican la propiedad de producto de potencias de igual base.

En el apartado b) el propósito es el mismo pero entendiendo que en este caso la propiedad algebraica en la que apoyarse para reconocer a $f(x) = 2^{-x}$ como una función de la familia de exponenciales es otra. Anticipamos en el equipo que los recursos de los alumnos serían los mismos: el uso de tablas o bien la manipulación algebraica. El objetivo en este caso es menos claro, y queda en el campo de los alumnos imaginar cómo modificar la expresión para que pueda aceptarse como un miembro de la familia exponencial. En la observación constatamos que no es evidente qué distingue una expresión tal como $f(x) = 2^{-x}$ de una tal como $f(x) = k \cdot a^x$.

El **Problema 11** continúa la propuesta del trabajo algebraico desde una perspectiva funcional. Esperábamos que los alumnos apelaran al gráfico de alguna de las funciones $f(x) = 2^x$ habiendo manipulado la ecuación (y tratando de resolver $2^x = 4$)o bien, para aquellos que tuvieran presentes los corrimientos verticales, la función $f(x) = 2^x - 4$ y, en este segundo caso ayudados de una tabla de valores, reconocieran que existe un valor para x que verifica lo siguiente: $2^x - 4 = 0$. La confección misma de la tabla podría habilitar a su reconocimiento: $x = 2$

x	$2^x - 4$
0	-3
1	-2
2	0



Es decir, no esperábamos que los alumnos enfrenten el problema, en un inicio, con recursos vinculados a las ecuaciones exponenciales. Nuestro objetivo era que se propiciara un conjunto de relaciones entre gráficos, tablas y fórmulas como medio de trabajo y que de este modo las gráficas se constituyeran en un recurso para la **fundamentación.**

Por otro lado, el uso de uno u otro gráfico permitiría a los alumnos identificar que hay una única solución.

En la resolución del ítem b.-, aquellos alumnos que recurren al gráfico pueden reconocer que existe algún valor para x de manera tal que $f(x) = 3$, aunque no sea posible identificarlo. Anticipamos que algunas explicaciones sobre la existencia de solución se apoyarían en la noción de imagen de la función, o simplemente en lo visual, señalando en el gráfico la existencia de un valor del dominio con imagen 3.

La imposibilidad de encontrar una solución de la ecuación, -con los recursos que disponen los alumnos a esta altura - habilita al docente a señalar que el enunciado no está requiriendo una solución sino que se trata de indagar acerca de la existencia de una solución. Esto deriva en un trabajo exploratorio donde muchos alumnos se abocan a ensayar con aproximaciones. De esta manera ensayando con valores entre 2 y 3, por ejemplo 2,5, van aproximando por tanteo al resultado, aunque sin encontrarlo. Una vez más el ensayo puede ser azaroso o comandado por anticipaciones de los alumnos que ahorran esfuerzo. El trabajo de aproximación permite a los alumnos conjeturar la presencia de tal solución, aunque no sea posible encontrarla con los recursos disponibles. Así el soporte gráfico sirve para colaborar en la certidumbre de su existencia.

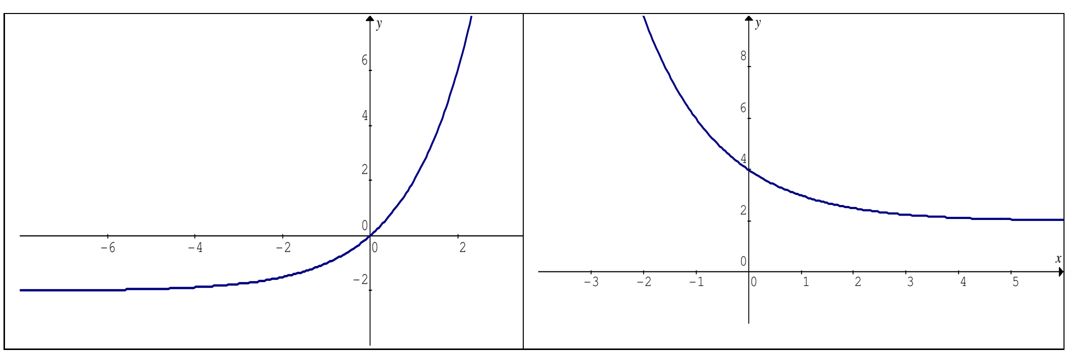
Para resolver los ítems c.- y d.- imaginamos que el ítem a.- podría servir como referente ya que la tabla o el gráfico habilitan a reconocer aquellos valores en los cuáles la función es negativa. Eventualmente la tabla requeriría de otros valores. En muchos casos los alumnos apelan a las calculadoras para explorar con valores. Sin embargo la operación azarosa de valores en la calculadora resulta tediosa y queda superada por las anticipaciones de aquellos que recurren al comportamiento de la función.

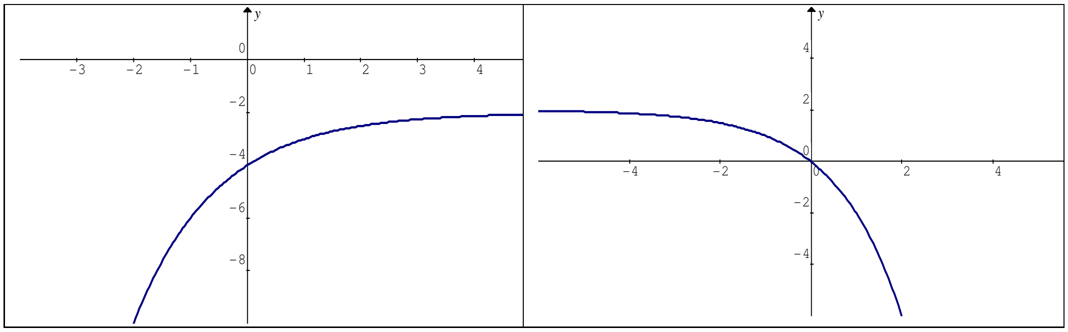
Esta situación se repite durante el último ítem e.- en la que algunos alumnos intentan valores con la calculadora para la ecuación $2^x - 4 = -5$ o su equivalente $2^x = -1$ mientras que otros se apoyaban en la asíntota de la función exponencial. La falta de recursos algebraicos para la resolución de la ecuación abona la exploración de las gráficas, recurso que se habilitó explícitamente en cada clase.

6.2.8 La familia $f(x) = k \cdot a^x + b$. Parámetros y gráficos

Como último problema pusimos a consideración de los alumnos algunos ejemplos de la familia de funciones exponencial con traslados verticales para que, una vez más, el análisis de los parámetros sea una oportunidad para la emergencia de la fundamentación. Planteamos el siguiente enunciado:

12.- Las siguientes funciones son del tipo: $y = k \cdot a^x + b$, para cada una de ellas analizá el signo de k y b y además indicá si $a \in (1;+\infty)$ o si $a \in (0;1)$.





ANÁLISIS DEL PROBLEMA

A diferencia de los valores de referencia que pensamos para el problema 8 en este problema dejamos del lado de los alumnos la responsabilidad de precisar recorridos de los parámetros[133]. Es nuevamente y finalmente un ejercicio que confronta a los alumnos con la búsqueda de condiciones. Las preguntas y conclusiones a las que hubieran arribado los alumnos en el problema anterior, el problema 11, iban a abonar, anticipábamos, el conjunto de hipótesis que pudieran construir en este último problema. Entendimos que no se trataba de una actividad completamente nueva en la medida que ya habían trabajado con gráficos, ya habían establecido diversas condiciones y también ya habían analizado crecimiento y decrecimiento de la familia $f(x) = k \cdot a^x$.

Sin embargo esta nueva familia de funciones pone en cuestión, entre otras cosas, la idea de ordenada al origen que se había conformado con la familia $f(x) = k \cdot a^x$. En muchos casos, los alumnos reconocen que la suma del término b provoca un corrimiento vertical sobre la familia $f(x) = k \cdot a^x$ lo que les permite reutilizar de forma adecuada los análisis previos incorporando ahora el término b. En el siguiente extracto de diálogo lo vemos:

Diálogo 6.22. Corrimientos que interpelan el papel de los parámetros. Diálogo entre alumnos

Se ven varias hojas con gráficos producto del ensayo con diversos valores de b. Los alumnos comentan:

[133] Aclaramos que el problema no es completamente abierto en el sentido que no estamos pidiendo a los alumnos que indiquen los posibles valores de los parámetros sino que se especifica que sobre los parámetros k y b sólo deben indicar el signo y sobre el parámetro a indicar si este debe ser mayor o menor a uno. Esto de todos modos es mucho menos estructurado que la forma en la que dispusimos las condiciones en el problema 8.

A_1. Como se suma b, puede subir el gráfico y ahora cruza el 0 (señalando un gráfico con imagen negativa).
A_2. No, no puede cruzar éste (señalando el eje X).
A_3. Sí, b te da un aumento sobre el eje Y, lo sube a todo y ahí puede cruzar.
A_2. (mira los gráficos en su carpeta y los otros de la hoja de la mesa que hicieron en el grupo) Ahh, claro, sube o baja con b, así se va para arriba o para abajo...pero... ¿no es k donde cruza al eje Y?

Anticipamos una vez más la exploración con valores pero manteníamos como interrogante si, a esta altura del trabajo los alumnos ya podrían desarrollar su exploración con alguna sistematicidad o se mantendría azarosa. Los casos a considerar, siendo dos las posibilidades para cada parámetro, eran ocho. Apoyados en esto decidimos proponer un número menor de gráficos de modo que no existiera la posibilidad de trabajar descartando casos.

6.3 Síntesis del Capítulo

Como hemos señalado al comienzo de este capítulo los primeros problemas contextualizados promueven la entrada del modelo exponencial como aquel que describe situaciones de crecimiento y decrecimiento de distintas variables a partir del comportamiento $f(x+1) = a \cdot f(x)$. Estas situaciones problemáticas, se esperaba, servirían de disparador de fundamentaciones de procesos de resolución de problemas[134].

Distinguimos una serie de recursos utilizados por los alumnos en esta fase del trabajo tales como: identificación del problema a resolver que en todos los casos se aproximaba a dar cuenta de la evolución de alguna variable, exploración con datos y ejemplos, producción de una conjetura[135], puesta a prueba de la conjetura, búsqueda de una fundamentación de dicha conjetura-afirmación, rechazo o confirmación de la conjetura, En el caso de rechazo producción de una conjetura alternativa y en el caso de confirmación producción de una proposición fundamentada. Estas fases de trabajo aún siendo desplegadas a propósito de

[134] Mencionamos en el Marco Teórico que concebimos las fundamentaciones en dos planos: el desarrollado para dar cuenta de procesos de resolución de problemas y el que se organiza para la validación de conjeturas.
[135] Las conjeturas que se producen durante la resolución de problemas contextualizados se refieren a aspectos parciales del problema a resolver, por ejemplo, "las áreas se van duplicando", "los piojos aumentan en forma proporcional", "la fórmula que describe la luminosidad es .....", etc.

un trabajo contextualizado tienen, sin embargo, una importante afinidad con la actividad que despliega el matemático tal y como lo describe George Polya (citado en De Villiers, 1993: 18)

> "…una vez verificado el teorema en varios casos particulares, conseguimos reunir suficiente evidencia inductiva. Esta fase inductiva sobrepasó nuestra sospecha inicial y nos dio una fuerte confianza en el teorema. Sin tal confianza, difícilmente podríamos encontrar el valor necesario para llevar a cabo la demostración, que no es, ni con mucho, un trabajo rutinario. Cuando uno se convence de que el teorema es verdadero, se puede empezar a demostrarlo"

Las fundamentaciones observadas durante esta fase fueron contextualizadas, en algunos casos de afirmaciones pero en la mayoría de ellos fueron explicaciones de procedimientos, de producción de fórmulas, de interpretaciones de lectura en gráficos, las fundamentaciones emergieron para dar cuenta de la posición de cada grupo o de cada alumno ante una modalidad de trabajo que convoca a sostener las ideas propias con razones. Los momentos de puesta en común han sido necesarios para este fin. También los enunciados comandaron esta necesidad por su calidad de enunciados abiertos y porque no prescribían las respuestas. Adicionalmente las docentes mediante devoluciones adecuadas sentenciaron la necesidad de producir explicaciones. Por su parte los alumnos fueron produciendo explicaciones como respuesta a la demanda de toda esta situación. Nuestra observación no nos permite asegurar esta afirmación con evidencia empírica pero creemos que en esta fase del trabajo los alumnos no se demandan unos a otros fundamentaciones. Esto comenzó a surgir recién promediando la segunda fase. Del mismo modo no se percibió en los alumnos elementos de control que les permitieran aceptar algunas explicaciones y rechazar otras.

En todos los cursos observamos que el pasaje de los problemas con contexto a los problemas descontextualizados tuvo repercusiones en la motivación de los alumnos. La noticia de volver a trabajar en un escenario netamente matemático no fue bienvenida. No obstante al cabo de un par de problemas los alumnos convocados a explorar, discutir, hipotetizar, debatir, etc. , recuperaron en gran parte el interés inicial. Entendemos que estas actividades fueron el verdadero continuo de toda la secuencia y su presencia en los problemas descontextualizados dio impulso a esta segunda fase. Nos sorprendió la uniformidad de ambos tipos de respuestas (una caída en el interés ante el cambio de contexto y una recuperación del mismo a partir de los problemas 3 a 5 según los grupos) en grupos de alumnos que no eran necesariamente idénticos ni similares.

En el conjunto de problemas descontextualizados hay una presencia "potencial" de la teoría sobre la función exponencial. La actividad completa incluye: el reconocimiento de las posibles gráficas de la familia exponencial identificando para ello el dominio de la función, la imagen y el rango de valores que los parámetros pueden asumir; los efectos de la variación de los parámetros sobre la función en términos de su gráfica, su dominio, su imagen, su crecimiento o decrecimiento; la conexión y o relación posible entre la familia que parte de base mayor a uno y la que parte de base menor a uno; el efecto de los corrimientos verticales; el diálogo entre los aspectos gráficos y los algebraicos, esto es los diálogos entre los distintos marcos conceptuales de representación.

Hemos dicho sin embargo que la presencia de la teoría es "potencial". Queremos decir con esto que si bien los problemas alojan la posibilidad de desplegar todo este contenido teórico la posibilidad de que esto efectivamente ocurra está en manos de la comunidad matemática clase y aquí es ineludible la presencia conjunta del docente y los alumnos convocados a una tarea de construcción de la teoría. A lo largo de esta construcción las fundamentaciones son un producto esperado, necesario para sostener las certidumbres localmente alcanzadas y para avanzar en nuevas conjeturas que permitan desplegar la teoría.

Es por ello que en los próximos capítulos pondremos en primer plano la gestión docente de este conjunto de problemas. Allí, retomando la intencionalidad docente constituida en el espacio Taller y esta producción con todos sus "posibles", nos ocuparemos del rol del docente en la emergencia de la fundamentación.

7. EL ROL DEL DOCENTE EN LA EMERGENCIA DE LA FUNDAMENTACIÓN. MICRO ANÁLISIS

7.1 INTRODUCCIÓN

Como ya hemos señalado, nuestra unidad de análisis es la clase. En ella propondremos realizar dos niveles de análisis tomando como fuente para ambos los diálogos que mantienen docentes y alumnos. Estos dos niveles de análisis serán desarrollados en los Capítulos 7 y 8 respectivamente. A partir de los diálogos sostenidos entre docente y alumnos intentaremos comprender cómo el docente interactúa con sus alumnos e interviene en clase para propiciar la emergencia de la fundamentación.

Como veremos en el análisis de este capítulo y del próximo, lograr que los alumnos asuman la tarea de fundamentar como parte de su trabajo matemático, organizar un escenario en el que argumentos, justificaciones, interrogaciones, puestas en duda, confrontaciones sean parte sustancial de los intercambios en la clase, supone un docente muy comprometido con esa intención, intención que irá comunicando a sus alumnos a través del conjunto de su accionar y no sólo cuando explícitamente convoca a la producción de una fundamentación. La idea de contrato didáctico resulta fértil para analizar esta cuestión porque justamente da cuenta de la intención que se transmite en el proceso de comunicación más allá del contenido de las sentencias que se enuncian.

El primer nivel de análisis, que será presentado en este capítulo, identifica "**pequeñas intervenciones"** de las docentes durante diálogos que mantienen con los alumnos, que de diferentes maneras:

- van comunicando y gestionando la puesta en acto de distintas funciones que cumple la fundamentación en la producción de ideas matemáticas,
- configuran un discurso coherente en el que están presentes reconstrucciones o ampliaciones de ideas,

- jerarquizan las producciones de los estudiantes, habilitándolos y regulando la asimetría que tiene con sus alumnos,
- promueven debates entre los estudiantes.

Para este nivel de análisis los datos relevantes son las expresiones, comentarios, sentencias, intervenciones puntuales de las docente durante un diálogo y es por ello que lo llamaremos **micro análisis**[136].

Luego, en el próximo capítulo, presentaremos otro nivel de análisis que tomará como unidad **diálogos** entre docentes y alumnos (un grupo o toda la clase) Estas unidades se dividirán para su análisis cuando sea necesario en **episodios**. Cada episodio dará cuenta de una intención específica del docente, dentro del vasto universo de acciones que configuran un escenario de fundamentación. Recorriendo el o los episodios de un diálogo identificaremos en la interacción docente-alumnos las operaciones que las docentes realizan en torno a: la interpretación de las producciones de sus alumnos, la promoción de confrontaciones[137], colaboraciones y reelaboraciones respecto de sus producciones, la puesta en escena de operaciones de metacognición para analizar la génesis de las producciones en busca de poner en evidencia los elementos de una fundamentación, etc. Este constituirá el **mezzo análisis**.

Las distintas clases - donde se desarrolló la propuesta analizada en el Capítulo 6 - serán el material para realizar estos dos niveles de análisis. Como ya hemos explicado en el capítulo metodológico, hemos elegido uno de los cinco cursos observados para estudiar la gestión docente.

7.2 MICRO ANÁLISIS

Nuestro trabajo nos ha permitido establecer una relación de ida y vuelta entre la posibilidad de que la comunidad clase funcione como un todo y la circulación de saberes construidos por sus integrantes. Para que esta circulación sea posible el docente tiene que promover

[136] Estamos presentando una síntesis de los conceptos que con mayor detalle hemos desarrollado en el capítulo metodológico sobre micro y mezzo análisis.

[137] En algunos casos, como en éste que mencionamos, retomamos cuestiones ya analizadas mediante el micro-análisis a partir del mezzo análisis pues se pueden hallar nuevas respuestas. En otro casos las cuestiones que abordamos en el mezzo-análisis son nuevas.

que todos los estudiantes se escuchen y que la producción de uno cualquiera de ellos sea tomada y considerada por el resto. En otros términos el docente se constituye en un gestor de las ideas que se elaboran en la clase.

Surgen entonces varias cuestiones que no esperamos responder puntualmente sino que constituyen para nosotros un marco para analizar la problemática de la fundamentación: ¿cómo se comunica a todos el pensamiento de uno? ¿Cómo interviene el docente para señalar que una explicación es (o no) incompleta? ¿Suficiente? ¿Errónea? ¿Distinta de otras? ¿Puede esperar esto de los propios alumnos en su condición de pares? ¿Puede tener organizadas distintas estrategias - elaboradas en su preparación de la clase - y apelar a intervenir únicamente cuando otros alumnos no lo hacen? ¿Puede poner a los alumnos en diálogo?, ¿Resulta conveniente triangular todas las intervenciones como si fuera el docente un pivote - moderador? ¿Es necesario - en su lugar de docente- comandar todas las explicaciones de sus alumnos? ¿Es preciso reelaborar junto a ellos las explicaciones producidas o éstas debieran quedar como los alumnos las han logrado? ¿Es deseable que convoque a sus alumnos de algún modo específico al trabajo de fundamentar o es preferible dejar que los enunciados de los problemas operen solos? Estas preguntas ponen en evidencia todas las decisiones que están involucradas en la gestión del docente en este tipo de propuesta de trabajo con sus alumnos.

El análisis micro que proponemos permite distinguir intervenciones del docente, que hemos recortado como observables a partir del estudio de los diálogos, en algunas circunstancias en calidad de respuesta a preguntas o formulaciones de los alumnos, en otros casos siendo el docente el que toma la iniciativa con su intervención. Hemos dado cuenta en los dos capítulos anteriores de las características que adoptó el análisis previo de los problemas como así también de aquellas cuestiones generales que se delinearon en el espacio Taller.

En los diálogos que vamos a presentar vemos a las intervenciones docentes como una forma en la que ellos operacionalizaron la intencionalidad construida en el Taller. Queremos subrayar que estas intervenciones no podrían interpretarse como una reproducción de un repertorio de posibles respuestas o expresiones entregadas a modo de libreto en dicho espacio[138]. Pretendemos distinguir así la intencionalidad problematizada durante el Taller de la operacionalización producida por las docentes durante la gestión de

[138] Señalamos dos cuesiones. Por un lado, la idea de libreto justamente da cuenta de un texto que no está en interacción y en ese sentido se contrapone a la de diálogo. Por el otro, la propia extensión de un libreto de tales características para el importante volumen del material diseñado lo hace inviable.

clase. Remitimos al lector al capítulo del Taller pues él da cuenta de la modalidad de trabajo elegida.

Estas intervenciones docentes, producto de una intención, promueven a su vez una forma del aprendizaje en la clase de matemática a partir de: el significado o sentido que pueden transmitir respecto del objeto de enseñanza y del contexto que generan para su aprendizaje. Intentaremos dar cuenta de estos sentidos que el docente comunica a sus alumnos en acto.

Encontramos un primer conjunto de intervenciones que marcan –esto es, señalan de manera más o menos explícita - que la fundamentación puede tener una función específica[139]. Una situación clásica es aquella en la cual el docente pide que el alumno explicite en qué se está apoyando para sostener sus afirmaciones. En este caso el docente está apelando a la fundamentación como una forma de validar la posición del alumno. Veremos que hay otras funciones con las que el docente exhibirá o demandará fundamentaciones. Este análisis se desarrolla en el punto 7.3 de este capítulo.

Señalaremos otro conjunto de intervenciones docentes (que presentaremos en segundo lugar) que, entendemos, generan condiciones de contexto para propiciar este trabajo. En estas intervenciones la docente, por ejemplo, habilita la palabra de un alumno, sostiene el estatuto de productor de ideas del colectivo "clase" o reconstruye las producciones de los alumnos con el objetivo de plantear nuevas cuestiones a tratar. Este análisis constituye el punto 7.4 del capítulo.

Creemos que la descripción y el análisis que proponemos da cuenta de la complejidad del trabajo del docente y desalienta cualquier pretensión de algoritmizarlo suponiendo que puede recorrerse en ítems y reproducirse en secuencias.

[139] Recordemos que, tal como hemos relatado en el Capítulo 2, algunos autores han estudiado las distintas funciones que puede tener la demostración planteando que estas distintas funciones pueden ser utilizados para la enseñanza de la misma. En tal sentido Hanna y De Villers mencionan que la demostración puede tener como fin encontrar las razones que convierten a una conjetura en afirmación y como tal sirve para acercar el por qué de los hechos, mientras que otras demostraciones sirven para ordenar un conjunto de saberes o enunciados, o para dar cuenta de la veracidad de una afirmación sin mostrar las razones (esto último ocurre con frecuencia en el caso de las demostraciones por el absurdo).

7.3 Funciones y Sentidos Asignables A La Fundamentación

Hemos mencionado en el Marco teórico que la TS destaca, en la construcción de un saber, la necesidad de considerar los sentidos que el sujeto que aprende puede elaborar en relación con dicho saber. Tomando esa referencia nos propusimos abordar los sentidos que los docentes puedan comunicar a sus alumnos con relación a la producción de fundamentaciones en clase, anticipando que algunos serían seguramente compartidos con la demostración y la prueba de Balacheff, tales como los de explicar, comprender y validar en tanto que otros –probablemente- emerjerían de esta investigación. Presentaremos a continuación nuestros resultados.

7.3.1 LA FUNDAMENTACIÓN sosteniendo la **construcción-desarrollo de las ideas**.

En algunas situaciones de clase el docente promueve explicaciones por parte de sus alumnos como una forma de desarrollar aquello que están imaginando o en condiciones de pensar. La fundamentación aparece como un instrumento (en tanto herramienta de producción o de pensamiento) para el desarrollo de ideas, conjeturas, "de lo posible"[140] . El docente privilegia la construcción de cadenas deductivas apoyándose en hipótesis que, marcadas y señaladas, son tomadas como punto de partida para la construcción de ideas dejándose en suspenso el análisis sobre el valor de verdad de dichas hipótesis. Para dar un ejemplo el docente puede decirle a sus alumnos "y si fuera cierto que el crecimiento o decrecimiento de la familia de funciones $f(x) = k \cdot a^x$ sólo depende del parámetro a ¿qué podríamos observar sobre las características de k a partir de allí?" o también "y suponiendo que fuera cierto que la ordenada al origen en la familia de funciones

[140] Lakatos (1976: 26,58, 90-95) realiza una distinción entre los enunciados que anteceden a las pruebas de aquellos enunciados que emergen como el resultado de la producción de una prueba. En su análisis de los procesos de producción de conjeturas, pruebas y refutaciones da el nombre de conjetura ingenua a aquella que se produce a partir de la observación de una regularidad en un número de casos específicos. Durante su obra el Maestro y los alumnos discuten sobre la posibilidad o no de considerar a este modo de razonar como un razonamiento inductivo o inducción. Luego menciona la conjetura deductiva y la define como el proceso de encadenar afirmaciones en forma deductiva hasta llegar a un resultado. Queremos distinguir estas situaciones de la que estamos aquí proponiendo para la fundamentación ya que nos estamos centrando en la toma de algunas afirmaciones que los alumnos realizan (y que en términos de los alumnos son hechos) por parte del docente como puntos de partida para organizar cadenas deductivas pero de los que no se conoce su valor de verdad.

$f(x) = k \cdot a^x$ está marcada por el valor de k ¿qué podríamos observar sobre las imágenes a partir de allí?"

Distinguimos en estas situaciones: proyecto, intención y desarrollo. En alguna medida el docente le comunica al alumno que aquello que dice tiene consecuencias. La fundamentación, en este caso como proceso o actividad, sirve para llegar a una construcción de una afirmación que todavía no conocemos, el acto de fundamentar **antecede** a la proposición. Cuando el proceso de fundamentar haya finalizado habrá una afirmación y una fundamentación para esa afirmación (en la medida que se pueda confirmar el valor de verdad de la hipótesis utilizada).

7.3.2 LA FUNDAMENTACIÓN como **sostén de la verdad**.

En estas intervenciones vemos que el docente solicita o demanda al alumno una justificación de aquello que está sosteniendo. La fundamentación cumple entonces la función de clarificar las razones del valor de verdad de un enunciado y es por ello que aporta un valor explicativo en el sentido en que lo plantea Hanna, tal como lo hemos reseñado en el capítulo 2 y lo hemos incluido en nuestro marco teórico. El docente requiere explicaciones para asegurar el valor de verdad de lo que algún integrante de la comunidad aula está sosteniendo. Señala de este modo dos cuestiones, la primera es que algunas afirmaciones matemáticas no son verdades evidentes, al menos para esta comunidad clase, en segundo lugar y en consecuencia, que deben mostrarse sus razones. El docente promueve, de este modo, que los alumnos pongan en juego el **valor epistémico**[141] que para cada alumno tienen las afirmaciones que se elaboran en clase y entrega a los alumnos la responsabilidad de su desarrollo y sostén.

En esta construcción discursiva los tiempos se han invertido respecto del anterior, ya que la afirmación, la noción de un hecho ya fue enunciado en la clase y la fundamentación "a construir" proveerá el sostén al mostrar las razones para confirmar su veracidad. Es el caso en el que un docente le puede decir a un alumno o a toda la comunidad clase: "me dicen que la nueva figura tiene todos los lados iguales y ¿en qué se apoyan para realizar esa afirmación?"

[141] El valor epistémico ha sido desarrollado en el Marco Teórico.

7.3.3 LA FUNDAMENTACIÓN como **sistematización del conocimiento producido o evocado.**

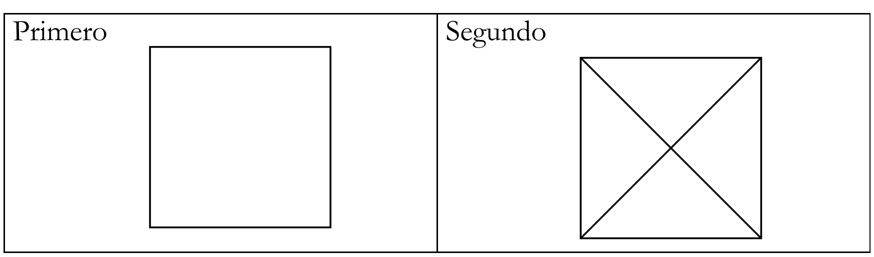
En algunos momentos del diálogo el docente reelabora frente a sus alumnos una sucesión de afirmaciones, muchas veces en cadenas deductivas reorganizando la producción de uno o varios alumnos. En estas situaciones la fundamentación elaborada por el docente mediante la reconstrucción de ideas producidas por los alumnos tiene como propósito comunicar a la comunidad clase el estado del conocimiento alcanzado. En este escenario el docente institucionaliza un determinado estado del conocimiento en términos de Hersant y Perrin-Glorian (2005). No obstante, veremos más adelante - como otra de las intervenciones destacadas - que el docente realiza otro tipo de reconstrucciones con otros propósitos. Recuperamos esta reconstrucción específica en tanto mediante ella se produce una fundamentación que sistematiza parte del conocimiento producido por la clase.

Veamos algunos diálogos de clase que ilustran la forma en la que el docente señala estas funciones que hemos descripto hasta aquí.

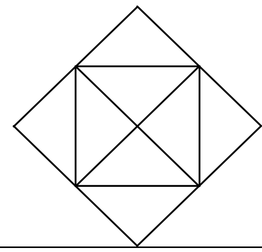
Diálogo 7.I. Docente-clase. Construcción del nuevo polígono del problema 1 y discusión sobre su calidad de "cuadrado".

1.-Doc. A ver, necesito que me ayuden. Cuidado Agustín, que el otro día me salvaste. En este cuadrado (que acaba de dibujar) marco las diagonales, mi construcción es así: yo voy a tomar una paralela a esta diagonal que pase por los vértices que no están en esa diagonal, ¿ven? Ahí. Lo mismo con la otra. **Me tienen que ayudar a decidir qué es esta figura.**

(La profesora realiza este dibujo en tres etapas)



Tercero



2.-A_0. Es un cuadrado.
3.-A_1. Es un rombo
4.-A_2. Es un cuadrado pero con otra posición.
5.-Doc. Pero a ver, ¿es un cuadrado? **¿Por qué es un cuadrado? (a)**
6.-A_0. Es un cuadrado dado vuelta. Todos los lados son iguales.
7.-Doc. **¿Y cómo saben que todos los lados son iguales? (b)**
8.-A_3. Porque las diagonales son iguales.
9.-Doc. ¿Qué diagonales?
10.-A_3. Si trazás las diagonales de la nueva figura van a pasar por el mismo centro.
11.-Doc. Ah. Ella dice que si trazo las diagonales de la nueva figura van a pasar por el mismo punto que las diagonales del cuadrado original. **¿ Y vos como sabés eso? (c)**
12.-A_3. Eh... no sé (risas).
13.- Doc. Bueno, esperen, **vamos a reconstruir**, vamos a escucharnos. **Ustedes dicen que esa nueva figura es un cuadrado y entonces Agustín dice que es porque tienen los lados iguales. (i)**
[interviene una alumna, Noelia, a la que no se escucha con claridad en el audio, pero la docente reproduce lo que Noelia dice para toda la clase]
14.- Doc. Ella dice que los lados del cuadrado original van a ser hipotenusa de esos nuevos triángulos que son rectángulos. Ella afirma que estos triángulos son rectángulos y que esta es la hipotenusa. **Y en el caso en que esa sea la hipotenusa y que esos triángulos sean rectángulos, ¿qué me ayuda a ver? (1)**
15.-A(Noelia). Que los lados son iguales.
16.- Doc. Es decir que si dos triángulos rectángulos tienen la misma hipotenusa ¿son iguales?
17.-A(Noelia). No... Entonces no es un cuadrado.
18.-A_1(Marianela). ¡Es un cuadrado profe, el lado del cuadrado que se formó tiene el mismo largo que las diagonales del cuadrado original!
19.- Doc. ¡Momento que acá hay otra cosa! Marianela dice que ella apoya la decisión de Agustín en esto. **Ella dice que este lado de acá es igual a la diagonal del cuadrado original, que está acá, y que este otro lado es igual a la otra diagonal. ¿Entonces? ¿Cómo seguimos ahora? (2)**
20.-A(Marianela). Las diagonales del cuadrado son iguales, entonces los lados nuevos son iguales.
21.-A_1. Y tienen ángulos rectos.
22.-Doc. **¿Y cómo sabemos que tienen ángulos rectos? (d)** A ver, reconstruyamos esta variación. Ella dice que este lado es igual a esta diagonal. Ustedes ¿están de acuerdo con esto? **¿por qué son iguales? (e)**
23.-A_1. Porque son paralelas.
24.- Doc. ¿Y eso alcanza?
25.-A1. No, pero esas también son paralelas.
26.-Doc. Ah, entonces hay una faja de paralelas acá y otra faja acá. ¿Y qué forma esta figura?
27.-A1. Un rectángulo.

28.-Doc. Bueno,
29.-A2. O un cuadrado.
30.-Doc. Si yo tengo una faja de paralelas acá y otra acá ¿siempre se forma un rectángulo? Organicémonos porque estamos dando distintas variaciones y son todas buenas.
31.-A2. Porque son perpendiculares
32.-Doc. Ah, **¿y cómo saben que son perpendiculares? (f)**
[muchos alumnos hablan juntos]
33.-Doc. Al principio yo les pregunté si esta figura era un cuadrado. Ella dice este lado es igual a éste, yo estoy tratando de ver por qué son iguales. **Yanina me dijo que son iguales porque acá hay dos fajas de paralelas. Yo les pregunto ahora, si no tuvieran esto así, si no vieran esta figura y yo les digo: si tengo dos fajas de paralelas ¿qué figura forma? Es un cuadrilátero pero ¿qué cuadrilátero? (3)**
34.-A (Yanina). Un cuadrado.
35.-A2. Un rectángulo.
36.-A(Bruno). Un cuadrilátero cualquiera, si son perpendiculares exactas va a dar un rectángulo.
37.-Doc. Sí, eso es verdad. Bruno está diciendo que si estas diagonales son perpendiculares entonces acá también se van a cortar perpendicularmente y va a ser un rectángulo. Y ¿qué pasa con los lados opuestos del rectángulo?
38.-A2. Van a ser iguales.

Recortamos este diálogo entre docente y alumnos que en su versión completa todavía continúa hasta acordar en forma conjunta las razones por las cuales ese nuevo polígono es un cuadrado. Durante el intercambio han surgido varias intervenciones de los alumnos para la producción de las razones por las cuales el polígono era un cuadrado. Aunque para un observador externo a este proceso de producción y tal vez centrado en la elaboración de un texto "limpio" en el que todas las sentencias intervienen en la argumentación los aportes de los alumnos no fueron todos directamente útiles, la docente dio oportunidad para que todas las intervenciones afloraran y se desarrollaran - sin sancionar su pertinencia – sino que, por el contrario, fue convocando a que los alumnos continuaran con sus exposiciones o las profundizaran hasta que surgiera del mismo grupo alguna explicación superadora de la que se analizaba. Retomaremos esta cuestión cuando mencionemos otras características de las intervenciones docentes.

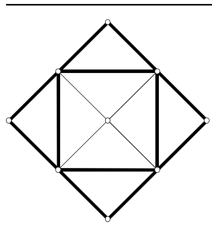
Hemos resaltado (negrita) y enumerado (1,2,3) un primer grupo de intervenciones. En cada una de ellas la docente invita a los alumnos a continuar desarrollando una idea a partir de un supuesto. En el primer caso el supuesto ha sido propuesto por una alumna que ha visto en la nueva figura cuatro triángulos rectángulos con la misma hipotenusa[142]. La docente

[142] Los triángulos que menciona la alumna se señalan en negrita.

toma este supuesto de la alumna, se lo devuelve a toda la clase y entra en un juego de razonamiento hipotético preguntando qué es lo que este supuesto le permite deducir. Para ello en primer lugar señala cuáles fueron las dos afirmaciones de la alumna, arma con ella una sentencia y luego marca con el condicional la calidad de hipótesis de esas afirmaciones. Esta operación está dirigida tanto para la alumna como para el colectivo "comunidad-aula".
En el segundo caso toma la observación de otra alumna, quien ha **visto** que los lados del nuevo polígono tienen la misma longitud de las diagonales del cuadrado inicial y por lo tanto son iguales. No se concluye directamente de la construcción que los lados del nuevo polígono tengan la misma longitud que las diagonales ya que se realizó una construcción de traslado de paralelas. Sin embargo la docente omite momentáneamente esta situación, mantiene el supuesto y pide a los alumnos que propongan continuar con el desarrollo de la idea a partir de este **supuesto** (luego retomará el pedido de justificación de dicha hipótesis. Esto muestra además que este trabajo no tiene un recorrido lineal).
En la tercera intervención es la propia docente quien propone, tomando una observación de un alumno, suponer que se tiene un cuadrilátero formado por pares de lados paralelos e inquiere a sus alumnos a partir de ese supuesto a decidir qué se podría decir del cuadrilátero así formado.

Con estas intervenciones la docente está señalando:
a.- una forma de trabajo -que constituye el corazón del trabajo matemático - donde la hipotetización de una idea permite avanzar sobre el conocimiento de la figura.
b.- la existencia y disponibilidad de una estructura -supuesto-deducción- que los alumnos están utilizando, aunque tal vez no conscientemente, en sus argumentos.

Creemos que en estas intervenciones la docente está comunicando en acto una forma que puede asumir la fundamentación y también una función posible: la de contribuir a la producción de "ideas - sostén del trabajo" .



Las hipotenusas de los cuatro triángulos son los lados del cuadrado original en tanto que sus catetos están formados por parte (la mitad) de los lados del nuevo cuadrilátero.

Los supuestos son provisorios y utilizados tanto por la docente como por los alumnos para continuar la construcción de una fundamentación que permita validar que la figura construida es efectivamente un cuadrado. En el proceso los alumnos van elaborando un conjunto de explicaciones locales que les permiten desarrollar sus ideas. Hay una retroalimentación entre la observación de la figura construida en pizarrón, las explicitaciones de la docente y la construcción de explicaciones lo que alimenta nuevas observaciones e ideas. La docente va sosteniendo todo el proceso. Los alumnos están activamente involucrados (esto último no puede inferirse de la transcripción sino de los tonos de voces y de la dinámica que tiene la clase que se registra en el audio y también a partir de la observación de la clase). Hay, en definitiva, un énfasis puesto en la producción de argumentos que se ubica por encima de la producción de enunciados verdaderos.

Hemos resaltado también otras intervenciones de la docente (en negrita) y las hemos indexado (a,b,c,d,e,f). Estas intervenciones, sucintas, todas preguntas cortas y puntuales de la docente, vienen precedidas en algunos casos de una reconstrucción de los comentarios precedentes de los alumnos y se ve en todas ellas una demanda de la docente por ahondar en explicaciones-fundamentaciones que les permitan a los alumnos sostener el valor de verdad de las afirmaciones que están realizando (¿por qué es un cuadrado?, ¿y cómo saben que todos los lados son iguales?, y vos ¿cómo sabés eso?, ¿y cómo saben que tienen ángulos rectos?, "a ver reconstruyamos esta variación. Ella dice que este lado es igual a esta diagonal ¿por qué son iguales?").

De esta forma la docente señala que aquello que están **observando** en el pizarrón y afirmando: que los lados son iguales, que las nuevas diagonales son perpendiculares (independientemente de que estén o no dibujadas), que los ángulos son rectos, debe ser **fundamentado** a partir de las características de la propia construcción o mediante propiedades conocidas por los alumnos. Lo visual no alcanza. Los impulsa así a pasar de la observación a la fundamentación. No se trata de relatar lo que se ve sino de construir un repertorio de ideas organizadas en cadenas deductivas, que desemboquen en aquella idea que necesitamos asumir y aceptar como verdadera.

Los alumnos, por su parte, aceptan la necesidad de justificar sus afirmaciones más allá de que la imagen del pizarrón los avale, esto nos indica que en este grupo de alumnos algunas cuestiones referidas a las características de la producción de explicaciones matemáticas ya están instaladas y aceptadas como normas para esta comunidad aula. No obstante sus primeras afirmaciones se apoyan en lo que están viendo (por ejemplo A_3 entiende que “diagonales iguales” es una condición necesaria para que el cuadrilátero sea un cuadrado aún cuando no justifica por qué son iguales) La docente es quien acepta o no las relaciones que se presentan.

En este conjunto de intervenciones la docente está comunicando a sus alumnos que la fundamentación tiene como sentido o función la de sostener el valor de verdad de sus afirmaciones operando de este modo sobre el valor epistémico de las proposiciones que se ponen en juego.

En tercer lugar marcamos una intervención, la (i), donde la docente comunica a los alumnos que realizará una **reconstrucción** de lo dicho hasta allí. Convoca a detenerse y reflexionar sobre lo dicho hasta el momento. La reconstrucción no toma todas las expresiones que los alumnos han realizado hasta entonces (se habían mencionado las diagonales pero esto no fue retomado). La docente elige qué sentencias recordar y cómo enlazarlas. La operación de reconstrucción sirve para recortar y afirmarse en algunas ideas que se han producido hasta allí y sirve a su vez para que la comunidad aula se apoye en ellas para continuar con el objetivo de mostrar de manera fundamentada que esa nueva figura es un cuadrado. **La reconstrucción toma la forma de una fundamentación** y **sistematiza un conocimiento producido**. Es verdad que los alumnos no han justificado aún por qué los lados son iguales, es cierto también que el diálogo apenas ha comenzado. En los próximos diálogos continuamos ilustrando estas funciones.

Diálogo 7.II. Docente y grupo de alumnos. Problema de la Laguna.

Este diálogo se produce entre un grupo de alumnos que está trabajando el problema de la luminosidad en grupo y la docente en la fase de trabajo grupal. Los alumnos han armado la tabla con la luminosidad en los primeros metros y están ahora calculando la luminosidad a medio metro. La docente observa que han utilizado la hipótesis de proporcionalidad para medio metro, tal como habíamos previsto y analizado en el Taller. Los alumnos convocan a la profesora para confirmar su hipótesis.

Al_1. ¿Te hago una pregunta?
Doc. Sí,
Al_1. Si bajás medio metro descontás 10% porque bajaste la mitad de un metro, ¿no?

Doc. Vos ¿pensás como ella? (la docente testea la posición de su compañero)
Al_2. Sí
Doc. Bueno, **vamos a razonar como ustedes están razonando pero con estos números**. Acá bajaron un metro y acá bajaron dos metros. El porcentaje que aplican cuando bajan un metro ¿es la mitad que el porcentaje que aplican cuando bajan dos? O mejor, **cuando bajan el doble descuentan el doble?**
Al_1 y Al_2. Ah no.
Doc. Porque ¿cuánto sería descontar el doble?
Al_1.el 40%.
Doc. Bueno, **fíjense que esa idea que ustedes tienen no se respeta entre uno y dos metros.**

La docente hace una **reconstrucción** de la hipótesis de proporcionalidad que los alumnos están consultando y que funcionó explícita o implícitamente en el grupo para decidir la luminosidad a medio metro. A continuación muestra a los alumnos que la aplicación de un argumento de proporcionalidad como el que quieren utilizar no se comprueba para otros valores de la tabla que los alumnos han realizado a partir de los datos del problema. Se desestima así la explicación de los alumnos en tanto se muestra, por contraste, que la fundamentación está presente como sostén de la verdad. Vemos además aquí una apelación a la confrontación y búsqueda de consistencia de una idea con otras ya producidas, o de un resultado con otros ya producidos. La docente muestra en acto que lo que se dice, el nuevo conocimiento producido, no puede oponerse a lo que ya se ha aceptado. Habíamos anticipado con las docentes en el taller que frente al uso de la proporcionalidad podrían intervenir apoyándose en los valores ya establecidos. Entendemos que en esta intervención la docente funciona como una retroacción (al estilo de las retroacciones del milieu) al ofrecer evidencias que les permiten a los alumnos rechazar la relación invertida. El carácter de retroacción estaría dado por dos razones: porque los alumnos se han formulado de manera explícita la pregunta por la validez de la relación antes de usarla directamente lo cual permite suponer que ellos -en términos de Balacheff- interactúan con una sentencia y su negación ("si bajás medio metro, descontás 10%) y porque el docente se apoya en datos ya producidos -que forman parte del milieu del alumno- para analizar la validez de dicha sentencia.

Diálogo 7.III. Docente y clase. Puesta en común sobre las fórmulas que surgieron en el tratamiento de todos los problemas en contexto.

La profesora ha convocado a una puesta en común -durante un tiempo de 60 minutos- donde cada grupo, mediante un representante, debe exponer ante toda la clase cuáles fueron los aspectos a destacar del conjunto de problemas con contexto analizados (una actividad adicional que no está tratada en el capítulo 6 sobre los problemas, ideada por la propia docente). Luego de que cada grupo realiza su exposición y las fórmulas asociadas a cada problema quedan escritas en el pizarrón se inicia un nuevo intercambio entre la docente y toda la clase con el objetivo de describir y comprender el papel de los parámetros en cada una de las fórmulas. Para esto la docente continúa utilizando los problemas como medio para la interacción y la búsqueda de relaciones entre los datos de los enunciados y la escritura de las fórmulas respectivas.

Doc. Les pido algo, en función de lo que tendrán impreso luego déjenme cambiar estas letras. Pongamos $k \times a^x$. Escuchen....ustedes tienen que ir cambiando esta expresión por los parámetros que vieron. Vamos a jugar un poquito.
Al. ¡qué divertido! (risas)
Doc . Y estos de acá ustedes me tienen que ir cambiando los parámetros por los que les parecen. Por ejemplo: situación de los cuadrados que se dividían. **Supongamos que partimos de un cuadrado que el área original valiera 10. ¿cuál sería la fórmula correspondiente?**
Al. diez sobre 4 a la equis [$10 / 4^x$].
Doc. ¿Diez sobre cuatro a la equis? O lo que es lo mismo...
Al. diez por un cuarto a la equis [$10 \times (1/4)^x$]
Doc. **¿Y si yo hubiera dividido en 8 partes al cuadradito original? ¿Qué pondría?**
Al. 10 sobre 8 a la equis
Al. o 10 por un octavo a la equis [$10 \times (1/8)^x$]
Doc. **¿Si en la luminosidad me dijeran que cada metro baja el 30%?**
(el clima que se produce durante este intercambio es de un gran silencio mientras la profesora habla, los alumnos no contestan inmediatamente, hay una elaboración previa, no están escribiendo en sus carpetas, pero se nota que cambió el ritmo de intercambios orales que hay en otros donde los alumnos reflexionan sobre sus producciones)
Al. Cien por cero coma siete a la x [$100 \text{x} 0{,}7^x$].
Doc. ¿Están de acuerdo? ¿Si? Ah, bueno, **Díganme ustedes ¿qué condiciones tiene el problema** (se refiere al problema de la laguna) **si la fórmula es esta?** (escribe en pizarrón $75 \text{x} 0.88^x$)
Al. al principio 75 y cuando bajás, bajás 12%
Doc. ¿Cada cuánto?
Al. cada uno, si no estaría dividida la equis
Doc. Ah! mirá lo que dice ella, que acá es cada metro porque si no la equis tiene que ir dividida.
Doc. ¿Qué pasaría acá si a mi me dicen que las bacterias tienen al principio 60 pero en vez de aumentar me dicen que disminuye el 25%?

Al. Sesenta por cero como setenta y cinco a la equis[$60x0,75^x$].
Doc. Ahora me meto con los piojos. Inicialmente tengo 20 piojos pero en vez de triplicarse se cuadruplica cada 5 días.
Al. 20 por 4 a la x sobre 5 [$20x4^{x/5}$].
Doc. Aja y **¿qué pasaría si yo cambio el intervalo en el que se triplica o cuadruplica?** Por ejemplo si yo dijera que se triplican cada 10 días.
Al. a la equis sobre diez
Doc. Y ¿por qué tengo que poner dividido 10?
Rocío. **Porque eso marca el paso.**

Si bien en este conjunto de preguntas no se está apelando a una fundamentación sino a los cambios que se operan en fórmulas que ya fueron producidas por los alumnos, la apelación al condicional da cuenta de una entrada en un juego hipotético que tiene afinidad con la mención que hemos hecho antes sobre la fundamentación como sostén para la producción de ideas. Los alumnos "juegan" convocados por la docente a cambiar escenarios e imaginar cómo repercuten estos cambios en las producciones que ya realizaron. Esta producción anclada en el trabajo contextualizado servirá de sostén para la etapa que luego se desarrolla de análisis y estudio de la función exponencial en la medida que dota de sentido (variaciones de crecimiento o decrecimiento, unidades o períodos de tales cambios, etc.) a los valores que asumen los parámetros en la fórmula exponencial.

La última pregunta tiene una reelaboración, no se apoya inicialmente en un ejemplo sino que surge con un cierto grado de generalidad pues en principio la docente no menciona cuál es el cambio puntual aunque inmediatamente da el ejemplo. No obstante Rocío muestra que puede utilizar el ejemplo para explicar en forma general, convocada por la profesora, - y en este sentido entendemos que hay una aporte a la construcción de fundamentaciones - el rol que desempeña el divisor de la variable exponente contextualizado en el problema de los piojos: "el paso aparece en la fórmula como un divisor del exponente".

Hasta aquí hemos presentado estas tres características de las intervenciones docentes agrupadas, pues en todas ellas el docente marca una **función** específica para la fundamentación que se está pidiendo o construyendo. Este funcionamiento en clase y en situación de oralidad de la fundamentación nos confirma en nuestra propuesta de proponer a la fundamentación como una transposición didáctica de la demostración.

En su trabajo del año 1976, Bell había estudiado y relevado tres funciones para la demostración: verificación, iluminación y sistematización. Posteriormente, en 1990, De Villiers amplío esta propuesta, desde ya no exhaustiva como el mismo autor lo expresa, a cinco funciones: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación[143].

Entendemos que en tanto estas funciones asignadas a la demostración son difícilmente factibles de elaborar en contextos de trabajo donde los alumnos sean los productores, la fundamentación da lugar a su puesta en escena en el aula y las funciones y sentidos que se pueden transmitir de forma más o menos explícita tienen una importante consistencia y afinidad con aquellas de la demostración.

Balacheff sostiene que la prueba tiene una connotación social en tanto debe ser aceptada por "otros" (ver Marco Teórico sobre la Prueba). Nosotros hemos postulado que las fundamentaciones son explicaciones que tienen por objetivo ser comunicadas a otros y comprendidas por otros que en este caso constituyen la **comunidad clase**. De este modo la fundamentación vive en un espacio que trasciende al individuo. En lo que sigue señalaremos algunos tipos de intervenciones docentes ligadas al aspecto social de la fundamentación.

7.4 INTERVENCIONES DOCENTES EN EL CONTEXTO DE LA FUNDAMENTACIÓN

Como ya mencionamos antes, la producción de fundamentaciones se sostiene sobre las nociones de los alumnos, se apoya en lo que ellos observan, se comunica a otros miembros de la comunidad clase para su consideración o para sostener posiciones. En todo el proceso de producción de estas explicaciones el docente sostiene el escenario de producción, colabora acercando elementos de análisis, propicia la confrontación siempre autorregulando su asimetría. Señalaremos aquí un conjunto de intervenciones que identificamos en este proceso en algunos de estos aspectos.

[143] Hemos presentado estos trabajo en el Marco Teórico, apartado 3.2.4

7.4.1 Reconstrucción

Durante el diálogo con los alumnos en algunas ocasiones la docente realiza una reconstrucción o amalgama del discurso motorizado por los estudiantes. Las reconstrucciones podrán ser **locales,** o **globales** teniendo en cuenta para las primeras que la evocación de producciones de los alumnos son aquellas que se dan dentro del diálogo en cuestión, o, para las segundas que se retoman de diálogos anteriores. Se distinguen unas de otras por su propósito. En las **reconstrucciones locales** la reconstrucción permite que el alumno y/o la comunidad clase no pierda de vista su búsqueda, su objetivo de trabajo y tenga a su vez una noción de toda la construcción producida hasta el momento.

En las **reconstrucciones globales** la docente ofrece a los alumnos nuevas formas de examinar un conjunto de producciones lo que constituye a su vez una manera de comprender una producción, que tanto puede ser una fundamentación como un proceso de resolución de una consigna. Dejaremos las reconstrucciones globales para el próximo capítulo en el que realizamos un mezzo-análisis.

Notamos que tanto en unas como en otras, pero mucho más en las reconstrucciones locales que en las globales, la docente realiza una operación discursiva al enfatizar quién es el emisor del discurso "Bruno dice que", Marianela piensa que, Rocío cree que, Kevin se dio cuenta de lo siguiente.

Si bien estos casos de reconstrucción local y global se dan con mayor énfasis en los momentos de puesta en común[144], mostraremos un diálogo en el que la docente está realizando un intercambio con un grupo de alumnas que está comenzando a trabajar en el problema de los piojos.

Diálogo 7.IV. Docente-grupo de alumnas. El problema de los piojos.

1.-A_1. Bueno y para ver la cantidad de días dividí 10 por 5 y me da 2. Hago $3^2 = 9$ luego hago 180 dividido 9 y me da la cantidad de piojos: 20.
2.-Doc. ¿De qué día?
3.- A_1. Del primero. Le pusieron 20 piojos al nene.
4.-Doc. ¿Y eso da 1?
5.- A_1. Y 10 días.
6.-A_2. Para mi está mal.

[144] Hay varios ejemplos de estas intervenciones en el diálogo 1 sobre la construcción del cuadrado. En la línea 10 de dicho diálogo la docente dice " Ah**. Ella dice que si trazo las diagonales de la nueva figura van a pasar por el mismo punto que las diagonales del cuadrado original**. ¿ y vos como sabés eso? (c) De esta forma anticipa su pedido de justificación ubicando a toda la clase en la afirmación que quiere validar.

7.-**Doc. Contales lo que me contaste a mi primero. Porque ellas... Vos me dijiste que inicialmente vos pensaste que tenía un piojo.**
8.- A_1. Yo dije, bueno no sabía cuántos había, entonces dije, uno al menos tiene que haber, entonces a los 5 días hay 3 y a los 10 días hay 9. Llegué así, con un piojo me da 9; con 2 me da 18, y seguí, me di cuenta que iba a tardar mucho en llegar a 180.
9.-**Doc. ¿Se entiende lo que ella dice? Ella dice así. Suponete que pongo 1 piojo, a los 5 días tengo el triple, a los 10 el triple de nuevo. Entonces multiplico por 9. Si agrego otro piojo arranco con 2 y multiplico por 9. Cada piojo que agrego me da 9 piojos a los 10 días. Entonces vio que si dividía a 180 por 9 tendría los piojos iniciales. Ahora, estos 20 piojos es lo que hay inicialmente**. ¿Y cómo hacés para ver los piojos a los 20 días.?
10.- A_1. Para los 20 días hice 20×3^4. **Para saber el cuatro** hice 20 dividido 5. Porque para averiguar el 2 había hecho 10/5. Creo que hay un poco de concordancia.
11.-Doc. **¿Se entiende lo que está haciendo?**
12.- A_2. Me perdí con el 3^4.
13.-Doc. Eso te pregunta. (le traslada a la alumna A_1 la pregunta de su compañera)
14.- A_1.El 4 es por 20/5, es como que lo dividí con la cantidad de días.
15.-Doc. Esta operación de tomar el triple ¿cada cuánto tiempo la hacés?
16.- A_1. Cada 5 días.
17.-Doc. **Ella dice que cuando pasa el 1º ciclo de 5 días multiplica por 3, quiere contar la cantidad de ciclos que necesita para triplicar**.
18.- A_1. Por eso hice 20/5 y me dio 4 y había hecho 10/5 y había tenido 2.
19.-Doc. ¿Se entiende?
20.- A_2. No
21.-Obs. ¿Hay 4 ciclos en 20 días?
22.- A_2. No hay dos ciclos.
23.-Doc, dos ciclos ¿de cuántos días?
24.- A_2. de 10.
25.-Doc. ¿Y de 5 días?
26.- A_2. Hay cuatro
27.-Doc**. Por eso, ella puso acá que triplica, triplica, triplica en cuatro ciclos. ¿Cuántos ciclos pasaron en 5 días?...** Por eso, ¿qué cuenta hago?
28.- A_1. 3^1 porque hay un solo ciclo.
29.-Doc. Aja. Y si fuera (en alusión a la pregunta) ¿cuántos piojos habría pasados 30 días?
30.- A_2. 20×3^6
31.-Doc. **Fíjense que ella se propuso contar los piojos iniciales para hacer sus cuentas**.

La docente interviene en este grupo de cuatro alumnas que están en la fase de trabajo grupal pidiéndole a una de ellas que le explique al resto como había revertido el proceso para pensar los piojos colocados en la cabeza del niño. La alumna ensaya una explicación de lo que pensó y luego de que la docente observa que quedan alumnos sin comprender, **reconstruye** la elaboración de la alumna. Si bien agrega la expresión "se triplica" (que la alumna nunca pronuncia) se ajusta a los pasos que la alumna ha dado, destacando que ella (la alumna) comienza explorando con un valor de un piojo y que esto de todos modos le permite ver el efecto de la multiplicación por tres. La alumna va desde el inicio hacia delante en el tiempo y la docente se mantiene en esta propuesta[145]. Además de esto y aunque en la forma del diálogo puede quedar difuso, el proceso de razonamiento de la alumna comienza con una afirmación en calidad de hipótesis: “supongamos que se le pone un piojo (línea 8). Si ese es el caso entonces .....” y continúa su razonamiento deductivo. Llega a los 9 piojos a los 10 días y sabiendo que en la cabeza del niño había muchos más ensaya con dos piojos al inicio. Nuevamente de la hipótesis va organizando la deducción y la comparación de ambos casos le permite ver por un lado que le faltan muchos casos para terminar en 180 piojos continuando esta enumeración de casos. No sabemos si se da cuenta de lo que dice la profesora o si pasa a razonar desde atrás hacia delante (si al pasar 5 días se triplica entonces yendo hacia atrás se divide por tres). En todo caso la profesora realiza una reconstrucción (veremos más adelante que en realidad resulta una ampliación). Parece haber un interés en la docente en hacer circular la exploración hipotética: “si fuera uno…(línea 9) ”.. Destacamos también la expresión de la alumna “creo que hay concordancia” (línea 10) lo que da cuenta de una búsqueda de control por parte de la alumna de la consistencia de los datos. Notemos que esta operación de reconstrucción resignifica las intervenciones de los alumnos que “arman” el argumento que se reconstruye. Veamos un ejemplo. En la línea 17 la profesora reconstruye las razones por las que la alumna hace 20/5. Un momento antes (línea 14) la alumna menciona las divisiones pero no explica por qué las pensó; luego de la intervención de la profesora (línea 17) la alumna reafirma sus cuentas “enganchando” la intervención de la profesora y dice: “por eso hice 20/5…”. Es decir la segunda vez justifica la operación apoyada en la reconstrucción de la docente. Se ve acá la función de amalgama de la que hablábamos antes.

En este diálogo desarrollado dentro de un grupo es claro que la **reconstrucción** docente no tiene como fin que el alumno sea escuchado por toda la clase ya que sus compañeros pueden oírla pues son pocos y están cerca, no obstante que puedan oírla no significa que puedan comprenderla y la docente vuelve a **reconstruir** la explicación de la alumna para que, en términos de Balacheff (1988) los alumnos que la escuchan “comprometan sus concepciones”. Por otra parte, de este modo la docente está también contribuyendo a una cohesión entre los integrantes del grupo. La utilización de una producción de otro, requiere la comprensión. Sin embargo la comprensión no garantiza el uso de las ideas del otro y esto

[145] Al mismo tiempo otros grupos de alumnos estaban razonando con la inversión, esto es, si al avanzar 5 días se triplica entonces al retroceder se divide por 3. No ocurrió esto en este grupo y la docente no lo trajo. Esta es la característica que queremos señalar cuando hacemos hincapié en la idea de **reconstruir** la producción de cada alumno.

tiene un significado de reconocimiento del otro en tanto productor intelectual, que no se conforma de un día para otro.

Por su parte en el grupo de alumnas hay un conjunto de actividades matemáticas puestas en juego: por un lado están resolviendo el problema, por el otro están elaborando explicaciones pertinentes que, además, tienen que formularlas a sus compañeros de grupos intentando ser comprendidos. La profesora al reconstruir las fundamentaciones sostiene el estatuto productor de los alumnos.

Hemos marcado específicamente (en negrita) en este diálogo las intervenciones de la docente que tienen como objeto reconstruir la explicación de las alumnos. Veremos más adelante que también nos interesa caracterizar otras intervenciones que aparecen en este diálogo pero lo dejaremos momentáneamente.

En el diálogo 7.I sobre la construcción del cuadrado hay otros ejemplos de reconstrucciones locales de la docente. La mayoría anteceden a las intervenciones que antes analizábamos. Entre las líneas 13 y 14 la docente enlaza varias intervenciones de sus alumnos y con ellas reconstruye la primera afirmación. "este es un cuadrado ya que tiene todos los lados iguales. Vemos que los lados son iguales ya que los lados del cuadrado original son las hipotenusas de los triángulos rectángulos señalados en el esquema y esto hace que los lados de dichos triángulos son iguales" Este enunciado es cuestionado por la docente y prontamente abandonado. Sin embargo lo que queremos notar acá es que en esta reconstrucción la docente amalgama participaciones de distintos alumnos. Los está convocando de este modo a trabajar en una misma dirección, en forma de colaboración y, de este modo, también está sosteniendo la cohesión de, en este caso, la "comunidad clase".

En otras situaciones la reconstrucción docente puede tener la intención de mostrar que las ideas propuestas son disidentes unas con otras y así generar una confrontación entre los alumnos.

También la reconstrucción es la operación discursiva por medio de la cual la docente comunica a sus alumnos que la fundamentación puede tener como función o sentido sistematizar el conocimiento existente. En este caso la reconstrucción tendrá como producto una fundamentación. En otros casos el resultado de una reconstrucción es un punteo de posiciones, coincidente o contrapuestas, o también un punteo o enlace de preguntas.

En el siguiente ejemplo los alumnos han trabajado el problema de la luminosidad. Teniendo en cuenta la fórmula a la que han llegado, la docente va a retomar la respuesta de la luminosidad a medio metro y la va a confrontar con la que se obtendría con el uso de la fórmula.

Diálogo 7.V. docente-clase. El problema de la laguna.

1.-Doc. El lo que te dice es esto, mirá. Si vos estás en una profundidad cualquiera y en esa profundidad vos sabés la luminosidad que tenés entonces le quitás el 20% te quedás con el 80 y sabés la luminosidad al siguiente metro. Bueno yo ahora quiero discutir lo que ella dice. Porque ustedes me dicen que no hay cómo comprobar, ni refutar, ni discutir lo que ella dice (va hacia el pizarrón, dice que va a hacer una tabla). Según Florencia pierdo el 10% entonces me queda 90% si repito su teoría y bajo medio metro más pierdo otra vez el 10%, otra vez me quedo con 90, y bajé un metro y no me quedé con el 80% del metro anterior. .....
[los alumnos contestan al mismo tiempo]
2.-Doc. Ah, acá dicen que es un margen de error....
[alumnos que contestan algo]
3.-Doc. ¡Ah! mirá lo que dicen acá, pará acá le contestan que ese error se arrastra y se hace un error enorme.
4.-A_2. El 90% es aproximado.
[otro alumno interviene]
5.-Doc. ¡Ah, pará! 89,4. **A ver estamos planteando esto, él me dice, si yo hago la fórmula que ustedes me dijeron para 0,5 me da 89,4, es decir $100x0,8^{0,5}$, y si hace lo que dice Florencia le da 90. Ahora yo pregunto, esto que yo digo ¿sirve para refutar lo que dice Florencia?**

En esta clase un grupo de alumnos apoyaba la teoría del 10% pues la diferencia entre el resultado de aplicar el 80% y dos pasos sucesivos del 10% en cada medio metro era muy pequeña (lo llamaban margen de error). La docente toma esta cuestión para analizar con toda la clase y surge un grupo que argumenta que la acumulación de errores se hará insostenible en varios metros más.

La docente podría haber provocado una confrontación ya con estas dos posiciones, sin embargo, ante el surgimiento de una nueva posición contradictoria, ella reconstruye una posición y otra y le devuelve a la clase el problema de decidir si esa nueva posición los confronta (o no) con la explicación que ha dado Florencia.

La docente deja caer el cuestionamiento de la acumulación de errores ante la riqueza de contrastar el uso de la fórmula exponencial frente a la propuesta de prorratear proporcionalmente los porcentajes.

7.4.2 Ampliación

Partiendo de una reconstrucción de las producciones y justificaciones de los alumnos notamos que, en algunos casos la docente incorpora algunas cuestiones que no fueron aportadas explícitamente por los propios alumnos. Si bien esta categoría podría pensarse como similar a la anterior, advertimos que surge una diferencia sustantiva cuando la docente interviene proporcionando más datos o hechos que los que han aportado los alumnos, teniendo entonces que reinterpretar sus explicaciones. Vemos que en general en las clases que hemos observado las ampliaciones portan el aval de los alumnos pues la docente las realiza pidiendo conformidad por parte de los alumnos con aquello que él está agregando para así poder preservar el sentido de lo que el alumno ha dicho. Este pedido de conformidad tiene repercusiones en el funcionamiento de la comunidad aula y la entendemos como una forma en la que la docente regula su asimetría. Es por eso que en esta conceptualización que hacemos de las intervenciones docentes lo consideramos parte constitutiva: la ampliación es tal en la medida que la docente tenga la conformidad de la comunidad aula respecto de su aporte, son los alumnos en este caso los que confirman la adecuación del aporte docente. Estos acuerdos pueden ser más o menos explícitos, en algunos casos la propia continuación de los alumnos en el diálogo entendemos que da cuenta de una conformidad con el aporte de la docente en otros casos hay preguntas específicas de las docentes.

Diálogo 7.VI. Puesta en común. Síntesis de cada grupo sobre todos los problemas en contexto.

Como ya describimos en el diálogo 7.III este extracto refiere a la misma actividad donde los alumnos tenían como tarea analizar qué aspectos relevantes habían observado en el conjunto de problemas en contexto. Con tal propósito destacan algunas cuestiones y proponen elementos en común entre todos los problemas. Los grupos a exponer son 6 en total y está exponiendo el segundo grupo.

1.-Marianela. Los porcentajes no se pueden distribuir proporcionalmente. Hay varios modelos válidos para resolver un problema. En cada problema hay por lo menos una forma de resolverlo. Siempre que quito o agrego un porcentaje lo hago del resultado anterior. Si bien en cada problema encontramos fórmulas éstas se vieron limitadas por la naturaleza de los mismos. Lo que debía transcurrir para que se produjera el cambio era constante en cada problema pero distinto en cada uno: un metro, cinco días, etc.
2.-Doc. ¿Cómo que cada problema tiene un intervalo constante? ¿Eso es? ¿En el que se hace qué cosa?
3.-Rocío. En el que crece o decrece algún porcentaje.

4.-Doc. Cada un intervalo fijo crece o decrece.¿Cómo es eso del anterior?
5.-Marianela. Siempre que quito o agrego un % lo hago respecto del resultado anterior.
6.-Doc. ¿Algo más?
7.-Marianela. El crecimiento o decrecimiento de la variable x es respecto del resultado anterior. En la fórmula el % que se mantiene o agrega está elevado a la n que es el paso.
8.-Doc. Vamos de a poco, ellas dicen que **el % que se va calculando cada intervalos constantes es siempre el mismo pero de la cantidad inmediata anterior**. Y que eso se ve reflejado en la fórmula y ¿donde está el porcentaje en la fórmula?

Aquí la docente realiza una primera ampliación de lo que las alumnas están leyendo agregando que el **porcentaje es siempre el mismo** pero que se calcula en la cantidad **inmediata** anterior. Se apela así a una lógica de los números naturales en problemas que ya están propiciando la entrada a los números reales. Esto le permite a la docente presentar una relación entre porcentajes y fórmulas que -como veremos a continuación -no quedará del todo saldada. Será retomada, sin embargo, fuera de este diálogo a partir de las síntesis de otros grupos y también más adelante con respecto al tiempo del trabajo en aula (aunque nosotros ya lo presentamos en el diálogo Nº 7.III.) cuando la docente y los alumnos analicen cómo el cambio de los datos de diferentes problemas incide en las fórmulas que se producen en cada uno.

9.-Mar. Ehhhhhhhhhh
10.-Rocío. Elevado al número de pasos que tengo. Cada paso sería el intervalo....
11.-Doc. Cada paso está condicionado por el intervalo.
12.-A_3. la x tenía un nombre ¿no?
13.-Marianela. Exponente.
14.- A_3. No, no lo otro.
15.-Doc. ¿La variable independiente?
16.- A_3. Sí eso. Que el número de pasos sería la variable independiente
17.-Doc. ¿Algo más?
18.-Rocío. En todos los problemas conociendo el valor de y para x se puede conocer el valor de y para $x+1$ aunque no se conozca x.
19.-Doc, **En todos los problemas que vimos si yo sé que para un x dio un y y conozco el valor de ese y, para $x+1$ voy a conocer su imagen, independientemente de que conozca o no el valor de x. Eso es lo que dicen las chicas**. ¿algo más?
20.-Rocío. Y que los problemas no aclaran qué pasa en cada intervalo, en cada paso.
21.-Doc. ¿En cada paso?
22.-Rocío. Por ejemplo dentro de los 5 días que tardaban en triplicarse los piojos no indica si crecen parejos ... si no pasa nada.
23.-Doc. Ah. En ciertos problemas no se informa sobre el interior del intervalo,
24.-Guillermo. O hay distintas fórmulas
25.-Doc. O **como está diciendo Guillermo: como no informan mucho podemos encontrar otros modelos que también los describen**.

La docente realiza una segunda ampliación de la producción de Rocío en la línea 19 para marcar que el valor de la abscisa puede quedar como incógnita en tanto que es indispensable conocer el valor de la ordenada y para conocer la imagen en un valor de abscsica $x+1$. Finalmente toma la expresión de Guillermo y con ella genera una tercera ampliación para producir una relación –Guillermo no la había explicitado - entre la presencia o ausencia de datos de un problema y la posibilidad de generar así varios modelos que interpreten dicho problema.

Diálogo 7.VII. Problema sobre las fórmulas de los problemas con contexto y las gráficas a elegir.

Luego de presentar todas las fórmulas de los modelos exponenciales surgidas en la resolución de los problemas con contexto y de analizar el dominio más amplio posible que puede tener la variable independiente en cada caso (ya fuera del contexto de los problemas que les dieron origen) se les entrega a los distintos grupos dos hojas con gráficas de funciones. Los alumnos tienen que decidir cuál era la representación gráfica de las fórmulas que disponen. El número de gráficas es siete en tanto que el de fórmulas es seis. Se esperaba que esto generara incertidumbre en la asignación de gráficas a fórmulas. Los alumnos no preguntan por esta cuestión y se disponen a trabajar en grupos. La fórmula del problema de los piojos elaborado en clase $f(x)=3^{x/5}$ no está representada en una gráfica. En cambio está la representación de $f(n)=3^n$ donde n señala el número de veces que se triplica. Durante la puesta en común los alumnos son convocados a explicar cuáles fueron sus estrategias para decidir qué gráficas asignan a qué fórmulas. Para el caso del problema de los piojos hay posiciones distintas entre los distintos grupos. La docente realiza una serie de preguntas para que se aclaren las posiciones y a partir de los comentarios de los alumnos realiza varias **ampliaciones** sobre lo que los alumnos están diciendo para poder ordenar el debate. Para ello se apoya en las producciones y debates observadas en la fase de trabajo grupal dentro de algunos grupos.

1.-A_1. En el gráfico dos, el de los piojos tomamos valores grandes de cien y... o sea para la "y" de cien y para la equis de uno
2.-Doc. O sea, escalas diferentes.
3.- A_1. Claro. Así que nosotros nos pusimos a buscar los valores exactos y nos dimos cuenta que verificaban como en el problema de los piojos, aunque tengan otros valores. Y también coincidían los valores que tomábamos nosotros, coincidían con los mismos valores que tomaban en la tabla. … de los piojos.
4.-A_2. O sea que el uno tomaba el valor del cinco... o sea que cinco días, sesenta piojos te daba...

5.-A_3. Para así decirlo, cambiaste los números de la equis. [esta alumna A_3 pertenece al mismo grupo, como A_1 y A_2]
6.-Doc. ¿Escuchan lo que dijo? Los demás, ¿los demás que opinan?

El alumno A_1 comunica en la línea 3 la estrategia que adoptó su grupo y la profesora pide a la comunidad clase de este modo que tome una posición frente a las estrategias utilizadas por el otro. Esto hace que los que escuchan tengan que confrontar sus prácticas con las producidas por otros. De este modo se instala en clase que aquello que otro hizo no es solamente del otro, lo es también de la comunidad en este momento de puesta en común. Se convoca a considerar y decidir cuán cerca o lejos están las ideas de cada integrante de esta comunidad. Esta es una forma de trabajo metamatemático posible. Se presentan las resoluciones, se analizan, se cuestionan, es un momento de comunicación de los conocimientos producidos mediante una actividad nueva que es el análisis comparado y que promueve la reflexión sobre las prácticas matemáticas.

7.-Doc. A ver, levante la mano quién, qué grupo dice que esa gráfica dos correspondía a los piojos.
Al. [varios] Primero sí.
8.-Doc. O sea que en un principio sí. ¿Quién después de debatir en el grupo decidió que no corresponde a los piojos?
[algunos alumnos levantan la mano]
9.-Doc. Ellos dos... Allá también... **¿Y cuál era la justificación** de los tres grupos que están acá, para decir que no correspondía a los piojos?
10.-A_1. Por como crece.
11.-A_2. Porque crece más rápido. Para el día dos tendría que tener sesenta piojos.
12.-Doc. O sea que la ordenada al origen coincidía. Pero que para alguno de los días, por ejemplo para el día uno o para el día dos, no indica la cantidad de piojos que tenían en la otra parte
[Contestan muchos alumnos al mismo tiempo, hay intensa participación]
13.-A(Dardo). Por pasos puede ser.
14.-Doc. A ver, Dardo dice que si la variable medía pasos, por así llamarlo... que si esa variable medía pasos le daba.

La profesora ha hecho pública en este puesta en común las dos posiciones que se organizaron en los distintos grupos y las hará confrontar a partir de la fundamentación que cada grupo dé sobre la decisión que tomaron. En esta situación el primer plano ya no está ocupado por las decisiones que se tomaron sino por las fundamentaciones para tales decisiones. Es la docente quien comanda este juego de dos planos organizando la escena de debate para que las explicaciones sean producidas, en primera instancia, por los grupos. La convocatoria es inclusiva en la medida que la docente pide el consenso de todos los alumnos para continuar.

15.-Doc. ¿Si? ¿Está todo el mundo de acuerdo?... ¿Si pero qué?
16.-A_4 . Pero no especifica qué son.
17.-A_5 . ¿Cómo que no?
18.-A_4. No te dice si son pasos o son...

[Se genera una discusión entre los integrantes de los grupos que tienen distinta posición. La docente sanciona.]

19.-Doc. A ver, ¿podemos mirar? **Me parece que las dos discusiones de un grupo y del otro son mas o menos así: hay un grupo que tomó la función correspondiente a los piojos que era esta (escribe la fórmula en el pizarrón) y le dio valores y empezó a ver que para el cero me daba veinte (hace cuentas en el pizarrón), supónganse que yo tengo el veinte por acá [Escribe en el pizarrón], y después dijo: para uno la imagen no se correspondía con el gráfico, por que para uno de acá, ¿Cuánto les daba a ustedes la cuenta?**

La docente tiene que reorganizar las explicaciones de los alumnos para que no se pierda el objetivo de la clase de debatir estrategias y se diluya en una discusión de un grupo de alumnos. Así produce una **ampliación**, esto es, una **reorganización de uno de los argumentos con algunos elementos que no estaban originalmente** con su propia observación de la fase grupal de trabajo. Pero estos elementos de todos modos serán aportados por los alumnos. La docente los convoca a comunicarlos. Es así como vemos que la ampliación tiene el aval de sus productores.

20.-Al. 24 y pico.
21.-Doc. Veinticuatro y pico dice ella. En cambio, en la función de los piojos, para uno ¿ustedes sabían cuanto daba?
22.-A. No, para el quinto día.

El alumno da cuenta de que en este grupo se había llegado a la conclusión de que solo se podía saber el número de piojos en días múltiplos de cinco. De este modo el trabajo producido con contexto sigue funcionando de control y como dominio de conocimiento, aún cuando ya se habían recuperado las funciones en el pizarrón y se habían dado los dominios de las variables. La docente se mantiene anclada en la producción del grupo para continuar la confrontación. Notemos que podría haberlos convocado a despegarse del contexto y tomar las relaciones que ya circulan en la clase. Sin embargo no lo hace. Es en estos casos en los que destacamos la intención docente de recuperar las producciones de sus alumnos y pensar con ellos a partir de ellas.

23.-Doc. Y para el quinto día ¿cuánto daría la función?
24.-Al. (varios). 60.
25.-Doc. O sea yo ponía acá cinco, cinco dividido cinco uno, tres a la uno tres, por veinte sesenta. Entonces, **yo escuché a Agustín que decía: "¿y no porque, viste que para cinco no me dio sesenta?". Eso es lo que argumenta el grupo de allá. Que tiene una**

función graficada, y que resulta que para cinco le tendría que dar sesenta y no le dio, eso es lo que dicen ellos.
26.-Al. Sí, pero podés tomar el día 5 como el paso 1. Tomar el día 10 como el paso 2.
27.-Marianela (enojada y elevando la voz) ¡Pero la equis son los días! ¡No los pasos!. ¡Si tomás equis igual a 5 eso significa que pasaron 5 días!

Esta intervención de Mariela da un giro a la discusión organizada trayendo a la luz que lo que está en cuestión es "quién es la variable independiente en el gráfico" y "quién es la variable independiente en la fórmula producida en clase". Esto da lugar a la próxima ampliación de la profesora.

28.-Doc. A ver, importantísimo lo que dijeron ahora. **Estamos discutiendo lo que consideramos en la variable independiente,** ¿está bien? Entonces, hay un grupo que dice: "mirá, la equis mide los días", entonces yo estoy tomando los números de días, esta función no se corresponde con la fórmula que yo tengo ahí.
29.-Rocío. **Tendría que ser y en función de "x sobre 5".**
30.-Doc. ¡Exacto! Para que esta función se corresponda con la gráfica que tiene, la variable independiente tendría que tener a equis sobre cinco. Si yo en la variable independiente tuviera equis sobre cinco, la función se correspondería. Es como si yo a esto lo llamara "la ene". La gráfica que está dibujada es veinte por tres a la "ene". ¿Se ve la diferencia?
31.-Al. (varios) Sí.
32.-Doc. **¿Todo el mundo ve lo que están diciendo los dos grupos?** (muchos asienten).Entonces la gente que asignó esta gráfica con la situación de los piojos, en realidad acá no está tomando equis sino que está tomando equis sobre cinco. ¿Correcto? ¿Si? ¿Los demás entienden las discusiones de los dos?
33.-Al. (varios) Sí.

La puesta en común continúa con otros comentarios referidos a otras gráficas. En esta última parte del extracto, en la línea 28 encontramos otra ampliación de las explicaciones de los grupos, en este caso, poniendo en evidencia que podrían considerarse dos variables independientes. Las intervenciones de la docente están ligadas, están muy emparentadas a las producciones de los alumnos. Las intervenciones de los alumnos son sustantivas, entendemos que porque se apoyan en un trabajo escrito que fue el resultado de un debate en pequeños grupos lo que les da seguridad en sus producciones. La docente trata de aclarar sus posiciones, de a ratos parece el oficio de un traductor. Entendemos que el efecto de esta modalidad de trabajo es que los alumnos tienen siempre un papel principal en todo lo que está ocurriendo en clase. Es un escenario de trabajo donde los alumnos son actores principales. Sin embargo la docente no deja de comandar la clase. Para dar cuenta de este comando observemos que en la línea 32 la docente realiza una interpretación de la razón que posiblemente hayan tenido los grupos que eligieron a esa gráfica como la gráfica de los piojos señalando qué lectura haría viable tal decisión, qué interpretación haría factible que esta gráfica fuera la de los piojos. Privilegia de este modo la comunicación de las interpretaciones de los alumnos a indicar que esta elección es errónea y descartarla.

7.4.3 Jerarquización – Habilitación.

En el conjunto de diálogos que ya hemos transcripto vemos que la docente marca el papel de la comunidad aula y también de los alumnos como productores, sujetos intelectuales, instalando una dinámica de intercambios con características de debate entre ellos. Esto es, por un lado, una forma en la que el docente transmite a los alumnos qué se espera de ellos. Por otro lado, para la investigación, es una forma de indicarnos qué es lo que la docente cree que sus alumnos están en condiciones de producir.

En el diálogo 7.I de construcción del cuadrado podemos señalar algunas expresiones de la docentes tales como "cuidado Agustín que el otro día me salvaste" o, en el mismo párrafo (línea 1) "me tienen que ayudar a decidir qué es esta figura". De este modo la docente está señalando una posición de producción intelectual y valiosa depositada en los alumnos. En el mismo diálogo remarca que "Marianela apoya la decisión de Agustín" (línea 19) lo que adquiere otra connotación pues los alumnos quedan habilitados a la producción sin la presencia explícita de la docente. También en la línea 30 apuntamos en la misma dirección la observación de la docente "Organicémonos porque estamos dando distintas variaciones y son todas buenas".

En los diálogos siguientes de este capítulo hay muchos ejemplos del mismo tenor. En el diálogo 7.IV en la línea 7 la docente le pide a la alumna que les cuenta a sus compañeras cuál ha sido su forma de pensar el problema. En el diálogo 7.V. (línea 1) la docente expresa "ustedes me dicen que no hay como comprobar ni refutar ni discutir lo que ella dice" lo que en realidad es una interpretación de los propios comentarios de los alumnos que no pueden aportar datos que confronten con la posición de Florencia. Finalmente en el diálogo 7.VII luego del comentario de Marianela en la línea 27, la profesora sanciona en la línea 28 la trascendencia de su observación ("A ver, importantísimo lo que dijeron ahora. Estamos discutiendo lo que consideramos en la variable independiente, ¿está bien?").

Aquí vamos a presentar otro modo de situar a los alumnos en el lugar de productores de conocimiento. El diálogo entre la docente y la clase tiene como propósito presentar las similitudes y diferencias encontradas por los alumnos entre las funciones 3^x y $(1/3)^x$.

Diálogo 7.VIII. Docente - comunidad clase. Problema de búsqueda de relaciones entre dos gráficas.

Al. Tres a la x es creciente y la otra es decreciente.
Doc. ¿Qué otras encontraron?
Al(Bruno). Son simétricas.
Doc. **¿Qué entienden los demás cuando Bruno dice son simétricas?**
Al(Yanina). Una hace así y la otra al otro lado.

La Docente hace pasar a Yanina al pizarrón para que dibuje en él lo que acaba de hacer en el aire con sus manos. Mientras tanto un alumno sostiene que las gráficas tienen la misma ordenada. La profesora insiste en revisar el concepto de simetría que ya había sido elaborado como conocimiento a propósito de la enseñanza de la función cuadrática. Bruno tiene así un lugar de productor de conocimiento y sus compañeros son convocados a explicitar la interpretación que hacen de la idea de simetría. La docente parece considerar que no hay un significado compartido del término y convoca a los alumnos a desarrollarlo. El modo de plantearlo, haciendo énfasis en la interpretación (pregunta "qué entienden ustedes.." y no, por ejemplo, "qué es simetría") implícitamente da lugar a una diversidad de significaciones posibles. Esta es otra condición que "abre" la palabra en la clase para alojar múltiples ideas y significados.

Doc. **Los demás ¿me podrían explicar a qué hace referencia Bruno con la simetría?**
[Hablan varios]
Al. Son opuestas.
Al. Contrarias.
Doc. ¿Qué cosa es opuesto o contrario?, **no entiendo eso**. Suty dice que son simétricas con respecto a un eje, el eje y. Y entonces ¿qué quiere decir eso?
Al. Que para ésta lo que vale en uno para la otra va a valer en menos uno.
Doc. O sea Si yo tomo el uno acá vos decís que la imagen ¿cuánto vale?
Al. Tres
Doc. Entonces ¿cómo sigo ahora?
Al(Suty). Entonces en la otra si tomo –1 la imagen de la otra es 3.
Doc. Miren lo que dice Suty, ella dice que si esta en 1 vale 3 la simétrica en –1 vale 3. Por ejemplo para 2 esta imagen es 9 y en la otra, según Noelia eso también pasa, pero para –2 **¿y como podría yo escribir en forma genérica lo que ustedes están escribiendo en esta tabla?**

Al. Que para el opuesto de x va a valer lo mismo.
Doc. **Entonces vos decís que** si acá yo pongo que para "x" vale algo...
Al. Entonces en la otra vale lo mismo para "-x".

La profesora está propiciando una generalización que ponga en funcionamiento la relación que los alumnos encontraron. Se encarga de convocar a otros alumnos y no solo al productor inicial de la idea a organizarla. Utiliza expresiones como las que resaltamos en negrita que marcan el papel de productores de los alumnos, aún cuando es ella quien tiene que acompañar el proceso propiciando el uso de variables que sustituyan los ejemplos que los alumnos aportan. Pero resulta interesante que cuando ella ofrece el nombre de la variable los alumnos toman posición y elaboran el enunciado.

7.4.4 Regular la asimetría

Hemos mencionado en el Marco Teórico que la comunidad aula que concebimos sostiene algunas características de la comunidad de matemáticos (por ejemplo porque se entiende como una comunidad de producción de conocimiento) y que en ella se concibe al docente. Para que estas dos situaciones no entren en contradicción el docente necesita regular su asimetría de conocimientos. Este control es permanente y revisarlo ahora a la luz de algunos diálogos nos permite precisar sus características y su alcance.
En el próximo diálogo, los alumnos están explorando con gráficas de funciones exponenciales. El problema que los ocupa es el Nº 4 donde analizan para un conjunto de funciones exponenciales las perturbaciones que ellas sufren cuando se las multiplica por una constante. Si bien el problema completo tiene otras cuestiones que se trataron en el capítulo 6, los alumnos en este escenario están analizando varios casos particulares de la función $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ para distintos valores de k de forma tal de poder luego responder a esta consigna.

Al multiplicar a la función $y = a^x$ por un número real $\boldsymbol{k}$ distinto de cero se obtiene la función $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ ¿mantiene la función $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ las mismas características? Detalla similitudes y diferencias y busca sus causas.

Los alumnos exploran con los valores de k propuestos: k =2, -1, 0,5, conjeturan y aportan explicaciones. En este contexto de trabajo se mantiene el siguiente diálogo entre alumnos y profesora.

Diálogo 7.IX. Docente-grupo de alumnos

Doc. ¿Qué dicen ustedes?
A3. Si, si.
A. No lo grafiqué pero tengo idea, es lo mismo pero...
Doc [a otro]. Pero pará, vamos con él. Esta función es 2^x, ¿no?... Si multiplico esas imágenes por cero coma cinco, ¿qué te parece que vamos a obtener?
A. **Va a ir un poquito más arriba.** (el alumno razona gráficamente)
Doc. ¿Un poquito más arriba?
A. Para mi, sí.
Bruno. Pero con cero coma cinco **tiene que decrecer**.
Doc. ¿Tiene decrecer quién? ¿Qué es lo que...? Claro, pero **no entiendo qué es lo que vos le llamas decrecer.**
(Bruno queda pensando mientras tanto la profesora pregunta por el recurso gráfico a Cecilia que había mencionado la gráfica antes)
Doc. Y entonces Cecilia vos como usarías la gráfica...?
Cecilia. Ehmm...
Bruno. ¿Qué, pero usted dice que así cambia a una cosa así?
(la profesora se abstiene de dar respuesta a Bruno y deja que intervenga otro alumno)
A. Ahora la **ordenada al origen** estaría en uno coma cinco
Doc. (interrumpe)¿En uno coma cinco? **¿Por qué** en uno coma cinco?
A. Porque dos a la cero uno, por cero coma cinco igual a... ah no, cero coma cinco.
[tener que explicar le permite comprender su error de cálculo]
Doc. Cero coma cinco.

Marcamos un recurso discursivo de la docente que consiste en pedirles a sus alumnos que ahonden en una explicación "para que ella pueda entenderla". El alumno necesita formular una explicación, y así se contribuye a instalar el concepto de comunidad aula en esta dimensión de producción de ideas en forma colaborativa. Unos producen pero explican al mismo tiempo y la docente, como integrante de esta comunidad de producción también pide que se le explique para comprender y no para sancionar. Es un corrimiento de un lugar tradicional en el cual el docente es el referente que sanciona sobre aquello que es correcto de aquello que no lo es. En este caso en cambio necesita que se le explique. Con esta pauta el referente de una fundamentación o explicación es tanto el grupo de compañeros como la misma docente.

El plano de igualdad que marca de este modo la docente no es menor, y parte de un contrato didáctico específico para esta situación de enseñanza. En este escenario no se supone que el docente comprende todo aquello que se dice, se formula, se imagina (más allá de que la situación sea real o ficticia, la comprensión del docente puede surgir o no, y en tal caso mostrarse u ocultarse, estamos hablando de los supuestos de trabajo que manejan los alumnos). Esta parece ser una novedad para los alumnos y una exigencia para los docentes en tanto se modifica un modo instalado en la cultura escolar según el cual el docente posee todas las respuestas posibles.

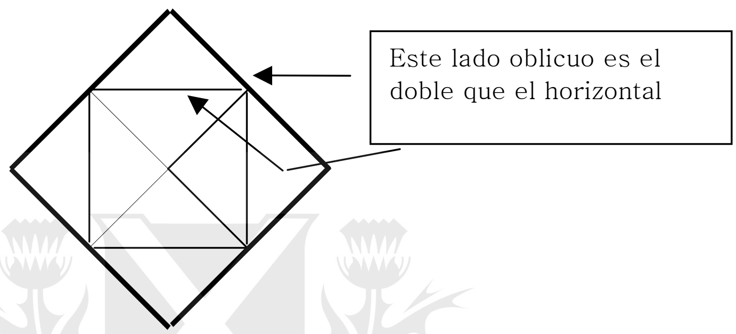
7.4.5 Construcción De Un Debate.

Los alumnos tienen una configuración del escenario de clase en el que el debate puede parecer ajeno. Las prácticas escolares instituidas suponen un ordenamiento de tareas y actividades; un mundo donde el docente comanda las actividades que se desarrollan, da apertura a temas a tratar, inicia los diálogos cuando estos son pertinentes. El alumno es invitado a participar, es convocado a entrar en el juego. Si ese juego es el del debate ocurre que el alumno necesita desprenderse de la conducción del docente y tomar las riendas del juego coptando el escenario de la clase. Tal cambio en los roles no se opera instantáneamente. ¿qué significa un debate en el aula? Entendemos, como lo hemos explicitado en el Marco Teórico que la constitución de un debate requiere de una maniobra importante por parte del docente, una convocatoria fuerte y sostenida que deberá romper con tradiciones que todas las disciplinas escolares evocan junto con la matemática.

En los próximos dos últimos diálogos que vamos a analizar hay una evidente gestión de la docente para configurar un escenario de debate. La docente tomas los aportes de los alumnos y los moldea para que ellos mismos vean, comprendan, avizoren cómo podrían sostener un debate utilizando sus formulaciones. En estos casos las fundamentaciones previamente elaboradas (en la fase de trabajo grupal) son el pie de apoyo de las posiciones que cada uno tome. "Bruno te pregunta si...." "Florencia te dice que......" "Kevin piensa lo contrario"...., son algunas de las formas que adopta la docente en su locución. En estas intervenciones notamos que la docente señala a sus alumnos que sus producciones, sus ideas, sus preguntas, sus conjeturas pueden entrar en diálogo con las propias de un compañero, pueden inquirir a otro, no ya el docente sino un par, pueden confrontar con la producción de un compañero, pueden servir para sostener la conjetura de otro estudiante. Inicialmente los alumnos están de todos modos dialogando con el docente y no exactamente entre ellos. Es allí donde el docente gestiona su clase devolviendo sus intervenciones y pidiendo a otros alumnos que se hagan eco de ellas. Así va mostrando la dinámica del debate en acto.

Diálogo 7.X. Docente-grupo de alumnos. Debate en torno a las áreas de los cuadrados en el primer problema de cuadrados.

1.-A_1. Profe, este lado ¿es igual a este?
2.-Doc. Y a vos ¿qué te parece?
3.-A_1. Que no.
(Ruido)
4.-A_1. Este lado es el doble.
5.-Doc. El doble de qué?
6.-A_1. De éste (ver figura) porque, si por ejemplo este lado vale cuatro, este otro lado vale ocho.



7.-A_2. La diagonal lo corta por la mitad.

[Diálogo entre los alumnos A_1 y A_2 que el ruido en aula no permite recuperar]

8.-Doc. Pará pará. **El te preguntó** si este lado es el doble de éste.
9.- A_2. El quiere medir la hipotenusa.
10.-Doc. **Ustedes le querían explicar** por qué el área es el doble **y él les dice** que el lado del nuevo cuadrado es el doble. **Ustedes ¿qué dicen?**
11.- A_2. Sí, es el doble.
12.-Doc. **Lo que él te dice** es que a él no le da que el área del nuevo cuadrado es el doble si es que el lado es el doble. **Eso es lo que él te dijo**.
13.- A_2. Sí que te da el doble del área.
14.-Doc. ¿Sí? Inventate un valor.
15.-A_1. Si el lado es 4. El área es 16. Con el doble, 8, el área de 64.
16.-Doc. No es el doble, eso es lo que dice él. **Ahora ustedes rebátanle lo que dice él.**
17.- A_2. Sí es el doble. Porque las diagonales de esto te va a marcar la mitad. Tiene razón él.
18.-Doc. **Ustedes ¿le creen?**
(Salta en su banco el alumno A_2)
19.- A_2. ¡No es el doble! ¡Este lado no es el doble de éste!
20.-Doc. **Él dice que este lado es el doble de éste y que por lo tanto no es el doble de área. ¿eso es verdad?**
21.- A_1. Por lo visto parece que sí.
22.-Doc. ¿Cómo es por lo visto?
23.-A_1. Acá vos te tomás el rectángulo.
24.-Doc. Justamente si esto es un cuadrado, éste es el lado, y este lado tiene que ser igual a éste? (no disponemos de la figura de este comentario)
25.- A_2. La hipotenusa va a valer más que los lados al cuadrado.
26.- A_2. Tomá estos triangulitos
27.-Obs. Son algo más ¿no? Son triángulos rectángulos.

28.-Doc. **Vos dijiste algo más de este triángulo. Vos decís que ésta es la hipotenusa y que éste es el cateto y él te está diciendo que el cateto mide lo mismo que la hipotenusa.**
29.- A_2. ¡No, imposible!. El cateto no puede ser igual a la hipotenusa.

Los alumnos discutían inicialmente una relación entre los lados del cuadrado original y los del cuadrado del Paso 1. La docente, requerida por los alumnos para validar una de las posiciones, intencionalmente devuelve los comentarios y preguntas, de un alumno a otro alumno como si no estuvieran dirigidos a ella. Los alumnos entran en el juego propuesto por la docente y luego de un par de intervenciones de la profesora están efectivamente realizando un debate (líneas 22 y 24) que es permanentemente mediado por la docente ya que se puede ver que las intervenciones de los alumnos van acompañadas siempre de comentarios de la docente. De esta forma la docente va comunicando a sus alumnos cómo podrían estar organizando una discusión-debate de ideas entre ellos, lo pone en acto para que los alumnos se involucren en esta dinámica de diálogos y lo realicen. Con este fin la profesora va **reconstruyendo** las afirmaciones de unos y otros para que todos los integrantes del grupo tengan en claro qué es lo que se está discutiendo y cuáles son las diferencias entre unos y otros. **Habilita** el diálogo entre los alumnos y los convoca a la confrontación ("rebátanle ahora lo que él dice" en línea 15).

Luego de pasar por otros grupos la docente vuelve a este grupo de alumnos y mantiene un segundo diálogo que transcribimos pues aparecen varios elementos que hemos señalado hasta aquí. Los alumnos están tratando de escribir una fórmula para el paso 17.

Diálogo 7.XI. Docente-grupo de alumnos. Debate en torno a las áreas de los cuadrados en el primer problema de cuadrados.

1.-Doc. Independientemente del valor que vos elegiste. **Ellos fueron escribiendo lo que les daba con respecto a los pasos. A ver Guillermo explicales lo que hiciste. Como fueron escribiendo a cada área según lo que valía la anterior.**
2.-A(Guille). Primero el doble, después el cuádruple, tercero el óctuple. El cuarto 16 veces más grande y el 17 ese número que está ahí.
3.-Doc. **Vos tenés que explicarles qué hiciste para llegar**, ¿vos hiciste A^{17} para llegar?
4.-A(Guille) No, ellos lo hicieron.
5.-A_1. No, no te da lo mismo.
6.-Doc. Pero ¿Qué es A?
7.- A_1. El área.
8.-Doc. Entonces ¿vos estás manipulando con el área?
9.-A_1. Ah no pará uno me da con coma y el otro con punto.
10.-Doc. Eso es porque la calculadora utiliza punto donde nosotros utilizamos coma.
11.-A_2. Entonces $A.17$

12.-Doc. **A ver ustedes tienen que rebatir lo que está diciendo cada uno si no están de acuerdo. El dice que al área del primero lo multiplica por 17 no hace todas las cuentas que vos dijiste.**
13.-A_2. Sí, sí, lo eleva a la 17.
14.-A_3. No, eso es otra cosa. Yo acá hacía el cuadrado del área.
15.-Doc. Pero fijate que vos acá tenías mal sacada la hipotenusa pero la hipotenusa no era la que vos habías sacado, entonces no podías usarla. Pero **pará, ¡estamos en un problema ahí!**
16.-A_1. ¿Qué problema? ¡Jaja! yo no tengo ninguno.
(Risas......)
17.-Doc. **Y él te está planteando algo que te hace agua lo tuyo entonces vos tenés que defender lo tuyo. A ver vamos a reproducir así: ustedes hasta el paso 4 venían bien.**
18.- A_1. Siempre es el doble del que sale resultante del otro.
19.-Doc. Ajá
20.- A_2. Partiendo del primero
21.- A_3. Entonces hacen los mismo que nosotros
22.- A_2. Pero en un paso
23.-Doc. Pero ¿por qué no multiplican el área inicial al original por 17?,
24.- A_3. A mi no se me ocurrió.
25.-Doc, Pero ¿van a llegar al área?
26.- A_1. Sí, para mi sí.
27.-Doc. Mmmmmm. El ya dudó.
28.- A_2. ....(no se escucha el audio)
29.-Doc. Él dice que si a esa área A la multiplica por 17 va a llegar al área, lo mismo que ustedes.
30.- A_1. Para mi sí.
31.-Doc. ¿Por qué?
32.-A_2. El cuadrado del más chiquito. En el paso 17 lo elevan 17 veces.
33.-Doc. Pará, **vamos a lo que vos habías dicho, vos sos el responsable que lo hiciste ver a él que acá estaba el doble**, por los cuadraditos que contabas. En el paso dos era el doble. Ahora este de acá, ¿cómo va a ser respecto a este? Teniendo en cuenta los cuadraditos que contaste.
34.- A_1. Cuatro veces el original
35.-Doc. Bueno, está bien. Y ahora éste? Si yo sigo? Este nuevo, como va a ser?
36.-A1. Ocho veces
37.-Doc. **Porque según tu mecanismo vos vas contando los triangulitos chiquititos. Entonces** el primer paso es el doble, el siguiente es el cuádruple, el siguiente es el octavo. ¿Y el paso que viene?
38.- A_1. va a ser 16.

La docente oficia de moderadora de las ideas que están elaborando los alumnos, está al mismo tiempo organizando un trabajo que sea sostenido por todo el grupo y - sumado a esto - propiciando el debate. El contrato con los alumnos nunca cae, aún cuando un alumno le señala que él no tiene ningún problema (línea 16) marcando, creemos que no va a tomar todos los señalamientos docentes, ni va a participar en todos sus intentos por problematizar alguna cuestión y aún así sigue participando de la actividad que la docente le propone.

Para oficiar este debate la docente realiza permanentemente el ejercicio de reconstruir lo que se ha dicho hasta ese momento, tomando a su cargo la nitidez y precisión de las ideas puestas en juego. Su objetivo es, permanentemente, explicar con claridad qué ha hecho cada uno de los alumnos para que el otro lo pueda entender. De esta forma mantiene una notable centración en lo intelectual.

La docente señala a todo el grupo que hay dos cálculos diferentes que se están apoyando en distintas observaciones o en distintas hipótesis. No corrige, ni objeta ninguno sino que lo pone al análisis del grupo, este análisis tiene la forma del debate (y de este modo también está regulando su asimetría).

Incluso en la última intervención que marcamos (línea 37) la docente realiza una reconstrucción final que ya no somete al análisis del grupo y que tiene la intención de reconstruir para el resto cuál es la estrategia de este alumno que cuenta los triangulitos.

7.5 SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos presentado un conjunto de intervenciones docentes que fueron observadas en clase y que entendemos configuran una forma de gestionar la emergencia de la fundamentación. Nuestra presentación es - así lo deseamos - un aporte al análisis del rol del docente en el proceso de emergencia de esta práctica. Hemos tomado ejemplos de intervenciones que se repiten a lo largo de toda la observación de clases con distintas frecuencias. No estamos interesados en calcular la frecuencias de tales intervenciones sino que hemos intentado descubrir, recortar y analizar un conjunto de posibles intervenciones. Volvemos a mencionar que en el taller no habíamos acordado esta modalidad de intervenciones y en tal sentido creemos que ellas son observables para la investigación dando respuesta a qué posibles configuraciones puede tener la gestión docente de los razonamientos matemáticos en clase y qué operacionalización pudo surgir a partir de una cierta configuración de la intencionalidad docente desarrollada durante el taller. Seguramente muchos de estos rasgos pueden emerger ante otro tipo de impronta del trabajo. Hemos decidido conceptualizarlos en el análisis porque creemos que dan lugar a un tipo de actividad especial en el aula concibiendo a los alumnos como sujetos productores de conocimiento.

Hemos mostrado en primer lugar aquellas intervenciones destinadas a mostrar **sentidos posibles que puede asumir la fundamentación:**

- propiciando la construcción y desarrollo de las ideas
- sostén de la verdad
- sistematización del conocimiento construido.

Vemos que estas funciones han sido señaladas por investigadores de la didáctica para la demostración y creemos que en la medida que los alumnos tienen más oportunidades de elaborar fundamentaciones estarán más cerca de comprender estos sentidos para ellas y acercarse así a un dominio de algunas formas del razonamiento matemático posibles en la escuela.

En segundo lugar hemos distinguido y analizado algunas intervenciones docentes que organizan un contexto propicio para la emergencia de la fundamentación: en la **reconstrucción** el docente amalgama las producciones de los estudiantes con fines diversos. De todos ellos el que hemos encontrado con mayor frecuencia es el de mantener a todos los alumnos en conocimiento de las producciones de algunos compañeros para así sostener el diálogo de toda la clase, pero también hemos encontrado otros fines tales como propiciar el debate, la confrontación, o incluso señalar el estatuto de productor de conocimiento. Distinguimos la **ampliación** de la reconstrucción como aquella intervención en la cual el docente agrega algunas especificidades no señaladas por los alumnos y hemos mencionado que en los ejemplos que hemos encontrado notamos que la docente pide conformidad a los alumnos en cada una de ellas. Entendemos que es una forma de no tomar distancia de sus alumnos para así dar fuerza a la comunidad aula. Señalamos también la **jerarquización-habilitación** como aquellos recursos discursivos que enfatizan el rol de productores de conocimiento por parte de los alumnos. Mostramos algunas intervenciones donde el docente debe **regular su asimetría** para amalgamarse a sus alumnos y promover sus propias explicaciones y, finalmente hemos dado cuenta de un conjunto de intervenciones por medio de las cuales el docente organiza la **construcción de un debate** entre sus alumnos.

Hemos ido señalando a lo largo del capítulo dos aspectos respecto de la caracterización teórica del trabajo docente que nos interesa subrayar.

La primera se refiere a la distinción entre la construcción de una intención y la operacionalización de la misma. Efectivamente –lo hemos dicho una y otra vez- el espacio de taller constituyó un ámbito en el que los profesores participantes pudieron repensar la actividad matemática en el aula haciendo énfasis en la fundamentación. Esta discusión contribuyó a que ellos desplegaran en la clase modos en los que nosotros pudimos encontrar numerosos elementos que componen ese escenario de prácticas fundamentadas. Esos modos –pensamos- no pueden atraparse en sí mismos a modo de un *texto del docente generador de fundamentaciones*. Dicho texto no existe como tal. Sólo puede pensarse el discurso del docente como una recreación específica que es consecuencia de la intención, en este caso construida como una interacción entre la perspectiva de cada docente –con sus concepciones, historias, formación- y las ideas elaboradas en el espacio compartido de trabajo que se ha generado en el Taller.

La segunda cuestión se refiere a que hemos interpretado que algunas de las intervenciones del docente pueden pensarse como retroacciones del milieu: aquellas en las que el docente usa relaciones producidas por los alumnos en el curso de su trabajo para confrontarlos a tomar decisiones sobre la validez de una relación acerca de la cual los alumnos se preguntan.

El análisis que llevamos adelante en este capítulo toma los diálogos de clase buscando intervenciones puntuales que nos apuntan un significado en el contexto en el que se emiten. Es por eso que hemos llamado **micro análisis** a todo este trabajo. Son respuestas a la pregunta acerca de ¿cómo interviene un docente frente a las producciones, expresiones y o preguntas puntuales de sus alumnos?, ¿cómo puede un docente monitorear los procesos deductivos de sus alumnos?¿cómo seguirlos o interpelarlos? (estas preguntas han sido planteadas en la introducción de este trabajo). Las intervenciones que hemos destacado pueden mirarse ahora en conjunto para revelarse como una primera descripción de una posible gestión docente. Este análisis nos acerca a confirmar la hipótesis de investigación que establecimos al dar comienzo a este proyecto[146]:

> El contexto oral de producción de conocimiento iniciado a partir del trabajo en pequeños grupos y coronado por discusiones globales donde se propicien debates para la confrontación de las diferentes producciones es un escenario que abona a la emergencia de la fundamentación. Durante todo este proceso las intervenciones docentes - tanto aquellas que entendemos son retroacciones

[146] Referimos al lector al Marco Teórico donde se encuentra la versión completa de la hipótesis de trabajo.

como parte del milieu, como las interacciones alumno-docente que se entrelazan con las del alumno-milieu - serán elementos cruciales para la emergencia de la fundamentación en la medida que el docente pueda autorregular su asimetría de conocimientos.

En el próximo capítulo avanzaremos en un análisis de la gestión del docente que nos permitirá consolidar y precisar algunas de estas conjeturas reunidas en la hipótesis de trabajo de esta investigación.

8. EL DOCENTE Y LA EMERGENCIA DE LA FUNDAMENTACIÓN. MEZZO ANÁLISIS.

8.1 MEZZO - ANÁLISIS

El micro análisis que nos ocupó en el capítulo precedente nos permitió tomar conciencia de la complejidad del trabajo de un docente que tiene la intención de involucrar a los alumnos en un juego de producción de conocimiento. Hemos analizado algunas intervenciones puntuales en función del significado que portan para la enseñanza de la fundamentación y de las condiciones de contexto que propician y que fueron mencionadas en el Marco Teórico.

Continuaremos nuestro análisis de diálogos pero ahora en una escala mayor que hemos decidido llamar **mezzo – análisis.** Ubicaremos el foco esta vez, por un lado, en las cuestiones que en dichos diálogos se van tratando, más específicamente cómo el docente va intercambiando su foco-interés entre los aspectos conceptuales de la función exponencial y los aspectos referidos a las características de la fundamentación, entramando unos en otros.
Por otro lado estaremos observando la gestión de ideas que el docente realiza con respecto a las producciones de los alumnos. En tal sentido analizaremos en qué medida el docente interpela las producciones de los alumnos, las enriquece, las devuelve, las confronta o las cuestiona. Reutilizaremos eventualmente las características ya descriptas en el capítulo anterior como soporte del actual análisis.

Con este propósito las intervenciones docentes serán miradas en conjunto y no en forma aislada como en el capítulo anterior. Este análisis se apoya en otra consideración de la **variable tiempo.** Los diálogos que analizaremos tienen en su mayoría otra longitud y para su análisis detectaremos unidades menores dentro de tales diálogos que quedarán definidas por el objetivo local que van persiguiendo y que nos permiten ver cómo se va organizando el tratamiento de la cuestión toda. Llamaremos a esas unidades "**episodios**".

Sostenemos aquí también un conjunto de preguntas que ya hemos tenido presentes en el capítulo anterior: ¿cómo entra en diálogo el docente con las producciones de sus alumnos?

¿qué tipo de interacciones son aquellas que pueden estimular y sostener las fundamentaciones que los alumnos puedan producir a propósito de una cuestión matemática? Veremos que el mezzo análisis nos dará un conjunto de nuevas respuestas que completan y amplían las que hemos ya ofrecido en el capítulo anterior en función del tratamiento del tiempo que tiene este capítulo.

La variable tiempo tiene en este análisis dos características que queremos señalar. Por un lado el análisis toma diálogos de mayor duración, los que se producen durante puestas en común participando en ellos toda la clase. Por el otro veremos que la docente realiza un determinado conjunto de intervenciones que no solo se centran en los elementos emergentes en ese instante del diálogo sino que también hacen referencia:

.- a cuestiones que han emergido durante el transcurso de dicho diálogo pero que no son inmediatas,

.- a preguntas y producciones que ocuparon la atención de los alumnos en otros momentos, en otras clases.

Habrá de este modo situaciones de evocación que darán cuenta de la riqueza de concebir una gestión de clase que incluya como **variable** el **tiempo didáctico**.

Mostraremos una colección de diálogos que, creemos, dan cuenta de la posibilidad de abordar con los alumnos un problema de neto corte matemático y de construir junto con ellos un repertorio de explicaciones matemáticas que consolidan en conjunto una fundamentación elaborada por toda la comunidad aula.

8.2 RECONSTRUCCIÓN GLOBAL

En el capítulo anterior desarrollamos la idea de reconstrucción local. El docente en esa situación toma comentarios, producciones de los alumnos, los hilvana en un relato, generalmente para que otros (tal vez los integrantes de un grupo o toda la clase) se apropien del desarrollo logrado o del conjunto de conocimientos ya aceptados y se apoyen en ellos para continuar desarrollando sus ideas. La reconstrucción mencionada como local toma como insumos las afirmaciones que se producen en el contexto del mismo diálogo o, eventualmente de un diálogo que se sostuvo un momento atrás, pero siempre durante la misma clase. Se apela a una **memoria local**, en el sentido de que todo se ha desarrollado durante la clase. En este apartado veremos otras **reconstrucciones** que llamaremos **globales** que apelarán a una memoria de los estudiantes, ya no local, en tanto retoma producciones de otras clases. La idea de reconstrucción global puede inscribirse en las situaciones de evocación ("de rappel") que propone Marie-Jeanne Perrin Glorian (1993). Como mencionamos en el Marco Teórico, estas situaciones apuntan a fortalecer los procesos de despersonalización y descontextualización de conocimientos. Se trata de evocar una o varias situaciones ya tratadas sobre un tema y de reflexionar sobre ellas. Los alumnos tendrían a través de estas instancias la oportunidad de volver a discutir el sentido y el estatuto de los conocimientos en juego en las situaciones realizadas y de integrar una serie de problemas en un proceso que construye a su vez un nuevo sentido para estos conocimientos.

Diálogo 8.I. Puesta en común. Confrontación de todas las producciones

La docente comienza haciendo una revisión de los problemas de los piojos, la luminosidad y las bacterias con todo el grupo. Hace una puesta en común con las estrategias que los alumnos han ido utilizando para tratar el modelo exponencial en cada problema. Transcribe en el pizarrón las tablas que muchos habían producido. Compara las tres tablas producidas. En tal escenario notamos que:

.- Pone especial énfasis en la posibilidad en cada problema de producir una fórmula (para lo cual recuerda una "cuenta rápida")

.- Toma el caso de la luminosidad y de las bacterias llegando junto con sus alumnos a la conclusión de que en cualquier nivel de profundidad y en cualquier momento se pueden conocer tanto la luminosidad como la masa de bacterias.

Las intervenciones de los alumnos apenas se escuchan en el audio pero la docente va repitiendo en voz alta y clara lo que cada alumno dice. Lo transcribimos de ese modo.

Episodio 1. Comunicando a todos las resoluciones en cada problema

Diálogo	**Elementos de análisis**
1.-*Doc. Comenzamos. Vamos a situarnos en "los piojos", "la luminosidad" y "las bacterias" (escribe en el pizarrón). ¿Qué planteaba el problema de los piojos?*	Plantea la actividad situando la escala temporal en la que van a trabajar.

2.-A...	
3.-*Doc. Cuántos piojos iban creciendo durante el tiempo. ...* ***la variación****. Bueno les preguntaban por los piojos en algunos momentos determinados. Y ustedes ¿qué hicieron?* 4.-A. Primero hicimos una tabla 5.-*Doc. Aja hicieron tablas... ¿y* ***qué se veía en las tablas****?* 6.-A. Que cada 5 días se triplicaban. 7.-*Doc. Y* ***¿qué dato les daban?....*** 8.-A........ 9.-*Doc. Ajá que a los 10 días había 60 piojos.* 10.-A.... 11.-*Doc. El está reconstruyendo, ajá a los 20, 540 y vas multiplicando y esto lo hacías ¿cada cuanto?* 12.-A...	Recaba información. Plantea los elementos para reconstruir el problema: en las tablas hay que "ver" relaciones, es importante tener en cuenta cuáles son los datos.
13.-*Doc. Ajá . Primero vamos a ver qué nos pedían y* ***luego veremos otros cuestionamientos****. En la luminosidad ¿qué se les pedía?* 14.-A...	Anuncia que habrá una nueva actividad de análisis compartiendo el proyecto con los alumnos.
15.-*Doc. Ajá la luminosidad según la profundidad y ¿cuál era el dato?* 16.-A... 17.-*Doc. Aja y ¿qué hicieron?* 18.-A... 19.-*Doc. También una tabla.... ¿con qué datos contaban?* 20.-A...	
21.-*Doc. Ah, cada metro disminuye 20%. ....para 0 había 100 unidades lumínicas. Para 1 había 80, para ... (va haciendo la tabla en el pizarrón)...vieron que ustedes me dijeron cómo la generaban y habíamos discutido el otro día que en el primer metro me quedaba con el 80%, y ¿cómo la generaban? ¿****qué cuenta rápida*** *haríamos para pasar de los 3 metros con una luminosidad de 52 u.l. al cuarto metro?* 22.-............varias respuestas superpuestas...	Pide la génesis de la fórmula de la luminosidad.
23.-*Doc. ¿100 x $4/5^4$? Ustedes acá están utilizando la fórmula que hicieron, ¿qué fórmula hicieron? .....100 x $0,8^n$ .....o "a la x" está bien. Y si yo no tuviera esta fórmula ¿cómo haría* ***para hacerlo rápido*** *del metro 3 al 4?* 24.-Bruno. a 52 le calculás el 20% y se lo restás. 25.-*Doc.* ***Y ¿más rápido?*** 26.-Marianela. Directamente calculás el 80% que es lo que te queda, multiplicás por 0,8.	Insiste en su pedido para comunicar a todos las distintas producciones. Sabe que hubo distintas fórmulas por el uso de las fracciones y de los decimales.
27.-*Doc. Por eso los chicos trabajaron con fracciones y usaron el 4/5 porque vieron que perdían 1/5 en cada metro y entonces se quedaban con 4/5. Bueno, está bien* ***yo voy haciendo diferentes preguntas****,* ***¿qué variables relacionaban en esta situación?....*** 28.-A1. las bacterias y el paso de las horas.	Anuncia un nuevo planteo a partir de toda la información ubicada en el pizarrón: variables relacionadas
29.-*Doc. ¿Y cuál era el* ***dato importante*** *que acá les permitía relacionar las bacterias con el tiempo? ...que cada uno tenía el 25% de lo que tenía antes, y ¿cómo empezaban la tabla?* 30.-A...	Cuestiona sobre el dominio de variación de la variable independiente. Lo hace con

31.-*Doc. Aja en* $t=0$ *había 60gr. ¿y a la hora? (está escribiendo en el pizarrón y anota los valores de una, dos y tres horas) y ¿**ustedes pueden buscar cuánto va a haber en cualquier hora?***	una pregunta dentro del contexto del problema.

Hasta aquí han quedado escritas en el pizarrón tres tablas con algunos datos para cada problema y una fórmula: la correspondiente a la luminosidad de la laguna. La docente ha apelado a la evocación por parte de los alumnos de los elementos que considera necesarios para plantear la comparación entre los problemas y proponer nuevas cuestiones que surjan de la misma. Notemos que en este trabajo de evocación los alumnos tienen oportunidad de repensar rápidamente los problemas y actualizar las relaciones básicas que estuvieron en juego y que constituirán el punto de apoyo de la reconstrucción. Desde un punto de vista teórico podríamos decir que la docente organiza el *milieu* de los alumnos ayudando a que estén presentes las relaciones que considera necesarias para el trabajo que va a proponer.

Episodio 2. Contraste entre los dominios de pertenencia de las variables independientes en cada problema. Promoción de un debate.

Esta toma y organización de toda la información que los alumnos van aportando sobre las respuestas a las diferentes preguntas de cada problema es lo que hemos decidido llamar una **reconstrucción global** por dos razones. La primera es que estos problemas han ocupado la atención de los alumnos a lo largo de varias clases. En este sentido la docente está apelando a la memoria de trabajo de los alumnos[147]. A diferencia de esta situación en las reconstrucciones locales el docente se nutre de elementos que se han elaborado en la misma clase (al menos en su mayoría en cada proceso de reconstrucción. No estamos diciendo que le esté vedado apelar a conocimientos anteriores o a algún resultado visto tiempo atrás sino que lo que reconstruye es mayoritariamente producido en esa clase) En tanto la reconstrucción global no se nutre de lo inmediato, se trata de un proceso con una diferencia sustantiva con respecto a esta reconstrucción local. Los alumnos han tenido oportunidad de tomar distancia respecto de sus realizaciones anteriores y en esta convocatoria vuelven a revisar sus producciones, vuelven a pasar por un trabajo ya dejado atrás. Es por esto que pueden ver sus elaboraciones como ajenas, y en algún sentido tienen

[147] En el Taller hemos desarrollado el apartado 5.5.3 El tiempo en la escuela, precisando las anticipaciones docentes sobre la dificultad de llevar adelante actividades que contuvieran materiales desarrollados por afuera del módulo actual de clase.

que volver a comprender aquello que ellos mismos han dicho en otro momento. Tienen necesariamente que apelar a la producción escrita. Ellos mismos son otros en el momento de la reconstrucción. Se produce, entonces, una **despersonalización** de la producción para el propio alumno.

La segunda razón por la que hemos distinguido esta reconstrucción de las que hemos llamado "locales" es que en esta nueva organización el docente, trae a la escena del aula una serie de producciones anteriores bajo una consigna específica. No se trata de reproducir las preguntas que en su momento fueron formuladas y acopiar las respuestas que se dieron paso a paso sino de tener que elegir dentro de aquella producción un conjunto de enunciados a propósito de una nueva pregunta que está a la puerta del nuevo objetivo del docente que es traer un nuevo planteo sobre lo que ya se ha dicho. En el ejemplo que estamos analizando hay dos nuevos problemas: uno de ellos es el dominio de pertenencia de la variable independiente en el problema de los piojos y el segundo será el diálogo entre datos y modelización. Para ello una pregunta fundamental que ayuda a la reconstrucción es "qué variables estaban relacionadas en cada uno de los problemas".

Para desarrollar estos dos planteos aparecen preguntas un poco más específicas como las siguientes ¿en qué se distinguen o se asemejan las variables independientes de estos tres problemas? y este cuestionamiento generará otros: ¿qué efecto tienen la particularidad de cada variable en cada problema? ¿está relacionado con las fórmulas producidas? ¿con los datos de contexto? Veamos otro tramo del registro de clase.

31.-*Doc. Ajá en* $t=0$ *había 60gr. ¿y a la hora? (está escribiendo en el pizarrón y anota los valores de una, dos y tres horas) y ¿ustedes pueden buscar cuánto va a haber en cualquier hora?* 32.-A2. sí (varios alumnos). 33.-*Doc. ¿Y en la laguna?* 34.-A3. (varios) también. 35.-*Doc.* ***O sea son capaces de encontrar la masa de bacterias a cualquier hora y de la luminosidad a cualquier profundidad****, yo digo ¿pueden hacer lo mismo con los piojos?* ***¿Pueden encontrar el número de piojos para cualquier día?*** 36.-A(varios alumnos intervienen al mismo tiempo).	Queda instalado, siempre utilizando las tablas, que los alumnos pueden responder por la luminosidad y por la masa de bacterias en cualquier nivel de profundidad o de tiempo. Ambas variables son de tipo real. Plantea el mismo interrogante para los piojos y así da lugar a la confrontación.
37.-*Doc. a ver, levanten la mano, dos grupos dicen que sí. ... Ah, a ver* ***hay dos grupos que dicen que son capaces de encontrar la cantidad de piojos según el x que se me ocurra, Bruno dice que él no dice que se pueda o no.*** *A ver las chicas ¿cómo harían?*	Hace evidente para todos las distintas ideas y posiciones de cada grupo.
38.-A....	La docente aclara a todo la

39.-*Doc. Me mandan dividir la cantidad de días por 5....¿se entiende? ....* 40.-A4. 20x3$^{n/5}$ 41.-Doc. A ver, las chicas dicen que la fórmula es así, tienen que hacer la cantidad de días dividido 5, **después nos dirán por qué.**	clase (línea 41) que está recogiendo información pero que aún en esta situación cada producción debe ser sostenida, fundamentada por los alumnos.
42.-*Doc. Y después multiplican el número inicial de 20 piojos por 3 "elevado a la n/5". los que dicen que no pueden hacer un conteo* ***¿qué tienen para preguntarles a las chicas?...*** *de donde sacó el 20 dicen por allá....Mauro dice que es el monto inicial. Florencia tiene otra pregunta ¿por qué dividen a n por 5 y no a todo el número?* 43.-A1. Es la cantidad de días dividido 5.	Hay un implícito: no se trata de resolver problemas "para el docente" se trata de producir conocimiento. De este modo si otro piensa distinto eso cuestiona mi modo de pensar el problema.
44.-*Doc. Yo digo una cosa, este grupo hizo una tabla antes,* ***yo pregunto*** *cuando llegaron acá ...Yo digo, inicialmente tenían 20, a los 5 días vieron que tenían 20x3. A los 10 días vieron que tenían 20x3x3; a los 15días vieron que tenían 20x3x3x3, ¿y a los 100 días?*	La pregunta de los 100 días formulada a toda la clase contribuye a que todos utilicen o comprendan la fórmula del grupo de alumnas. Además promueve la generalización.

La docente generó un consenso sobre el campo de aplicación de cada fórmula y la posibilidad de conocer qué luminosidad y qué masa de bacterias hay para una variable independiente que toma valores en el continuo (línea 35). Fijado este consenso la docente se ubica en el problema de los piojos que ahora se analiza en condiciones diferentes porque existe la referencia de los problemas que en la secuencia original se realizaron después. La organización del tiempo ya no es lineal y un mismo problema se ***visita*** más de una vez con nuevas preguntas para cuyo tratamiento se apela a relaciones producidas en otros problemas. En estas condiciones convoca a la confrontación (líneas 35 y 37) de las distintas respuestas[148] surgidas en la clase anterior, una de las cuales no había sido prevista en el análisis realizado en el taller (la poligonal). A partir de esta convocatoria se hace evidente para toda la clase la existencia de al menos dos diferentes posiciones que emergerán en la puesta en común:

- no conocemos la genética del piojo, podemos saber lo que pasa en los días múltiplos de 5 pero no en los otros días, (luego aparecerá otra variante que es "no tenemos datos suficientes");
- podemos aplicar la fórmula $20{\times}3^{n/5}$ para n días.

[148] Ya hemos presentado en el capítulo 6 la producción de la poligonal en el apartado 6.1.3,5.

Episodio 3. Donde se explica la producción y sentido de una de las fórmulas.

45.-*Doc.* ***Las chicas vieron*** *que están multiplicando por tres* ***un número de veces****. Están contando los períodos de triplicación que tienen que pasar: en 5 días un período. De algún modo* ***te están contestando*** *como lo hicieron. En 10 días dos períodos, y así en 100 días,. 20 períodos. Las chicas cuentan los períodos que tienen que pasar ¿se entiende? A ver,* ***allá hay otra pregunta, la escuchamos****.*	Las alumnas están presentes en el relato de la docente.
46.-Bruno. Que esto te sirve en los días múltiplos de 5 pero no en los otros días.	Bruno controla la fórmula con el contexto del problema
47.-*Doc. ¡Ah!* ***Primera discusión.*** *A ver, plantemos.* ***Él dice*** *que cree en esta fórmula para los días. múltiplos de 5 pero no para otros,* ***ustedes ¿qué le dicen?***	Utiliza la intervención de Bruno para organizar un debate. "Él dice...". "Ustedes ¿qué le dicen?" La cuestión que está emergiendo es ¿cuál es el ámbito de aplicación de la fórmula?

La docente está organizando la confrontación y para ello explicita las diferentes posiciones de una manera neutra. De este modo está regulando su asimetría. Estas diferentes posiciones también justifican la existencia de varias fórmulas que interpretan el problema. Todos los alumnos hablan al mismo tiempo. La docente deja que transcurra un cierto intercambio desordenado, pide calma, silencio y les vuelve a dar la palabra a las chicas, sosteniendo su estrategia de reconstruir, aclarar, ampliar aquello que los alumnos van diciendo.

Episodio 4. Los datos de un problema como origen de la modelización y como contexto de referencia que controla la producción.

48.-A1(alguna de las chicas). ...... (no se escucha). 49.- *Doc. Las chicas dicen que el problema lo único me dice es que cada 5 días se triplican. Entonces ellas dicen que* ***con los datos del problema vos podés*** *usar este modelo...*	Las chicas contestan pero se dirigen a la docente. La docente mantiene su calidad de moderadora del diálogo. Los datos del problema dan cabida a este modelo y podrían habilitar el uso de la fórmula para otros días.
50.- (interviene un alumno)... 51.-*Doc. Claro, ¿se entiende? El dice que como no sabe la genética del piojo podría ocurrir cualquier cosa en el medio,*	Los datos del problema generan INCERTIDUMBRE sobre el número de piojos en días no divisibles por 5.
52.-..... (habla otra chica) 53.-*Doc. Ah, ¿se entiende lo que ella dice? Ella dice que... (dándole la palabra a la alumna)* 54.-Marianela. Según el problema podemos saber los piojos exactos para los múltiplos de 5 días.	Los datos del problema dan CERTEZA sobre el número de piojos en los días múltiplos de 5.

55.-*Doc. A ver, yo pregunté lo siguiente ¿ustedes son capaces de darme la masa de bacterias en cualquier momento? Me dijeron que sí, ¿con la luminosidad? Me dijeron también y acá con los piojos se generó este debate, unos dicen que no, las chicas usan esta fórmula.* ***Capaz que hay otros modelos****, de hecho allá en el grupo de los chicos hay otra fórmula.*	La docente reconstruye y anuncia la posible existencia de otros modelos

Durante esta puesta en común el grupo que había propuesto las poligonales no participa, queda en silencio. Aún así, y tal vez por eso mismo, la docente menciona a la clase que este grupo tiene una producción distinta (línea 55).

56.- Mariela. Esto es lo mismo que si te pregunta en la **luminosidad a la hora y media**.	La referencia a otros modelos permite ampliar la pregunta, insertarla en un contexto más amplio. Esto está posibilitado por la comparación de los tres problemas, lo cual promueve la producción de ideas más generales. No queda claro en qué sentido la alumna plantea "es lo mismo".
57.-*Doc. Ah, un momento, escuchá lo que ella dijo, ella ahora dice que mirando de los piojos duda de los otros problemas,* ***¿cómo hago para saber cuando bajo medio metro cuánta luminosidad tengo? Esa es la pregunta de Marianela****. Y ustedes, ¿cómo hicieron?*	Interpreta la intervención de la alumna como duda. A partir de esto la toma y la devuelve a toda la clase, no la responde ella.
58.-A (Flor). Si bajo medio metro bajo la mitad del 20% porque en un metro tengo el 20%.	Vuelve a aparecer una relación ya trabajada y ya revisada: el porcentaje se puede repartir proporcionalmente. Tal situación constituye una oportunidad de revisar una idea no consolidada.
59.-*Doc.* ***¿Se entiende? Ella dice que*** *en medio metro se baja la mitad de lo que se baja en un metro. Ustedes ¿qué dicen?*	No sanciona, comunica esta respuesta a toda la clase.

El análisis conjunto de los problemas lleva a los alumnos a establecer relaciones a partir de las cuales pueden llegar momentáneamente a renunciar a una resolución correcta que habían realizado previamente. En realidad no queda claro el significado de la intervención de Mariela (línea 56) ya que podría tratarse tanto de un modo de abrir a la posibilidad de encontrar la cantidad de piojos para valores intermedios (no múltiplos de 5) como de excluir la alternativa de calcular la luminosidad en cualquier punto. La docente hace una interpretación y a partir de ahí lanza una pregunta que, más allá de la intención de Mariela, permite sostener la discusión. La exigencia de la inmediatez conlleva para el docente el riesgo de una interpretación no totalmente ajustada. Nos atrevemos sin embargo a decir que dicho desajuste no tiene tanta importancia ya que la intención de sostener el debate a partir de las ideas de los estudiantes permite retomar la intervención de la alumna en términos de una idea que de todos modos sigue siendo necesario discutir.

El episodio muestra la inestabilidad de las ideas que se están elaborando y exige por parte del docente aceptar algo que podría verse como un retroceso o como una confusión provocada por la comparación (línea 59). Sin embargo, se trata de una incertidumbre transitoria a partir de la cual las relaciones se fortalecen. Las idas y vueltas propias de un proceso de elaboración toman estado público y se necesita confianza en ese proceso para aceptar la incertidumbre que genera ver incurrir a los alumnos en respuestas erróneas cuando antes las habían resuelto correctamente.

Flor, está en el grupo de las chicas que estaba exponiendo su producción de la fórmula de los piojos. Tal vez esta intervención (errada) invalide la confianza que sus compañeros le estaban otorgando a su explicación anterior. Es interesante ver como la docente se mantiene a distancia de esta controversia aún cuando está mediando todas las explicaciones.

Hablan todos al mismo tiempo, hay una nivel de participación altísimo que se percibe en el audio de la clase. (ritmo de la charla, tonos empleados por los alumnos, participación de varios alumnos al mismo tiempo, son elementos que no podemos ver en la transcripción)

60.- *Doc.* ***Ella dice que*** *cuando vos pasás 5 días... pero ella dice que en el problema de la luminosidad sí podés saber, además el problema decía que no importa donde estás al bajar un metro perdés el 20%. Ella dice que hay una diferencia entre el dominio de los piojos y el de la luminosidad.* ***¿Están de acuerdo?***	Aunque el cálculo de Flor es erróneo (distribuye el porcentaje de manera uniforme), su intervención permite establecer que sí es posible calcular la luminosidad en cualquier punto y ese asunto es el que se está discutiendo. O sea, la profesora toma el aspecto de la intervención de la alumna que le interesa y lo somete a consideración de la clase
61.- Kevin.... 62.- *Doc. Entienden? Kevin dice que cada un metro perdés 20% la luminosidad,* ***no importa donde estés. Que acá la clave es no importa donde estés, cada un metro.***	Devuelve a todos el dato de Kevin que permitirá cuestionar la fundamentación de Flor.

Episodio 5. Se analiza la cuestión de la proporcionalidad de los porcentajes en forma de debate.

63.-A1. Pero en medio metro todavía no bajaste un metro, ¿cómo hacés?	
64.-*Doc. El* ***lo que te dice es esto****, mirá. Si vos estás*	

en una profundidad cualquiera y en esa profundidad vos sabés la luminosidad que tenés entonces le quitás el 20% te quedás con el 80% y sabés la luminosidad al siguiente metro. Bueno ***yo ahora quiero discutir lo que ella dice****. Porque* ***ustedes me dicen que no hay como comprobar ni refutar ni discutir lo que ella dice****. (va hacia el pizarrón, dice que va a hacer una tabla)* ***Según Florencia*** *pierdo el 10% entonces me queda 90%,* ***si repito su teoría*** *y bajo medio metro más pierdo otra vez el 10%, otra vez me quedo con 90%, y bajé un metro y no me quedé con el 80% del metro anterior (dice esto mientras escribe en el pizarrón agregando a la tabla el medio metro)..... Ah, acá dicen que es un margen de error.*	Pide un control y posición de autonomía a los alumnos. Se trata de encontrar elementos que permitan "comprobar" o "refutar" la fundamentación de Flor. La docente aporta datos.
65.-A.... 66.-*Doc. Ah mirá lo que dicen acá, por acá* ***le contestan*** *que ese error se arrastra y se hace un error enorme.*	Sigue moderando el debate.
67.-A2. El 90% es aproximado.	
68.-*Doc. Ah pará 89,4. a ver estamos planteando esto, él me dice si yo hago la fórmula que ustedes me dijeron para 0,5 me da 89,4, es decir* $100x0,8^{0,5}$*, y si hace lo que dice Florencia le da 90.* ***Ahora yo pregunto, lo que yo digo ¿sirve para refutar lo que dice Florencia?*** 69.-A3. Sí profe. 70.-*Doc. Cuando fui a construir lo que ocurre* ***con la teoría que ella dice que sirve*** *me da esto. Una tabla diferente de la que teníamos* ***y ustedes estaban seguros de la otra tabla****, porque yo les pregunto una cosa, ustedes saben que cada un metro teníamos que perder el 20%.*	En lugar de preguntar si lo que ella está planteando es "verdad" pregunta si es un argumento válido para refutar. Esto es, se discute tanto sobre la validez de los argumentos que se usan como sobre la verdad o falsedad de lo que se dice. En otros términos el debate comporta dos aspectos: el carácter de verdad de las proposiciones en juego en relación con el estudio de la función exponencial y la pertinencia de los fundamentos que se usan y producen. Por su parte, los alumnos piensan de acuerdo a "teorías" que ellos elaboran.
71.-A4. Profe, ¿por qué el 10%? 72.-*Doc. Porque* ***estoy haciendo la tabla como ella me dice****. Yo les pregunto, el problema dice que cada un metro pierdo el 20% del metro anterior y llego acá y tengo 81 entonces, yo me pregunto, el problema dice que cada un metro pierdo el 20%, ¡no tengo lo que me dice el problema!! ¿No?*	El valor 81 refuta el dato del problema "cada un metro pierdo el 20%". Esto invalida la teoría de Flor.
73.-Kevin, ... 74.-*Doc. No, cada metro perdés el 20%. Todo el mundo ¿está de acuerdo?, a ver si esto les sirve un poquito más* ***porque yo veo que hay gente que no lo ve todavía..***	La docente controla la comprensión del grupo. Ahora es ella quien se hace cargo de la comprensión y considera la posibilidad de que una argumentación no sirva para comprender. No lo deposita en los

75.-A5. Sí porque no es lo mismo el 20% de 100 que el 10 de 90.	alumnos.
76.-*Doc. Ah ahora sí, no es lo mismo aplicar el 20% una vez que el 10% dos veces consecutivas!. A ver,* ***les hago otra pregunta****, supongan que a mi no se me ocurrió hacer la tabla que hicieron uds. Según* ***la teoría de Flor*** *yo podría pensar así , bueno si cada metro pierdo el 20%, al bajar el doble pierdo el doble.* 77.-A6. Eso le había dicho yo profe!	Nueva pregunta para controlar la comprensión. No se apoya en los datos puntuales sino que utiliza la misma hipótesis de Flor pero para el doble.
78.-*Doc. Ah! Claro ¿entonces? ¿Se entiende que uno no puede repartir proporcionalmente el porcentaje? ¿Eso se entiende?*	Confirma la comprensión de esta cuestión del porcentaje en toda la clase.

A partir del planteo: ¿los datos qué abarcan? ¿Qué pasa fuera de los datos? en muchos problemas no podemos saber lo que pasa "en el medio", Marianela establece una comparación entre el problema de la laguna y el de los piojos. Más allá del sentido de su comparación, se instala la pregunta y vuelve a aparecer la cuestión "proporcionalidad/no proporcionalidad de los porcentajes" que se había tratado durante la fase de trabajo en grupos.

En este último episodio la docente cambió su objetivo inicial de trabajo que estaba organizado en torno a la confrontación y el tema de la modelización y los datos de los problemas a tener como objetivo la comprensión de los porcentajes y el modelo exponencial. Repartir los porcentajes en forma proporcional es compatible con el modelo lineal pero no corresponde al modelo exponencial. La confrontación y el debate resultan funcionales a la construcción del conocimiento.

Hemos tomado todo este intercambio presentado a partir de los cinco episodios analizados como una **reconstrucción global** donde las respuestas y fundamentaciones elaboradas en cada grupo resultaron hilvanadas a partir de un conjunto de preguntas que la docente eligió, a saber:

1.- qué nos pedían los problemas,

2.- qué variables se relacionaban,

3.- qué fórmulas se produjeron,

4.- cuándo pudimos dar respuesta de una magnitud como la luminosidad, los piojos, las bacterias en forma continua,

5.- cómo confrontamos nuestras respuestas con el enunciado del problema,

6.- qué posibilidad existe de que haya más de un modelo para alguna situación,

7.- cómo sabemos que un argumento sirve o no para aceptar o refutar una idea.

Notemos que los tres primeros aspectos señalados preparan un terreno sobre la base del cual se trabaja a través del diálogo sobre la fundamentación de tres cuestiones: dominio de cada situación (punto 4.-), modelo elegido (punto 5.-), posibilidad de más de un modelo (punto 6.-). Finalmente, de una manera más transversal, se analiza para cada sentencia, su estatuto de verdad o falsedad, y su pertinencia o no para aceptar o refutar una idea.

Esta observación nos habilita a afirmar que en este entramado de cuestiones la docente articula determinados aspectos conceptuales de la función exponencial que los problemas permiten tratar junto con un tratamiento de aspectos vinculados a la producción de sentencias y su posible refutación. Están presentes en esta reconstrucción global de manera imbricada tanto la función exponencial como así también la fundamentación a partir de la reorganización de relaciones y saberes que propicia la docente.

8.3 LOS PROBLEMAS CON CONDICIONES.

El análisis de problemas en los que se piden "condiciones para..." fue tomado en varias oportunidades como eje de discusión durante el taller. Como ya hemos relatado en dicho capítulo, este tipo de problemas había sido presentado originalmente en el material puesto a consideración de las docentes antes del inicio del taller y, a lo largo de todos los meses de trabajo, fue discutido reiteradas veces en distintos problemas. La fertilidad de este trabajo fue anticipado en parte en el taller. La observación de clase superó nuestras anticipaciones. Vemos ahora que en estos problemas hay algo de la actividad matemática que se revela de un modo privilegiado en la medida que el establecimiento de condiciones convoca a los alumnos a conjeturar, abstraer, generalizar, deducir a partir del planteo de ejemplos primarios estando todas estas actividades enmarcadas en el contexto de un debate entre pares.

Concebimos junto con los docentes un grupo de problemas para elaborar condiciones que dialogan entre sí, todos ellos en el conjunto de problemas descontextualizados. Algunos proven ejemplos que pueden reutilizarse en otros para desarrollar condiciones. Del mismo modo algunas condiciones establecidas en algunos problemas pueden servir de insumo para nuevas condiciones en problemas posteriores. Como hemos mencionado en el capítulo 6 este diálogo es potencial. Entendemos que la gestión del docente es necesaria para que efectivamente ocurra. En este caso los alumnos retomarán relaciones ya elaboradas interpelándolas a la luz de nuevas preguntas y la variable tiempo entrará en juego.

Vale la pena destacar que en los problemas descontextualizados , se repite la modalidad de trabajo en dos fases. En la primera, de exploración, elaboración de conjeturas, búsqueda de ejemplos y resoluciones los alumnos se nuclean en pequeños grupos. Las intervenciones de la docente en cada uno de los grupos tiene los mismos propósitos: asegurar el trabajo grupal, esclarecer posiciones de los alumnos o los conceptos-ideas que se están debatiendo, reconstruir alguna intervención que no está clara en el grupo y que de ese modo no se puede reutilizar, o también, favorecer el control del grupo sobre sus afirmaciones. En la segunda durante la puesta en común la docente recorre la variedad de resoluciones de sus alumnos eligiendo el conjunto de problemas que resulte pertinente a la gestión de su clase y, dependiendo de las elaboraciones de los alumnos, realiza nuevos cuestionamientos.

En este apartado mostraremos un diálogo correspondiente a la primera fase de trabajo en grupos y una puesta en común los que permitirán observar la riqueza de este tipo de problemas y el juego posible a desplegar por parte del docente junto a toda la comunidad clase.

En la puesta en común veremos cómo la docente comienza tomando de los portavoces de los grupos las resoluciones de los problemas o las ideas analizadas para luego reflexionar sobre dichas producciones. En algunos casos la docente levantará nuevas preguntas. En otros, permitirá la confrontación de posiciones distintas de los alumnos. Eventualmente podrá incluso indagar sobre la génesis de la producción ya lograda por los alumnos.

Diálogo 8.II. La confrontación con producciones anteriores como estrategia de control. Diálogo docente y alumnos.

Los alumnos están resolviendo el problema de determinar condiciones sobre los parámetros k y a para que la función exponencial $f(x) = k \cdot a^x$ sea creciente y luego condiciones para que sea decreciente. En esta situación llaman a la docente para chequear su producción:

1.- (Marianela). Este cuadro que hicimos no sé si está bien (mirando a la docente)	Los alumnos piden confirmación de su producción
2.-*Doc. ¿Y de qué habla el cuadro?*	La docente pide que los alumnos expliciten las ideas que ellos pusieron en juego
3.-(Marianela). Hicimos... tomamos los... o sea, tomamos los valores... o sea los signos que pueden tomar k y la a y la equis, par o impar, para que nos dé creciente o decreciente. **Y dijimos: si k es positiva, y a es positiva, y la equis cualquier número... par o impar, va a ser creciente.**	Los alumnos hacen explícita su estrategia
4.-*Doc. En la grilla del problema Nº 2 ustedes estaban mirando a la función k por a a la equis ($K.A^x$) en cada caso. Cada vez que tienen una función, cada vez que eligen un valor de k y un valor de a, esa función está habilitada para tomar cualquier valor de equis porque es una función cuyo dominio son los reales.* 5.-A_1. Si.	Trae la actividad anterior como referencia para empezar a cuestionar el estatuto asignado a los parámetros y la variable.
6.-*Doc. Ok. Cuando ustedes piensan en un número real, cualquiera, ¿pueden decir si es par o impar? Por ejemplo…* 7.-A_1: ¿Un número real si es par o impar? 8.-*Doc. Claro. Es un análisis que han hecho acá (señalando la hoja que los alumnos tenían escrita).*	Selecciona uno de los aspectos que quiere que los alumnos revisen: la paridad en el campo de los números reales.
9.-A_2: Ah, pero si tomamos…. 10.-*Doc. Pueden decir, por ejemplo, si toman tres medios si es par o impar?* 11.-A_2: Eso es lo que iba a decir, si tomamos un decimal….	Su planteo – a partir de la pregunta de la línea 10- permite que los alumnos se cuestionen la clasificación de par o impar para los reales

Los alumnos están considerando a la variable x como un parámetro, poniendo en evidencia que todavía no está clara la familia de funciones con la que están trabajando. También hay otro aspecto interesante en la afirmación, pareciera ser que para los alumnos los números reales se pueden clasificar entre pares e impares.

La docente remitió a los alumnos hacia un problema anterior donde se había analizado el crecimiento y decrecimiento para llevarlos a la confrontación de esta afirmación nueva del grupo con otras anteriores.

En una segunda intervención - que no transcribimos - la docente explica por medio de ejemplos, la falta de sentido de utilizar la clasificación "par-impar" en el campo de los reales y retoma el análisis realizado por el grupo en el problema ya resuelto y que ahora trata de introducir como referencia.

12.-A_2: Por que habíamos visto que además de determinar k… 13.-A_1: Además de determinar a, depende de k que sea creciente o decreciente	Los alumnos recuerdan que los parámetros considerados eran a y k.
14.-*Doc. Ah! pero, ¿también les parece que depende de equis?* 15.-A_1: Si.	Interroga nuevamente sobre el estatus de la variable frente a la evocación
16.-Doc. ¿Si? 17.-A_1: Y, porque si vos tenés a con un número negativo…	Da lugar a que la alumna explicite más su razonamiento. La alumna supone que la base puede ser negativa.
18.-*Doc. Miren los ejemplos con los que estuvieron trabajando acá. Trabajaron dos a la equis, tres a la equis, un medio a la equis, un tercio a la equis, ustedes decidieron que estas funciones eran… crecientes estas dos y decrecientes estas dos. ¿Necesitaban tomar algunos valores de equis? ¿Les cambiaba con las equis la situación?* 19.-A_2: No por que ya era decreciente. 20.-A_1: O creciente.	Por esto la docente reconstruye nuevamente con mayor explicitación el análisis realizado en el problema de referencia. Los alumnos señalan una diferencia importante para su análisis: si la función está fijada "ya es creciente o decreciente" si la función no está fijada todavía "no es". **El pensamiento hipotético está en construcción.**
21.-*Doc. Estaban con esa función, y después miraban la gráfica y decían yo me muevo pero la función hace esto entonces es creciente. Me muevo, hace esto entonces es decreciente.* 22.-A_1: Claro.	La docente sigue aportando referencia. Introduce el recurso gráfico.
23-*Doc. Por ahí, repensar esto les va a servir para ver que papel tiene x en esto.* 24.-A_1: Claro.	Focaliza qué elementos pueden reutilizar en la nueva situación para repensar el lugar de la variable en la nueva función.

La intervención de la docente se preserva de sancionar si la respuesta es correcta o incorrecta. Los alumnos piden **control** a la docente sobre lo que han hecho y la docente antes que **evaluar** los remite a otros problemas donde ellos mismos han decidido qué funciones eran crecientes y cuáles decrecientes. En esta intervención encontramos un aspecto de devolución de la docente. Pone a consideración de los alumnos otro momento en el que utilizaron otro criterio para analizar el crecimiento o el decrecimiento y señala y especifica tal criterio. La confrontación entre diversos métodos o técnicas es una forma de reflexionar sobre sus procedimientos. El contrato didáctico que parece regir el accionar de los alumnos hace que ellos estén esperando del docente una sanción sobre su trabajo. La docente, sin embargo, les **devuelve** una herramienta para que ellos tengan el **control sobre sus procedimientos**. Al mismo tiempo las relaciones específicas que trae a consideración organizan un nuevo milieu para los alumnos. Hemos planteado en el marco teórico que el docente realizaría en este tipo de trabajo algunas intervenciones que se podrían interpretar en términos de una devolución en tanto en otras se lo vería más asociado al milieu. Entendemos que en este caso la docente ha propiciado una devolución a los alumnos.

A continuación exponemos la puesta en común sobre un conjunto de problemas de planteo de condiciones.

Diálogo 8.III. El proceso de producción de los resultados. Arquitectura de la fundamentación. Puesta en común.

Este diálogo resulta una larga puesta en común sobre los problemas Nº 7, 8 y 12[149] ya realizados de la Segunda Parte (descontextualizados). Esta puesta en común se llevó a cabo durante una clase de 80 minutos, es decir que la docente destinó un módulo completo a la reflexión sobre las producciones de los grupos en referencia a este conjunto de problemas.

Veremos a partir de los distintos episodios cómo docente y alumnos analizan aspectos conceptuales de la función exponencial – el conjunto imagen de la función y su relación con los parámetros de la fórmula, el crecimiento y decrecimiento, la existencia de asíntotas, los corrimientos verticales y las características de la familia que se mantienen o que se pierden - y cuestiones referidas a la producción de razonamientos matemáticos - elaboración de conjeturas, procesos de generalización y abstracción, refutación de

[149] Recordamos que el problema 7 pide dar condiciones sobre los parámetros k y a para que la función $y = k \cdot a^x$ sea creciente o decreciente. Los problemas 8 y 12 piden condiciones de parámetros para describir las gráficas que se presentan a los alumnos.

afirmaciones, el rol de los ejemplos en la construcción de saberes – ambas cuestiones en un diálogo donde el plano de análisis va pasando por una y otra esfera en función de la intervención docente y de las producciones de los alumnos.

La docente convoca a los alumnos a discutir los problemas y a participar en un debate ("vamos a debatir utilizando sus ideas") a partir de los resultados alcanzados en cada grupo.

Episodio 1. Se exponen la cuestión a tratar y los resultados sin análisis

1.-*Doc. Una de las primeras cosas que* ***nos preguntábamos*** *es si la condición de que la función sea creciente depende solo de A.* 2.-Bruno. No, depende de k también.	La idea de comunidad se sostiene cuando la docente se incluye en los cuestionamientos que entrega a sus alumnos.
3.-*Doc. ¿Solo de* k *?* 4.-A. No (responden varios alumnos)	Bruno dijo "también". La pregunta tiene por objeto hacer circular entre todos la precisión en el enunciado de la condición.
5.-*Doc. Muy bien, me gustaría que me contaran qué es lo que debatieron para ver que dependía de ambos, socialicemos...*	El término "socialicemos" indica la idea de construcción colectiva
6.-A(Bruno). Hacíamos como la regla de los signos, Cuando k negativa y A negativa .... menor que uno ...	Bruno asimila a una práctica anterior en la que hay dos variables cada una de las cuales puede tomar dos atributos. Con esto garantiza la exhaustividad el análisis.
7.-A. Yo lo tengo anotado, 8.-*Doc. Bueno, dictame (La profesora escribe en el pizarrón).*	Otro alumno retoma lo de Bruno.
9.-A. **Si** A **es mayor a uno y** k **positivo es creciente, si** A **es mayor a uno y** k **negativo decreciente. Si** A **está entre cero y uno y** k **negativo es creciente, si** A **está entre cero y uno y** k **es positivo es decreciente.** 10.-*Doc. ¿Todos los grupos anotaron lo mismo?* 11.-Todos. Sí.	Se formula la condición del problema 7) y la docente confirma con toda la clase su conformidad, su comprensión, su aceptación.

Episodio 2 La docente explicita el proyecto de reconstrucción del proceso de producción de los resultados que se formularon en forma sintética (análisis).

12.- Doc. ***O sea están de acuerdo con la síntesis que hizo él, para arribar a esta síntesis me gustaría saber cómo llegaron hasta acá, los orígenes, ¿qué parámetro decidieron empezar primero?*** *Ese grupo ¿empezó por A?*

Al realizar esta convocatoria la docente resalta el valor que tiene centrarse en los modos en los que llegaron a producirse los resultados, cuáles son los fundamentos que los sostienen.

Episodio 3 Reconstrucción apoyada en la tabla, realizada para un problema anterior.

13.-A. Usamos el cuadro (los alumnos hacen referencia al cuadro comparativo de las funciones del problema 4)	Explicitación de un recurso de apoyo.
14.-A_2. Porque te daban un mismo A y te cambiaban los valores de k .	Esta intervención muestra que el alumno ha percibido la lógica de exposición del cuadro del problema cuatro que hasta ahora era implícita: "fijando el A y variando el k"
15.-*Doc. Tomaban k diferentes. Estaban juntos dos a la equis y tres a la equis. Y después venía un medio y un tercio a la equis, entonces ustedes dicen que partían de A era dos o tres o un tercio o un medio y ¿cuanto valía k ahí?*	Retoma lo que dice A_2 y circula para toda la clase la lógica que subyace al armado de la tabla. Legaliza la evocación del cuadro realizado como método de búsqueda, **Evocación de un trabajo ya hecho.**
16.-A. Uno...(se superponen las voces) 17.-Doc. *k de repente valía dos, menos uno, cero coma cinco, e iban investigando qué pasaba y a partir de esas observaciones fueron sintetizando esto, ¿**los demás**?.....* 18.-A. También	Convoca permanentemente a los otros a sostener un control.

Episodio 4: La docente plantea la generalización de las conclusiones que se apoyan en el cuadro anterior que contiene algunos casos

Se trata de una única intervención de la docente pero la separaremos para su análisis.

19.-*Doc. Ahora, **ustedes se están basando en cuatro funciones específicas** y en las transformaciones de esas cuatro funciones específicas, estuvieron trabajando con **esas cuatro funciones primitivas** y fueron tomando valores para k ,*	Explicita el punto de apoyo de los alumnos: cuatro funciones específicas.
*___¿qué les permite decir que si cambian va a seguir ocurriendo? ¿Si **toman otro valor cualquiera para A?***	Plantea una pregunta generalizante: ¿en qué me apoyo para generalizar este resultado?, es decir, la operación de generalización requiere un fundamento. Plantea además una indicación del proceso para generalizar: "variar A".
___Aparentemente extrapolaron** y concluyeron eso, si yo tomara otra función cualquiera ¿**cómo sé que va a cumplir esto o lo otro?	Interpreta el mecanismo generalizador de la clase: extrapolar. Además, amplía lo que acaba de decir: "ustedes sacaron conclusiones tomando como referencia algunas funciones, qué pasa con otras cualesquiera?" Así plantea la **incertidumbre**.
*___¿Se entiende? Yo digo que lo que ustedes sintetizaron salió de cuatro ejemplos **¿qué les***	Repite la apelación a fundamentar la generalización

*sintetizaron salió de cuatro ejemplos **¿qué les permite decir algo genérico?***	

La docente ha convocado a exponer formas de razonar el problema y estrategias utilizadas (línea 5) cuando los alumnos muestran que han arribado a las condiciones esperadas (línea 9). Hace visible el trabajo de algunos alumnos que utilizaron el cuadro del problema 4 como referencia (líneas 15 y 17). Pone en evidencia que las respuestas de los alumnos se basan en casos particulares, situación que ya conocía y había detectado en el trabajo en grupos. En función de esto plantea la **incertidumbre** ("¿cómo sé que se va a cumplir esto o lo otro?") buscando la emergencia de una generalización apoyada en un proceso de fundamentación ("¿qué les permite decir algo genérico?"), a partir de estos casos particulares (línea 19). También advierte a los alumnos que el trabajo realizado ha sido de carácter inductivo utilizando un lenguaje familiar ("ustedes han sintetizado a partir de cuatro ejemplos", "aparentemente extrapolaron y concluyeron"). Señala así, aunque implícitamente, que fundamentar las afirmaciones realizadas les dará certeza sobre la validez de las mismas, o también que fundamentar les permite anticipar con certeza. Remarquemos que esto es usualmente resistido por los alumnos que suelen tener una tendencia inductiva que conforma - desde su punto de vista - en sí misma una explicación suficiente.

Este planteo de la docente tiene eco en los alumnos. Veamos.

Episodio 5. Se inicia el proceso de generalización, se pone en funcionamiento un método: fijar uno de los parámetros y analizar la variación del otro

20.-A. Probamos	Primera respuesta a la convocatoria a generalizar
21.-A.- Profe, no sé si está bien esto, pero yo digo, yo tenía anotado que cuando A es mayor a uno es creciente, entonces ahora **es como la regla de los signos,** más por más o más por menos.	Retoma la idea de regla de los signos que había planteado Bruno. Esto es interesante porque da cuenta –aparentemente- de que las ideas circulan y son retomadas en el tiempo y no en forma inmediata. Esta estrategia se apoya en otro problema, el 3.e.
22.-*Doc. Bueno **ahí hay una validación genérica.***	Implícitamente distingue la diferencia entre lo hecho antes (funciones particulares) y ahora.
____*Doc. Vos partías de* **A** *a la equis y habíamos discutido que esta función es creciente si* **A** *es mayor a uno, entonces **ahora vos decís***	Interpreta desarrollando más de lo que el alumno dice. Realiza una **ampliación**.
*....que a partir de esto **vos te preguntás...***	Le atribuye al alumno el método para generalizar

	explicitando más claramente qué querrá decir "usar la regla de los signos" que es en realidad lo que dijo el alumno. Es una intervención de **jerarquización** (analizada en el capítulo anterior)
....como va a ser $k.a^x$.	Lo que se convalida es lo siguiente: me apoyo en $y = a^x$ que tengo ya analizada y a partir de ahí analizo la variación de k. Comunica un método: fijo un parámetro y varío el otro. Este método es afín con la lógica de armado de la tabla que antes se mencionó pero ahora hay una producción genérica.
23.-A. **Creciente**	En esta respuesta el alumno aparentemente no desarrolló el análisis en función de las condiciones de k.

Episodio 6: Se empieza a desplegar el análisis de las variaciones de k

24.-*Doc. ¿Qué tipo de número va a ser A a la x para cualquier valor de x ?* 25.-A. Positivo	Se apoya en el análisis anterior que tiene ya estatuto de conocimiento validado en la clase.
26.-*Doc.* ***Entonces ahora aparece*** *k . Como éste es positivo si k es positivo te da positivo, pero ¿positivo creciente?*	Distingue entre positivo y creciente asunto que algunos alumnos confunden todavía.
____*Si k es negativo queda negativo, ¿creciente?* 27.-A. No, decreciente.	Retoma la idea de la regla de los signos asumiendo que ese no es el problema y pasa al análisis de creciente o decreciente.
28.-*Doc.* ***Es decreciente ¿por qué?*** 29.-A. Porque se da vuelta.	Pide fundamento.
30.-*Doc. Es verdad, gráficamente se da vuelta,*	Acepta el fundamento "se da vuelta" y lo "apoya" en el soporte gráfico.
___ *¿todos de acuerdo?* 31.-A(varios). Sí.	Maniobra en la que pone una idea a consideración del conjunto.
32.-*Doc. Si* ***A es mayor que uno es creciente*** *y* ***ustedes dicen*** *que si multiplico por un positivo sigue creciente pero si multiplican por k negativo dicen que se queda decreciente, Yanina dijo que porque se da vuelta la imagen.*	Reconstruye y sintetiza.

En estos seis episodios de este diálogo aparecen muchos de los elementos mencionados a lo largo del micro análisis. El docente toma las producciones de los alumnos. Las **reconstruye** si es necesario, asegurando que toda la clase la oiga y comprenda. En este caso marca además la forma en la que fueron pensados los problemas y no solo los resultados que alcanzaron. Hay, por lo tanto, una **doble reconstrucción**. Marca el papel de **productor** de los alumnos (“vos partías de”, “vos decís que”). Esa producción se pone a juicio de la **comunidad aula**. El docente se preserva de emitir opinión al respecto, esto es, **vigila su asimetría**. Eventualmente (aunque este no es el ejemplo) puede utilizar la producción para seguir deduciendo otras conclusiones a partir de esa premisa – que puede ser errada - y pedir el consenso del conjunto de alumnos. El docente se convierte en el portavoz pero se preserva del acto de sanción. Solo así, **devolviendo el problema** a toda la clase, habrá un intercambio real entre los integrantes. Sin duda el docente hará maniobras frente a algunas intervenciones, pero eso ocurrirá únicamente como forma de preservar esta tarea de **fundamentar**.

Para realizar sus producciones los alumnos se apoyaron en el conocimiento que ya se había aceptado sobre las características de la función $f(x) = a^x$. La docente lo señala (“y habíamos discutido que esta función $f(x) = a^x$ es creciente si a es mayor a uno y entonces ahora vos decís....”) mostrando en acto que el conocimiento disponible no es únicamente el que la docente puede transmitir sino también el que los alumnos pueden construir.

La docente podría continuar desplegando las razones por las cuales la función $f(x) = k \cdot a^x$ es creciente cuando la base es mayor a uno y el parámetro k es positivo. Señala que puede haber una confusión entre positivo y creciente pero decide pasar en limpio lo que hasta el momento se ha dicho y continuar.

Considera entonces el caso de base menor a uno, de forma similar y pide la conformidad del grupo.

Episodio 7. Una alumna pone en duda la generalidad de lo que se está planteando provocando en el grupo una pregunta no prevista.

La pregunta para el grupo la trae la alumna y la docente la introduce, la legaliza. El tratamiento de la duda da lugar a la emergencia de una conjetura.

33.-*Doc. ¿Todos están de acuerdo?* 34.-Yanina. **Yo no sé si estoy de acuerdo** con eso de que se van a volver TODAS positivas o negativas.	El desacuerdo de Yanina da cuenta de que la pregunta no es retórica, hay espacio para no estar de acuerdo aunque desde el decir de la

	profesora se supone que ella también está de acuerdo.
35.-*Doc. Ah, pará está* ***muy buena la pregunta****, ella no está segura si el signo de las imágenes va a depender o no de* k. *A ver ¿****qué le contestan a ella****? Ella dice así* ***¿es verdad que para saber el signo de las imágenes yo tengo que saber y averiguar el signo de*** k ***?*** *Esa es la duda de ella.*	Nueva **reformulación** de duda de la alumna, ahora como pregunta. La maniobra docente es la siguiente: primero la alumna plantea la duda, ella la reformula y luego enuncia la sentencia que debería cumplirse para que la alumna salde la duda, esto prepara la emergencia de la conjetura que llega dentro de cinco intervenciones.
36.-Marianela. Sí, porque k es la ordenada al origen y si k es la ordenada al origen y es negativa las imágenes tienen que ser negativas porque ...	Empieza a responder usando los saberes ya instalados.
37.-Yanina. Es exponencial	La alumna de la duda completa asociándose al uso de saberes instalados
38.-*Doc. Estamos trabajando exponenciales. Yo creo que* ***la pregunta que vos estás diciendo tiene que ver con lo que dice David.***	Relaciona las intervenciones de dos alumnos
___¿de qué va a depender que cambie de positivo a negativo?,	Se retoma la idea que se instaló a partir de fijar un a y hacer variar el k (episodio 5)
39.-A. **El signo de** k **me dice el signo de las imágenes.**	Formula una sentencia, la profesora retoma como conjetura para poner a consideración del conjunto el valor de verdad de la sentencia. Notar la expresión "me dice" que da cuenta de la apropiación de la/el alumna/o.
40.-*Doc. A ver* ***en conjetura****, ¿qué es lo que pueden decir?* ***El signo de*** k ***¿es el signo de las imágenes?***	Finalmente formula la **conjetura** para todos.

Episodio 8. Se responde la conjetura, los alumnos evocan un problema anterior como punto de apoyo.

41.-Marianela. Porque las exponenciales, o tienen imágenes positivas o tienen imágenes negativas.	Recuperación de un saber ya establecido que se había esbozado sin completar en la anterior intervención de esta alumna (línea 36). Marianela está sosteniendo la interacción y le quedó algo sin terminar de decir, algo implícito que ahora explicita.
42.-*Doc. ¿Está bien lo que dice Marianela? Que las imágenes o son todas positivas o son todas negativas.*	Polea de trasmisión entre lo que dice Marianela y el conjunto de la clase.
43.-A. **Sí porque la asíntota horizontal está en cero.**	Responde apelando de manera implícita al gráfico.
44.-*Doc. O sea que con sólo mirar la gráfica acá ya sabemos.*	Explicita la utilización del gráfico como método para establecer la verdad.
45.-Bruno. Ya con k te da la ordenada al origen que es un punto y con eso ya sabés.	Idea implícita: como el signo de la función no cambia, con mirar el signo correspondiente a un valor sabemos el signo de toda la función. Esta intervención parece retomar la de otra alumna (Marianela).
46.-A. Es como hicimos el problema	Nuevamente es un alumno el que evoca un problema

ocho.	ya resuelto.
47.-*Doc. Ah,* ***está dando una estrategia él,*** *bueno miremos el problema ocho, ahí poníamos en juego lo que* ***ya habíamos descubierto antes.***	Toma la estrategia que sugiere el alumno y a la vez señala que ese problema está encadenado con uno anterior. Así se explicita un armado encadenado a partir de los problemas: cada problema dio lugar a uno o varios **corolarios.**
___*Recordemos el enunciado. Teníamos los gráficos y teníamos que decidir a qué valores de* k *y de* a *corresponden. Hago algunos dibujos aproximados.*	Para retomar los corolarios despliega el problema en pizarrón.

Se ha logrado en el diálogo una impronta de debate. Hay una alumna que no está segura sobre una afirmación. Se le hace una pregunta a todo el grupo. Se realiza una conjetura. Algunos integrantes de la clase contestan. Obviamente siempre le contestan a la docente. Hasta acá toda la puesta en común sigue teniendo el ritual correspondiente a una clase: un docente en el pizarrón y un grupo de alumnos dirigiendo la mirada al docente. No hay un diálogo específico entre alumnos. Pero la docente va moderando esas intervenciones y si bien organiza dando la palabra o repitiendo algunas expresiones que no pueden ser oídas por todos, toda su intervención está "guionada" por el aporte de los alumnos. La docente se resguarda de hacer llegar su propia "opinión" a la vez que pone en relación distintas intervenciones de alumnos. Aún así este resguardo puede ser parcial. En el episodio 7 Yanina duda. Su duda puede tener varias interpretaciones (por ejemplo que haya algunas funciones que sean en parte positivas y en parte negativas). La docente realiza una interpretación de la duda de Yanina que le es útil a su proyecto: relacionar el signo de las imágenes con el signo de k, sosteniendo de este modo el problema de las condiciones. En el discurso organizado por la docente, sin embargo es Yanina la autora de esta interpretación. La profesora enfatiza así el rol de productor de los alumnos.

A continuación la docente reconstruye con el aporte de los alumnos el problema ocho en pizarrón. Pero para realizar esta reconstrucción vuelve a requerir de los alumnos - como se puede ver en el próximo episodio - las estrategias utilizadas a saber: ir de las condiciones a las gráficas o ir desde las gráficas a las condiciones. Compartir las estrategias de análisis es por un lado una forma de comunicar a los alumnos que existe toda una variedad de alternativas para desarrollar un problema, al mismo tiempo es una forma de validar la estrategia para el grupo que la comunica frente a **la comunidad aula**.

Episodio 9. Explicitación de dos puntos de apoyo para tomar una decisión, a partir de lo cual se establece la equivalencia de los mismos.

48.-*Doc. Este grupo dice que primero fue a mirar qué valor podía tomar en cada gráfico ..... k negativo en g.- y en h.- k negativo (va enumerando). ¿En qué se fijó este grupo para saber el signo de k ? (les pregunta al resto).* ***¿En qué se basó este grupo para decidir?***	Le pregunta al resto cómo ve la decisión del grupo en proceso, intenta que el resto de la clase dé indicios sobre la comprensión y sobre la variedad de recursos que pueden funcionar como puntos de apoyo para decidir.
49.-A. En la imagen.	Un alumno de otro grupo analiza e interpreta una producción de otros a partir de la pregunta de la profesora.
50.-*Doc. ¿En qué de la imagen?*	Pide precisión, no interpreta, no da por sentado.
51.-A. Si es positivo o negativo. 52.-Federico. En la ordenada. 53.-*Doc.* ***Federico dice*** *que en la ordenada al origen,* ***las chicas dicen*** *que si las imágenes eran positivas entonces k era positivo... y que si las imágenes eran negativas...*	La profesora pone en relación dos respuestas.
54.-A. **Es más o menos lo mismo.**	A partir de la relación de la profesora el alumno establece que es lo mismo fijarse en el conjunto de imágenes que en la ordenada al origen.

Episodio 10. Se discriminan dos métodos, mirar primero el signo o mirar primero el crecimiento.

55.-*Doc. Claro, ¿el grupo de allá?* 56.-A: Nosotras miramos las condiciones primero, y ahí fuimos viendo, como ya teníamos las condiciones de cuándo eran crecientes o decrecientes buscamos cuáles eran crecientes y luego miramos las condiciones de la guía.	Las alumnas explican que para el problema de gráficas utilizaron los resultados del problema anterior con la tipificación de condiciones (mencionada en la línea 9 por el mismo grupo que está interviniendo ahora). Con las condiciones en mente miran los gráficos. Y con los gráficos vuelven a las condiciones para elegir alguna de ellas.
57.-*Doc. Ajá,* ***esa era la técnica de ustedes. ¿Se entiende?*** *Fueron a su cuadro síntesis y luego ubicaron. Ah, me dicen k negativo y A mayor a uno y eran así, (señala el dibujo respectivo en el pizarrón) ¿Y ustedes?*	Realiza una **ampliación** de la explicación del grupo, enfatizando así la diferencia entre esta "técnica" y la anterior.
58.-A. Más o menos lo que hicieron ellas, nos fijamos primero si era decreciente o creciente...	Otra estrategia: detectan gráficos crecientes y buscan condiciones que den por resultado funciones crecientes. Lo mismo con decrecientes
59.-*Doc.* ***¡Entonces no es más o menos lo mismo!*** *(risas).* 60.-A. Ah, ¿no?	Distingue una estrategia de la otra para toda la clase.

61.-*Doc. ¡No! (risas). Ellos miraron signos y ustedes si eran crecientes o decrecientes, vamos de vuelta,* ***recapitulamos para no confundir****. El grupo de ustedes miró primero el signo de* k *y el signo lo miraron con las imágenes ¿y luego?*	Reconstruye las dos estrategias
62.-A. Nos fijamos en A y como la primera era creciente entonces A tiene que estar entre cero y uno.	En el enunciado de la alumna falta una aclaración. La alumna se refiere a un gráfico con imágenes negativas. Su deducción fue entonces "siendo k negativo y siendo la gráfica creciente entonces a está entre cero y uno. Como la exposición se apoya en los gráficos que están viendo en el pizarrón se da un sobreentendido al respecto.

Episodio 11: una alumna relata un error que ha producido como aporte para la discusión.

63.-*Doc. Listo, ¿algún grupo quiere contarnos si lo hizo de otra manera?*	Busca otras estrategias.
64.-Marianela. **Nosotros nos equivocamos.**	Aparece "el error"como relato.
65.-*Doc. ¿Y como fue la equivocación?*	Incluye el error en el análisis.
66.-Marianela. Al principio nos fijamos solamente en A	Explicita la estrategia errónea.
67.-*Doc. Y entonces, la equivocación ¿cuál era? ¿Todos los crecientes se los asignaban a* A *mayor a uno y los decrecientes con* A *menor a uno? ¿y cómo se dieron cuenta? ¿Lo escucharon de otros chicos...?*	Interpela al grupo del error para que se lo pueda reconstruir. Busca una mayor comprensión. Realiza una lectura del error en términos de las relaciones que se buscaban, esto es, condiciones sobre los parámetros para elegir las gráficas adecuadas.
68.-Marianela. En realidad cuando fuimos a ver cómo nos había dado en el problema dos, nos dimos cuenta y cuando vimos la reglita... (sigue la puesta en común)	La confrontación con resultados anteriores aporta evidencia sobre los actuales.

Queremos notar que en esta situación de puesta en común, los alumnos tienen sus problemas ya resueltos, y conocen los resultados correctos ya que fue lo primero que se expuso. En tal sentido no hay incertidumbre respecto de las soluciones de los problemas. Sin embargo el clima de silencio en el que se está trabajando (del que da cuenta al audio pero, una vez, más no lo podemos transcribir) muestra que este momento, esta actividad, también concentra el interés de los alumnos. En este momento el objeto de conocimiento que convoca a todos está constituido por las relaciones y producciones de los alumnos a propósito de la resolución de un grupo de problemas. Hay así generado un espacio de reflexión sobre las prácticas. Notamos adicionalmente, que los alumnos han ido utilizando las relaciones construidas a partir de problemas anteriores tanto para retomarlas, ampliarlas y finalmente reutilizarlas en un nuevo problema, como así también para confrontar con producciones actuales. Este es el caso del último relato de Mariela.

En este conjunto de once episodios advertimos que la variable tiempo se hace presente al menos de dos formas distintas. En primer lugar, un grupo de alumnas explicitan cómo se apoyaron en resultados obtenidos en un problema que está fuera de la consideración de los del momento para organizar la tabla de condiciones de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = k \cdot a^x$. El problema con las cuatro funciones exponenciales y su estudio mediante la tabla comparativa es evocado en el episodio 4. Luego, en el episodio 5, cuando la docente interroga por una validación genérica otra alumna trae un problema también anterior, el del estudio del crecimiento o decrecimiento de la función $f(x) = a^x$ para luego considerar el valor del parámetro k. Este problema también se había trabajado varias clases atrás. Ambas evocaciones surgen como producto de la propuesta de la docente de explicitar la génesis de los problemas resueltos.

En segundo lugar, una alumna, Mariela, realiza en la línea 36 una afirmación acerca del signo de la función $f(x) = k \cdot a^x$ vinculado con el valor de la "ordenada al origen" que luego retoma en la línea 41 saldando su intervención al mencionar que las funciones exponenciales tienen imágenes positivas o negativas (y anticipamos que traerá nuevamente este resultado en la línea 74, reformulado en términos de las asíntotas para descartar como funciones exponenciales al grupo de las funciones del problema 12) . Entendemos que esta alternativa de retomar intervenciones anteriores en manos de los alumnos se hace posible en función de la convocatoria propuesta por la docente, quien está pensando junto a sus alumnos y se mantiene muy cerca de sus producciones.

Episodio 12 Los alumnos caracterizan la exponencial a partir de los elementos ya tratados.

69.-*Doc. Bueno, vayamos al último*	

problema. El ejercicio dice: "las siguientes funciones son del tipo k *por* A *a la equis más* b *. Para cada una de ellas analizá el signo de* k *y* b *y decí si* A *es mayor a uno o está entre cero y uno". Acá tengo marcadas algunas cosas. ¿Es una función exponencial esa?* 70.-Marianela. No (con toda seguridad)	Indaga qué representación de función exponencial están considerando los alumnos, con el objetivo, probablemente, de apoyarse en los razonamientos ya elaborados para producir nuevos. Se rechaza el modelo exponencial.
71.-*Doc. ¿Por qué?*	Apela a los fundamentos
72.-Bruno. Porque corta al eje x.	Surge un fundamento apoyado en la historia de la clase.
73.-*Doc. ¿Eso ya me da para decir que no es exponencial?*	Interpela a la propia fundamentación producida por el alumno, anunciando que las razones pueden o no ser suficientes, es decir se centra en el valor de la sentencia en tanto argumento suficiente para aceptar o refutar una idea.
74.-Marianela. No hay asíntota en cero (confirmando su posición anterior).	Confirma la posición de Bruno agregando información.
75.-*Doc. No hay asíntota en cero....*	....(hace una pausa, seguramente esperando que otros alumnos participen y así poder saber donde están posicionados otros alumnos)
76.-*Doc. Esa tiene asíntota en dos. ¿Todos los grupos miraron las asíntotas?* 77.-A (varios). Sí.	Ya que la asíntota es un elemento distintivo de la exponencial, la docente indaga si han sido consideradas por todos los alumnos.
78.-*Doc. ¿Y donde están? ¿En dos y menos dos? ¿En menos dos y dos? Muy bien, empecemos preguntando. El grupo de allá atrás ¿nos podrían decir, por ejemplo en la primera,* ***cómo determinaron*** *el signo de* k *y de* b *y de* A*? ¿Qué tomaron primero?*	Coteja que la opinión sobre la calidad de exponencial no es refutada por otros y deja la cuestión momentáneamente. Lanza nuevamente el proceso de reconstrucción pidiendo a los alumnos la explicitación de la génesis de las relaciones construidas.

Episodio 13 Se reconstruyen las condiciones sobre los parámetros del último problema.

79.-A. Lo primero que más o menos planteamos es qué se suma o se resta y con eso vemos la asíntota.	Implícitamente el alumno está haciendo referencia a la familia de funciones exponenciales ya trabajadas y a estas como corrimientos verticales mediante suma.
80.-*Doc.: Lo primero que se fijaron es en B y que eso está ligado a la suma o a la resta y con eso a la asíntota.* ***¿Quién está de acuerdo con eso?***	Reformula la sentencia asegurándose una formulación coherente. Le da estatuto de sentencia a ser considerada.
81.-Marianela. A mi me dio de **casualidad** 82.-*Doc. De casualidad ¿qué te dio?*	Al pedir la explicitación de la génesis da cabida a las situaciones concretas que atraviesan los alumnos en su producción matemática.
83.-Rocío. Es casualidad que la asíntota sea dos y que B todo dé dos. 84.-*Doc. Ah! Ellas dicen que k igual a menos dos y que este menos dos no está ligado a la asíntota. Y que si en cambio ponen k por A a la equis más dos este dos*	Rocío, del mismo grupo que Marianela explica la categorización de Marianela. La docente interpela a la alumna para explicitar razonamientos que quedaron probablemente implícitos. De alguna manera está diciendo "las

ponen k por A a la equis más dos este dos no está ligado a la asíntota...este tampoco...	casualidades pueden ser situaciones que no pudimos comprender completamente".
85.- A(Noelia). Sí está ligado *86.-Doc. **¿Por que Noelia**?*	Aparece una confrontación y la docente invita a la explicitación de la razón de tal confrontación.
87.-A(Noelia): No, porque es un corrimiento, porque cuando vos tenías K por A a la equis eso tenía asíntota en cero, ahora estás sumando o restando, según cuanto le sumes y cuanto le restes te queda la asíntota.	Emerge para el grupo todo la relación que no fue posible a partir del uso del nombre (familia exponencial). Esta familia de funciones es interpretada como un corrimiento de la familia exponencial.
88.-*Doc.* ***¿Están de acuerdo con lo que ella está diciendo?*** *Dice que hay un corrimiento de las imágenes.*	Nuevamente pide conformidad del grupo de alumnos, busca saber si otros han distinguido el corrimiento y aquellos que no si lo consideran posible.
89.-A. Aparte habíamos visto traslados. 90.-A(Guillermo). O sea era una función exponencial y con el menos dos se corrió	Surge la memoria de clase. Un alumno alude al estudio de corrimientos en general.
91.-*Doc. Guillermo dice que originalmente era exponencial y que a todas las imágenes les bajaron dos* ***¿de acuerdo?*** 92.-A(varios). Sí	Interpela a la clase para dar cierre al tema.

La docente pregunta a la clase si la familia nueva de funciones que se está considerando es una familia de exponenciales. Cabe aclarar que en el trabajo que se realizó al comienzo de este grupo de problemas, la familia de funciones exponenciales fue caracterizada por la fórmula $f(x) = k \cdot a^x$. Se estudiaron características de esta familia de funciones. Se acordó que el eje x era una asíntota horizontal. Los alumnos utilizan este recurso para concluir que este nuevo grupo no pertenece al conjunto de funciones exponenciales. A su vez este grupo de alumnos ha trabajado con otras funciones el concepto de corrimiento (horizontal y vertical). Los alumnos podrían haber aceptado al inicio de este problema a esta familia representando corrimientos verticales de la familia exponencial como parte de la propia familia de exponenciales. También la docente podría aprovechar los comentarios de Noelia (que reconoce que la asíntota se corrió en una magnitud anunciada por B) o de Guillermo (que recuerda haber visto traslados) para sentenciar que este nuevo grupo engrosará el grupo de exponenciales siendo corrimientos de la familia vista originalmente. Sin embargo la profesora decide dejar por el momento a la familia de exponenciales bajo la definición que los alumnos traen como recurso, esto es, $f(x) = k \cdot a^x$ y acordar con toda la clase que este grupo de funciones $f(x) = k \cdot a^x + b$, resulta un corrimiento de la familia exponencial, anclada en las observaciones de los alumnos.

Quedará a cargo del docente ampliar el grupo original de funciones exponenciales a esta nueva familia que considere también los corrimientos. Provisoriamente esta familia de funciones ha quedado afuera de la familia exponencial y es decisión del docente mantener esta posición de la comunidad aula durante la discusión de este problema, dado que desde esta posición han analizado estos gráficos.

Episodio 14: El establecimiento de condiciones para un gráfico como punto de partida de un debate

93.-*Doc. Chicas, volvamos al grupo, una vez que definieron el signo de B ojo que no les pedían el número sino el signo y acá es positivo y acá es negativo (lo va escribiendo en el pizarrón donde tiene hechos los dibujos de cada una) ¿y ahora? ¿cómo siguen?* 94.-A. Que **como es creciente A es mayor a uno**.	La docente vuelve a pedir al grupo de alumnas que tenía la palabra que expliciten su razonamiento. La profesora no pregunta por el resultado sino por los pasos dados para llegar al resultado. Las alumnas presentan el resultado.
95.-A(Bruno). **No tiene nada que ver (con énfasis).** 96.-*Doc. Aja bueno, no tiene nada que ver,* ***se pelean entre ustedes dos.*** *Allá Aylén dijo que* ***A es mayor a uno porque es creciente****.*	Ha surgido una discrepancia, un punto de desacuerdo en la comunidad aula. Bruno no le habla directamente al grupo de alumnas pero tampoco se dirige directamente a la profesora. Está enfáticamente en desacuerdo y lo explicita a toda la clase.
97.-A(Bruno). **No tiene nada que ver**.(insiste con el mismo énfasis). 98.-*Doc. Bueno pero* ***si vos le decís que no tiene nada que ver le tenés que justificar por qué no tiene nada que ver****....*	La profesora comunica reglas de funcionamiento para toda la comunidad de producción. El que disiente debe fundamentar su disenso, dado que el que está comunicando también está fundamentando.
99.-A(Bruno). Porque es lo que dijimos en el problema siete. (Se genera un alboroto y todos hablan al unísono, en esta situación se ven todos los elementos de un debate) 100.-A(Marianela): Estamos usando las condiciones de las exponenciales	El pedido de la docente tiene eco en la clase. Cada alumno comienza a elaborar su propia posición. Los alumnos hablan entre sí y también hablan con la docente o entre grupos.
101.-A. Sabemos que K es positiva y crece... 102.-A(Bruno). **No tiene nada que ver, puede ser creciente con A entre cero y uno y K negativa, entonces no tiene nada que ver**.	La alumna que estaba exponiendo intenta organizar su explicación, pero Bruno no acuerda con su forma de explicar e invalida su argumentación mostrando su contra-argumento.
103.-*Doc.Vamos a ir por la contra. Vos decís que puede ser creciente con A entre cero y uno...*	La profesora - que se silenció durante algunos minutos - vuelve a mediar el debate que se ha organizado. Indica que su

104.-A(Bruno). Y, puede ser decreciente con A mayor a uno.	propuesta es "ir por la contra" en un lenguaje familiar.
105.-*Doc. Bueno pará, pero si es creciente con A entre cero y uno* ***entonces*** *K es negativa,* ***entonces*** *¿qué tipo de imágenes tiene? Absolutamente todas...serían negativas* 106.-A(Bruno). Sí.	La docente sigue el contra-argumento de Bruno desplegando así el conjunto de condiciones que surgen para los otros parámetros.
107.-*Doc. Si encima a las imágenes negativas les resto dos, ¿cómo quedan?* 108.-A(Bruno): Negativas, más. Pero yo no estoy discutiendo que en ese caso particular...	Continuando su deducción muestra el absurdo al que se llega: las imágenes serán negativas y no es el caso.
109.-*Doc. Pero* ***yo estoy discutiendo ESTE caso*** *(con énfasis).* 110.-A(Bruno). **Lo que yo estoy diciendo es que ella dice "La función es creciente entonces A es mayor a uno" y yo digo que eso no alcanza. Podría ser creciente y A menor a uno. (con más énfasis)**	Esto le permite a Bruno aclarar que su objeción está en la propia construcción deductiva de la alumna a la que le faltan condiciones que ha dejado implícitas en el dibujo. Sin esas condiciones la afirmación es falsa.

Episodio 15: Cierre del debate mediante la explicitación de la forma en la que se necesitan dar condiciones sobre los parámetros de la familia $f(x) = k \cdot a^x + b$.

111.-*Doc. Ah! Lo que vos estás reclamando es que ella dé otro parámetro que tiene que dar otro parámetro al mismo tiempo, que estos parámetros están enganchados.*	Se pone en evidancia para toda la clase la necesidad de completar las condiciones de parámetros que son libres y no quedan condicionados unos por otros.
112.-A. Primero tenés que imaginarte como era la función exponencial básica y después lo tenés que restar o sumar B. 113.-A(Marianela). Ver el corrimiento.	Los alumnos aportan el orden en el que pueden analizar los parámetros. Como han hecho antes.
114.-*Doc. Perfecto una vez que tenés.. ¿qué es K y qué es A?* 115.-A. K es dos, es la ordenada al origen. 116.-*Doc. No importa el nombre ¿pero cómo es?* 117.-A. Positiva y la función es creciente entonces A es mayor a uno.	La docente pospone los nombres de los parámetros que los alumnos mantienen de la familia anterior. Efectivamente ahora K ya no es la ordenada al origen pero la docente no se detiene en este punto.
118.-*Doc. Bueno ella tiró el valor de A mayor a uno. Lo que ella tiró es: A es mayor a uno porque es creciente. Lo que dicen los chicos es que eso no alcanza. No podés asegurar que A es mayor a uno solo porque la función es creciente.* ***Aunque me parece que ella dijo eso pero miró otra cosa****. No creo que ella haya dicho eso por como trabajaron en el grupo.*	La profesora da cuenta de su control de la producción de los grupos. En realidad se trata de una pérdida de un dato en el momento de la escritura del problema que se pone en evidencia en la comunicación a todos y no de un error conceptual.

119.-(Yanina). Lo dijo 120.-*Doc.* ***Bueno, y dicho está.*** (Risas)	Los alumnos dan cuenta de la relevancia de la comunicación en este momento de la clase, donde lo que está en juego es la organización expositiva de los alumnos.
121.-*Doc. Bueno vamos acá, a ver el grupo de las chicas, K y A en ese caso...* 122.-A. O sea B profe no sirve para nada, para molestar solo (Risas). Porque en realidad viene a ser lo mismo (en referencia al mismo caso de antes) 123.-*Doc. Bueno, o sea ¿qué pongo acá?* 124.-A. A va a estar entre cero y uno y K positivo.	Ahora que se ha mostrado el orden en el que se pueden considerar los parámetros. Se hace evidente que el parámetro B no modifica lo que ya hayan definido los valores de los otros parámetros, en cuanto al crecimiento de la función.
125.-*Doc. ¿**Está todo el mundo de acuerdo**?* 126.-(Bruno y otros,). **¡Sí!** (muy enfáticamente)	Para cerrar la revisión del problema la docente vuelve a consultar a toda la clase su acuerdo, el que esta vez es unánime.

Finalmente surgió una auténtica confrontación y debate entre los alumnos. No fue necesario que la docente señalara como en otras ocasiones la contraposición de argumentos. El propio alumno cuestionó la organización deductiva de la alumna que fundamentaba los valores de los parámetros.

Resulta interesante destacar que para que surja un intercambio de este tipo los alumnos deben necesariamente estar muy atentos a las producciones de sus compañeros. El docente se reserva entonces el rol de apoyar solidariamente a alguno o a ambos de los alumnos que debaten (como efectivamente lo hace en este caso).

El diálogo en esta clase continúa. La docente volverá a retomar esto último que ha surgido sobre el nombre de "ordenada al origen" que se le había dado al parámetro K y que en esta familia ya no lo representa. Momentáneamente lo ha dejado pasar para no frenar el debate que se había generado.

En todo momento han estado presentes las reconstrucciones de las producciones de los alumnos y los mismos alumnos en su rol de productores de conocimiento.

La puesta en común de los problemas ha sido un campo fértil para levantar cuestiones referidas a la formulación de generalizaciones y sus fundamentaciones respectivas. Desde el inicio la docente promovió en los alumnos la necesidad de superar su apoyatura en el conjunto de ejemplos para poder afirmar con certeza una regularidad encontrada en ese grupo de ejemplos.

El análisis de la génesis de la producción de ideas es el punto de partida para tratar cuestiones tales como: la certeza que aporta una fundamentación por su generalidad frente a la que aportan un grupo de ejemplos (Episodio 4), el estatuto de saberes que tienen las construcciones previas de los alumnos (Episodio 5), o también, la posibilidad de cambios de marcos no solo para resolver problemas sino también para producir fundamentaciones (Episodio 6). El análisis está propiciado por el tratamiento de la función exponencial y se va entramando con los aspectos conceptuales del tema.

8.4 ANÁLISIS DEL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE LA FUNDAMENTACIÓN

La puesta en común que hemos presentado va mucho más allá de compartir estrategias de resolución de un problema pues tiene también como objetivo compartir las formas de construcción de las propias fundamentaciones. Esto hace que nuevas preguntas se levanten sobre las primeras producciones:

a) Cómo fue el desarrollo hasta llegar a la solución;
b) Sobre qué idea iniciaron la búsqueda de la solución;
c) Si hubo equivocaciones o errores o marchas y contramarchas, y en tal caso, cómo descubren tales hechos y qué los hace cambiar de estrategia (porque escucharon a otros, porque discutieron entre ellos, porque se genera disenso, etc.)
d) En qué otros problemas se apoyaron para pensar el ejercicio en discusión;
e) En qué se diferencia o se parece la pregunta de un problema con la de otro problema, que puede eventualmente, servir de soporte.
f) Qué tipo de explicación - fundamentación les brinda certidumbre.

Una condición necesaria para realizar esta puesta en común es que el docente haya tomado contacto con los grupos durante su fase de trabajo grupal. Este conocimiento es el que le permite gestionar luego la puesta en común.

En esta propuesta de trabajo la docente está propiciando que los alumnos se sumerjan en una práctica de reflexión sobre las relaciones ya construidas. Vemos entonces que el docente construye-organiza un milieu para la emergencia de la fundamentación. Compartimos esta conceptualización de Barallobres (2004) sobre la validación intelectual en matemática, la que es su objeto de estudio: "Las pruebas intelectuales se separan de la acción; se inscriben en conductas lingüísticas que explican los objetos y sus propiedades, calculando sus relaciones. [....] Las pruebas intelectuales exigen un cambio de posición: el locutor debe distanciarse de la acción y del proceso efectivo de resolución del problema. El conocimiento hasta entonces acción, deviene objeto de reflexión, de discurso, de debate". Vemos que la producción de fundamentaciones comparte estas condiciones de producción con las pruebas intelectuales.

Otra condición necesaria es que los alumnos hayan tenido la intensidad de producción que hemos mostrado en términos de preguntas, resolución de problemas, búsqueda de relaciones, elaboración de conjeturas. Entendemos que este diálogo no es posible en cualquier momento del proyecto de enseñanza. Una piedra fundamental de este trabajo, es el enlace entre momentos de diálogo en el proceso inicial de producción, producción escrita y diálogos posteriores.

La organización de la clase que hemos presentado en este último diálogo, decidida por la docente en función de las necesidades de su grupo de alumnos, tiene las características de las situaciones de evocación relatadas por M. Perrin Glorian (hemos presentado dos tipos de situaciones de evocación en el Marco Teórico, nos referimos a la segunda de ellas). En este caso el nuevo sentido que se le da al tratamiento de este conjunto de problemas es el de analizar las producciones desde una perspectiva metamatemática para acercarse a los modos de producción del conocimiento y de razonamiento en matemática.

Durante este intercambio la docente también estuvo haciendo devoluciones, la validación de un conjunto de afirmaciones ha quedado del lado de los propios alumnos. Entendemos que esto posiciona a los alumnos exigiendo un control de su parte y estas reglas de juego, este contrato, es una condición que favorece la emergencia de la fundamentación.
Insistimos en las demandas que esta gestión de clase tiene para el docente y coincidimos con Hersan y Glorian quienes sostienen, en el caso de la práctica que ellas estudian:

> "However, the success of this practice depends upon the teacher's ability to manage the students' answers, to analyze their productions from the point of view of what they know but also of how it is possible to move on with the course, and to construct new situations on the spot. He is often in a state of uncertainty, much more than he would be in the lecture-

exercises format. This uncertainty may be a source of difficulties in time management, as we saw in the second lesson in grade 8."[150]

En la modelización de la enseñanza de la TS, Brousseau sostiene (1999: 9) "los esquemas desarrollados por los alumnos son tomados como objeto de conocimiento y tratados como saberes". Creemos que este capítulo da cuenta de la posibilidad de una gestión del docente que lleve adelante esta propuesta para el caso de la producción de fundamentaciones.

Hemos podido dar cuenta de algunas intervenciones docentes que el micro análisis no nos permitía exponer. En varios momentos de este diálogo hemos visto cómo la docente reelabora las producciones de sus alumnos a la luz de nuevas cuestiones.

Hemos visto también que con la intención de promover una mayor comprensión y enriquecer la producción de los alumnos la docente ofrece otros marcos de representación de los problemas, ha habido un fluido intercambio entre el marco algebraico y el marco gráfico en una y otra dirección.

El análisis nos ha permitido identificar - el episodio Nº2 del Diálogo 8.I que reunía los problemas de las bacterias, la luminosidad y los piojos resulta un ejemplo de ello - una forma en la que la docente apela a explicaciones producidas en un determinado contexto y las vuelve a analizar a la luz de un nuevo contexto en el que los problemas realizados posteriormente permiten resignificar un tramo del trabajo realizado anteriormente.

.

Estas observaciones constituyen un nuevo conjunto de respuestas a las preguntas que retomamos del análisis micro en este ahora mezzo análisis y que explicitamos al comienzo de este capítulo en referencia a ¿cómo entra en diálogo el docente con las producciones de sus alumnos? Y también ¿qué tipo de interacciones son aquellas que pueden estimular y sostener las fundamentaciones que los alumnos puedan producir a propósito de una cuestión matemática?

Finalmente, el mezzo análisis nos permitió dar cuenta de las intervenciones directamente relacionadas con el análisis de las fundamentaciones tal y como lo propusimos en el apartado 3.6 del Marco Teórico que en el capítulo 7 no habíamos desarrollado.

[150] Sin embargo, el éxito de esta práctica se apoya en la habilidad del docente de maniobrar las respuestas de los estudiantes, analizar sus producciones desde el punto de vista de su conocimiento y también de cómo es posible avanzar con el curso y construir nuevas situaciones sobre la marcha. Es está en un estado de incertidumbre mucho mayor que lo que estaría dando sus clases habituales bajo el formato explicación-ejercicios. Esta incertidumbre puede ser la fuente de dificultades en el manejo del tiempo, tal como hemos visto en el octavo grado. (1995.: 142

9. CONCLUSIONES

INTRODUCCIÓN

A lo largo de esta tesis nos hemos abocado a estudiar y presentar un conjunto de condiciones didácticas que propicien la emergencia de prácticas fundamentadas en la clase de matemática de la escuela media. Con tal objetivo hemos tomado como unidad de análisis la clase de matemática y en ella hemos analizado la ya conocida terna: profesor – saber – alumno, que en algunas situaciones transformamos en la dupla: comunidad aula – producción del saber.

Investigaciones anteriores nos impulsaron en un comienzo a definir una actividad con dos características esenciales: un fuerte correlato con la actividad del matemático en términos de producción matemática y su viabilidad en el aula entendida como un espectro amplio de situaciones para enmarcarla. Hemos conceptualizado así a la actividad de fundamentar como una posible transposición didáctica de la demostración en el aula de la escuela media.

Entendemos que de este modo le hemos dado estatuto a un conjunto específico de explicaciones que los alumnos están en condiciones de producir. Esto hace viable su entrada, su vida y su análisis en el aula. La enseñanza de esta práctica específica -la fundamentación - adquiere de este modo la substancia necesaria para ser pensada en términos de un problema de enseñanza sobre el cual plantearse preguntas y posibles condiciones. Fue necesario para ello recorrer diversos modos de razonamiento ya analizados por otros investigadores e invertir el esfuerzo y el riesgo en la definición de una práctica específica, esto es, fue necesario un recorte y una descripción pertinente para dar entrada a su consideración como un problema de enseñanza.

El proyecto desplegado en clase nos permite confirmar que esta práctica puede desarrollarse fuera del ámbito de la geometría y que constituye para los alumnos una actividad nueva pero posible. La función exponencial ha resultado un área fértil de trabajo de cara a la fundamentación. Los problemas con contexto plantearon a los alumnos el desafío de modelizar la realidad y ajustar, controlar, reformular sus respuestas para que ellas se adapten a los datos provistos. Los problemas abiertos han generado escenarios de incertidumbre que favorecieron la elaboración de justificaciones. La presencia del docente en interacción con los alumnos fue parte de las condiciones necesarias para que esta práctica se sostuviera.

Tomando a la TS como nuestro marco de referencia hemos mantenido permanentemente el proyecto de formular un conjunto de descripciones, resultados de este estudio que quedaran "cerca" de la clase (aún cuando en el camino necesariamente delineáramos algunas conclusiones teóricas). Esto significa que mantuvimos el objetivo de dar una respuesta pertinente para la realidad considerada: condiciones para la emergencia de una práctica de modo tal que nuestra propuesta tenga un fuerte correlato con los problemas considerados.

A continuación realizaremos una síntesis de los resultados que fuimos exponiendo durante el transcurso de esta tesis y de aquellos que recién ahora podemos - reuniendo el espectro de los anteriores – comenzar a desplegar y sostener.

9.1 Acerca de la posibilidad de abordar una enseñanza de la fundamentación en la escuela media

Una de las conclusiones primeras y más interesantes a la que hemos arribado tiene que ver con la fertilidad de propiciar un trabajo de anticipación y construcción colectiva con los docentes. Las docentes de este estudio, con las necesarias variaciones ancladas en su historia personal, pasaron por un proceso de reflexión profunda durante el taller que les dio otra visión de qué es posible en el aula a través de su compromiso y participación intelectual en la producción de una secuencia junto a todo el trabajo de anticipación realizado en conjunto.

Es en este sentido que pensamos que el taller resultó formador de una intencionalidad. Allí las docentes tuvieron siempre presentes a sus alumnos durante la producción de problemas y su análisis, esta cuestión fue vital, no podemos dejar de mencionarla a la hora de las conclusiones. Sin embargo, enmarcados en ese contexto real de sus respectivos alumnos las docentes, desarrollaron prácticas nuevas imaginando en sus alumnos un conjunto de posibles y al llevarlas al aula se encontraron con un entramado de hechos previstos junto a otros no previstos. Las preguntas que tales hechos generaron volvieron al taller reciclando las conjeturas iniciales. La presencia del observador fue aprovechada entonces para compartir con las docentes sus relatos y sus impresiones. El proceso de producción de problemas se enriqueció de este modo con el análisis a posteriori. Hemos dado cuenta de ello en el capítulo 6. El desarrollo de esta práctica de reflexión dio a las docentes la posibilidad de escuchar de otro modo las explicaciones de sus alumnos. Estuvimos lejos de construir en el taller un repertorio de intervenciones; una y otra vez hemos distinguido entre la intencionalidad problematizada en el espacio del taller y la operacionalización de la misma producida por las docentes durante la gestión de clases.

Las docentes que participaron consideran que todo este juego entre anticipaciones, realizaciones en aula y análisis posteriores las ha ubicado en una posición más fortalecida y relacionan explícitamente este posicionamiento con la actitud de compromiso intelectual que tuvo la mayoría de los alumnos. Este es para nosotros un resultado importante que podríamos formular en términos de una hipótesis a explorar: el trabajo de elaboración compartido de un proyecto de enseñanza con profesores constituye una vía para que ellos tomen conciencia de la estrecha relación entre su propia intención de que los alumnos produzcan y la posibilidad efectiva de que los estudiantes adopten una posición productora.

A partir del micro-análisis de la gestión de clase **hemos podido describir un conjunto de intervenciones que las docentes construyeron y que podemos sintetizar en dos planos:** aquellas que **señalan funciones asignables a la fundamentación** y aquellas que **organizan el aspecto social de la fundamentación**.

En referencia a las primeras hemos señalado que el docente puede comunicar en acto que la fundamentación se constituye en un modo de **validar las afirmaciones, conjeturas y o posiciones** de los alumnos, contribuye a la **construcción y elaboración de ideas** y, finalmente, permite **sistematizar el conocimiento construido**. En cuanto a la función de validar encontramos que las fundamentaciones **permiten explicar el por qué de las afirmaciones** en juego en un buen número de casos, con esto queremos señalar que la validación se alimenta en muchos casos de la comprensión de las razones que subyacen a la afirmación. Adicionalmente acompaña a cada una de las funciones la función de comunicación expuesta por De Villiers para la demostración en el contexto oral en el que hemos trabajado. Existen otras funciones como las de descubrimiento y exploración que podrán ser indagadas en futuras investigaciones. Para las funciones que hemos estudiado en esta tesis nos parece posible continuar la investigación en relación a otros posibles modos en los que el docente puede comunicarlas a sus alumnos y enseñarlas.

En referencia a las segundas, las intervenciones que dan cuenta del aspecto social de la fundamentación hemos destacado la **reconstrucción** de explicaciones de los alumnos, la **ampliación** de tales explicaciones, la **jerarquización y habilitación** de los alumnos en tanto productores de conocimientos, la **regulación de la asimetría** por parte del docente y la **construcción de un debate**. Esta caracterización responde a nuestro objetivo de **estudiar las intervenciones del docente en dos de las esferas que nos propusimos**: la de las **operaciones de transformación de las producciones de los alumnos** y la de la **promoción de interacciones entre los alumnos** que consoliden a la comunidad aula como comunidad productora.

En todos los casos mencionados hemos visto que cada docente las comunica en acto, poniéndolas en juego con sus alumnos en situaciones de diálogo. El contexto oral ha sido el telón de fondo para todo este despliegue. En todo momento el docente sostiene, enmarca, y tiene distintos modos de estar presente regulando su asimetría.

El mezzo análisis nos dio entrada a otra dimensión en la que deseábamos mirar al docente: **la forma en la que el docente puede elaborar junto a los alumnos una actividad de reflexión sobre la producción de la fundamentación.**

En referencia a este análisis hemos podido marcar algunas intervenciones docentes que el micro análisis no nos permitía descubrir. Hemos visto cómo la docente coordina la reelaboración de las producciones de sus alumnos a la luz de nuevas cuestiones. La oportunidad de volver a pensar y discutir sobre problemas realizados en un cierto momento a la luz de otros que se han realizado posteriormente ofrece a los alumnos la posibilidad de producir nuevos fundamentos para cuestiones que han quedado pendientes en un cierto momento. Las intervenciones que consideramos en el mezzo análisis están atravesadas por una dimensión temporal que avanza y retrocede convocando a retomar lo ya pensado para volverlo a pensar en el marco de ideas que se han elaborado con posterioridad. Hemos señalado también que la docente ofrece otros **marcos de representación** de los problemas, para el caso de nuestro estudio el intercambio de marcos ocurrió entre el algebraico y el gráfico, habilitando otras herramientas para utilizar en los problemas.

Asimismo hemos descripto en el mezzo análisis un trabajo de la docente que apunta a discutir con los alumnos la génesis de la producción de ideas para tratar cuestiones como la certeza que aporta una fundamentación por su generalidad frente a los ejemplos o el estatuto de saberes que tienen las construcciones previas de los alumnos. En este proceso, el análisis está propiciado por el tratamiento de la función exponencial y se va entramando con los aspectos conceptuales del tema. Este trabajo permite analizar las producciones desde una perspectiva metamatemática y constituye un modo de acercar a los alumnos a los modos de pensar y producir en esta disciplina.

Los contextos que se han utilizado para los primeros problemas han servido a los alumnos como generador de preguntas y también como el control final de las respuestas. Los problemas de modelización constituyeron para este investigación un marco privilegiado para involucrar a los alumnos en la tarea de producir explicaciones.

La observación de clases nos permitió también confirmar que los alumnos se interesan por una convocatoria al trabajo intelectual. Los diálogos han dado cuenta de su interés en el trabajo propuesto. La propuesta de un trabajo oral al inicio junto con una actividad contextualizada resultó fértil para la entrada de los alumnos en estas prácticas.
El conflicto en la producción de razonamientos deductivos que un importante número de investigaciones considera ha estado presente también en este proyecto. Nuestra impresión es que la posibilidad de apoyarse en el contexto desarrollado en la primera parte de la secuencia ha permitido a los alumnos tener marcos de referencia a utilizar para esta segunda fase de construcción descontextualizada. Ha sido útil tanto a los alumnos como a las docentes. Este hecho estuvo presente en el diseño y esto dio a las docente herramientas con las cuales gestionar los conflictos cognitivos de sus alumnos.

9.2 Algunas reflexiones sobre la TS a la luz de nuestro estudio

El conjunto de problemas y actividades que hemos diseñado responden en algunos aspectos con más y en otros con menos fidelidad a algunas de las elaboraciones que componen[151] la TS, eventualmente consideramos que hemos privilegiado ubicarnos junto a

[151] Hemos desarrollado problemas que los alumnos trabajaron en una fase adidáctica durante la fase de trabajo grupal y que luego finalizaron con una puesta en común, los que tienen elementos de las situaciones de formulación y de validación pero que en sí no han constituido fielmente ni las unas ni las otras. Sin

las docentes al propiciar una construcción conjunta como una forma potente de llevar adelante el proyecto de enseñanza.

Queremos plantear la necesidad de concebir un contexto para la enseñanza con una presencia del docente autorregulando su asimetría de conocimientos. Creemos que es necesario estudiar, analizar, problematizar el accionar docente. En este estudio lo hemos hecho a propósito de la enseñanza de la fundamentación. Pensamos que las preguntas relacionadas con el rol del docente y sus intervenciones se pueden llevar a otros escenarios de aprendizaje en otros proyectos de enseñanza.

En nuestra investigación diseñamos una secuencia de clase donde los alumnos son convocados a una primera actividad de trabajo grupal a partir de consignas entregadas para su resolución.   Entendemos que esa es una fase adidáctica de la enseñanza en tanto los alumnos se ubican en el protagonismo de tal actividad. ¿qué ocurre con el docente en esa fase de trabajo? Desde nuestro punto de vista el docente sostiene la escena. El docente interactúa con los alumnos en la medida que esto sea necesario para asegurar la actividad de los alumnos, pero sus intervenciones tienen la característica de una devolución hacia los alumnos de la responsabilidad por la producción y eso, una vez más, los alumnos lo saben. Para que esto sea posible el docente necesita comprender las relaciones que los alumnos están armando y tener un repertorio de las mismas anticipado y problematizado de modo tal de poder interactuar con tales emergentes. Nuestro trabajo muestra que para asegurar la actividad de los alumnos el docente está lejos de "llamarse a silencio" o de "negarse a contestar".

Por el contrario hemos mostrado que algunas intervenciones docentes pueden ser pensadas como parte del milieu del alumno en la medida en que ofrecen, frente a la pregunta que el estudiante se formula sobre la validez o la pertinencia de una cierta relación que ha utilizado, un conjunto de relaciones que el alumno ya ha producido y que el docente ayuda a coordinar. Estas retroacciones fueron en gran medida discutidas a priori por las docentes en el taller (una de ellas era la respuesta acerca de la proporcionalidad para el 10% que los alumnos postulaban como pérdida de la luminosidad a medio metro).

embargo el conocimiento construido tuvo la evolución que antes mencionamos: emergió a partir de la necesidad de utilizarlo y se fue haciendo explícito en las sucesivas reformulaciones en la medida que se puso en situación de puesta en común y debate.

Asimismo hemos señalado situaciones en las que entendemos que el docente organiza el *milieu* de los alumnos ayudando a que estén presentes las relaciones que considera necesarias para el trabajo que va a proponer. Hemos interpretado que estas intervenciones forman parte de la devolución.

Con respecto a la noción de *milieu* consideramos junto con Barallobres (2005) que la enseñanza de una práctica como la fundamentación en este nivel de la enseñanza abarca un escenario inmensamente diverso como para diseñar un milieu preparado para responder a todo el espectro de posibles producciones de los alumnos. No deseamos anclar la discusión en la cuestión de si podemos decir que tal diseño es o no alcanzable. No nos parece una discusión fértil. Preferimos como Glorian (2005: 145) lo hace decir que la evidencia mostrada en un importante conjunto de investigaciones de la didáctica habla de pocas construcciones logradas con un milieu material y objetivo. Y aún cuando no descartamos la posibilidad de construirlo a futuro, necesitamos considerar que hoy no hay tal milieu a disposición y que frente a la necesidad de investigar los problemas reales y concretos de la enseñanza y sus posibles desarrollos podemos decir que algunas situaciones didácticas como las que hemos desarrollado en esta investigación tienen un cierto potencial adidáctico.

9.3 Oralidad y escritura en la emergencia de la fundamentación

Hemos planteado el trabajo oral como el contexto propicio para la emergencia de la fundamentación y creemos que el análisis de todo este proyecto da cuenta de la riqueza de esta propuesta. Al mismo tiempo notamos que la escritura es un recurso que se va utilizando en distintos momentos y que no solo es necesaria sino que al mismo tiempo es un insumo para otras fases de trabajo que se producirán nuevamente en contextos de oralidad. La amalgama, entonces de la oralidad con la escritura parece fundamental por varias razones: durante los procesos de escritura los alumnos enfatizan su posición reflexiva y pueden auto-observarse. Advertimos esta situación en muchos grupos, algunos trabajaban preponderantemente en la oralidad, otros se abocaban a escribir “todo lo que se pensaba” o algo de ello. Algunos escribían mientras debatían, otro debatían primero y dejaban la escritura para el momento de haber logrado un acuerdo. Estas estrategias nos hablan de distintas conformaciones del trabajo matemático por parte de los alumnos, no pretendemos decir que hay uno solo ni que se trata de homogeneizar este tipo de prácticas pero tomamos de estas observaciones la necesidad de combinar la oralidad con la escritura. Incluso cuando el objetivo último reside en el trabajo oral la escritura se convierte en un pie de apoyo para clarificar las ideas.

También la escritura en este proceso de producción oral permite atrapar ideas que luego se desvanecen, por supuesto que en esta otra situación es importante notar que si las ideas están muy poco exploradas tal vez la escritura sea una traba para elaborarlas, el equilibrio entre la escritura y la oralidad no es evidente.

En este proyecto hemos ideado una primera fase de trabajo oral en pequeños grupos, lo que entendemos puede pensarse como la fase adidáctica de la situación didáctica.

Luego una fase de discusión o puesta en común donde se entabla una comunicación de las producciones y sobre tal comunicación se inicia un proceso de reflexión consistente en:

a. Debatir y confrontar producciones que se contraponen.
b. Explicitar las estrategias desarrolladas: qué preguntas se plantearon los alumnos para desarrollar tales producciones, qué problemas encontraron, qué nociones los ayudaron o precisaron.
c. Compararlas a los efectos de establecer: cuál es la más general, cuál incluye a otras, cómo fue la génesis de tal producción, qué errores cometieron los alumnos (pero relatados por los propios alumnos, con su propia visión).
d. Qué nuevas preguntas si cabe se pueden formular a partir de la comparación de tales producciones.

En este trabajo exploratorio hemos desarrollado estas dos fases. Sin embargo en función de nuestra observación, análisis junto a las profesoras y algunas experiencias locales producidas por las propias docentes (quienes tuvieron libertad de maniobrar en sus clases su propia gestión y eso enriqueció la investigación sin lugar a dudas) creemos que será interesante en futuras investigaciones propiciar otras dos fases, esta vez escritas que se intercalen entre ellas.

I) Una fase de producción escrita de los grupos de alumnos donde los grupos realizan una escritura colectiva que captura y guarda las ideas desarrolladas en cada grupo, luego de la fase adidáctica. Sobre estos escritos el docente podrá tomar contacto, utilizarlo para la fase de puesta en común y también realizar retroacciones por escrito.

II) Una última fase de escritura individual, luego de la puesta en común, donde cada alumno recupere los problemas trabajados y las conclusiones a las que se han arribado.

Entendemos que la alternancia entre la oralidad y la producción escrita favorecerá sin duda los procesos de aprendizaje. Luego de alguna de estas alternativas podrá ocurrir un momento de institucionalización.

9.4 ¿Qué promueve la emergencia de la fundamentación?

Como hemos mencionado en el capítulo 6 la secuencia diseñada es portadora de teoría. La actividad de docentes y alumnos - por el lado del docente la gestión de la propia secuencia en términos de los tiempos de la clase, por el lado de los alumnos la producción de resoluciones a los problemas - hace efectiva la construcción de los conocimientos. Dicha construcción tiene un entramado de formulación de preguntas, elaboración de conjeturas y **fundamentaciones** que las confirmen o las descarten.

La fundamentación surge de este modo asociada a la producción de conocimiento. No se trata de un pedido puntual del docente o de la consigna de trabajo, se trata de un conjunto de resortes que activan la necesidad de producir explicaciones. Se trata también de un ámbito donde las explicaciones se asocian a la participación de un sujeto intelectualmente comprometido. Se ha conformado un milieu para la emergencia de la fundamentación dotado de la secuencia, la dinámica de clase y la posición del docente que promueve en los alumnos la consideración y la necesidad de un trabajo de tales características.

Nos hemos propuesto y así lo explicitamos en nuestro marco teórico analizar los sentidos de la fundamentación que los docentes podrían abordar con los alumnos en el proceso de enseñanza y vemos que ellos propician prácticas fundamentadas. Los hemos presentado en el apartado 9.1 de estas conclusiones.

Como hemos relatado en el Capítulo 5 los problemas con condiciones y los problemas abiertos abrieron el campo de la exploración y elaboración de justificaciones por parte de los alumnos. Creemos que pueden existir otros problemas que den cabida a esta actividad pero en nuestra experiencia el grupo de problemas con condiciones fue el que activó la exploración con mayor énfasis. En muchos casos esta exploración no era azarosa, sino que estaba comandada por una intención de control materializada en los ejemplos elegidos. La elección de determinados ejemplos se realizaba en función de preguntas que los alumnos querían responder, funcionando de este modo una dialéctica entre preguntas y exploraciones, lo que organizó un escenario propicio para la fundamentación. Las preguntas analizadas a través de los ejemplos dieron lugar a la formulación de hipótesis y conjeturas. A su vez el análisis de los ejemplos dio lugar a procesos de abstracción y generalización que se tradujeron en fundamentaciones.

Hemos observado de este modo la conformación de dos diálogos o dialécticas: uno entre la formulación de preguntas y la exploración y otro entre la producción de ejemplos y las fundamentaciones que los alumnos producen como resultado de un proceso de generalización y abstracción que surge del análisis de los ejemplos. El puente marcado entre la exploración y la búsqueda de ejemplos conecta así conjeturas y fundamentaciones.

EXPLORACIÓN	FORMULACIÓN DE PREGUNTAS Y CONJETURAS
EJEMPLOS "QUE EXPLICAN" PRODUCTO DE LA EXPLORACIÓN	FUNDAMENTACIONES PRODUCTO DE LA ABSTRACCIÓN/GENERALIZACIÓN QUE SE PRODUCE DESDE LOS EJEMPLOS

9.5 Las fundamentaciones producidas. Los límites de esta investigación.

Al comienzo de esta investigación delineamos algunas características que concebimos para la fundamentación: su intención de dar cuenta del por qué de una afirmación o proceso de resolución de un problema, el aspecto social vinculado a la comunidad matemática de referencia que para nosotros fue el aula, el requisito de generalidad en la explicación, el no requisito del uso de un lenguaje formal, los conocimientos sobre los que se puede apoyar o a los que puede recurrir, distintos de los conocimientos fuertemente institucionalizados de la matemática que utiliza la demostración. Llegamos incluso a precisar un tipo específico de fundamentaciones: las que tienen estructura deductiva, en ellas encontramos una semejanza marcada con la demostración.

Esta conceptualización fue operativa a la investigación, era necesaria para poder ponerla a funcionar en clase. Sin embargo entendemos que este análisis puede profundizarse. Queda abierto este campo para futuras investigaciones.

9.6 La tensión en el docente: entre la producción de los alumnos y los tiempos del currículum

No se nos pasa por alto que es difícil comandar este tipo de trabajo –lo hemos mencionado ya- y sostener a su vez los tiempos de clase. Sujetarse a las producciones de los alumnos puede hacer que la clase se inunde de preguntas, cuestionamientos, posiciones y producciones distintas que pugnan por ser escuchadas. Es por eso que la gestión docente es vital, es por eso que la intervención docente que reconstruye, recuerda el objetivo de la clase, renueva las preguntas que se tenían, marca las conclusiones alcanzadas es el gran elemento organizador. Notamos en este discurso docente un eje organizador diferente al de la clase tradicional. Mientras en esta última el eje organizador viene dado por los conocimientos matemáticos axiomáticamente organizados, en la propuesta que hemos analizado el eje organizador está dado por la construcción de conocimiento que la comunidad aula está produciendo. De este modo el docente pone en primer plano a los alumnos durante toda esta construcción y este juego entendemos que es una forma de **adidacticidad** posible, en tanto los alumnos se sostienen en su rol de productores de ideas. Por su parte el docente - que debe autorregular su asimetría de conocimientos - es el referente del conocimiento disciplinar. Se construye de este modo una conceptualización de la autoridad del docente que no es ciertamente la tradicional.

9.7 A modo de cierre

Entendemos que todo este punteo de cuestiones que hemos desarrollado en este capítulo de Conclusiones da respuesta satisfactoria a nuestras preguntas motoras iniciales aún cuando es evidente que ha ocurrido una importante transformación en ellas. Nos parece importante dar cuenta de esta transformación pues entendemos que este es el inexorable resultado de un proceso de investigación y no deseamos ocultarlo. Por el contrario, hacerlo evidente es una forma de ser consistente con nuestra propia investigación.

10. BIBLIOGRAFÍA

Alagia, H.(2005): "Razonamiento y Demostración" conferencia dictada en la Reunión UMA/REM, Salta, 2005.

Alagia, H.; Bressan, A. y Sadovsky, P.(2005): *"Reflexiones teóricas para la Educación Matemática"*. Libros del Zorzal. Bs. As.

Arcavi, A. (1994): "Symbol sense: Informal sense-making in Formal Mathematics". For the Learning of Mathematics. Vol 14. (3) 24-35.

Balacheff, N. (1987): "Procesos de Prueba y situaciones de validación". Educational Studies in Mathematics. 18. 147-176.

Balacheff, N. (1988): "Le contrat et la coutume: deux registres des interactions didactiques". Actas del Primer Coloquio Franco Alemán de Didáctica de las Matemáticas y de la informática. Grenoble. La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. (1999): Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate... Preuve: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Prof. http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html

Balacheff, N. (2000): "Procesos de Prueba en los alumnos de matemáticas". Una empresa docente. Colombia.

Balacheff, N. (2008): "The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof". ZDM. The international Journal on Mathematics Education. Vol 40. Nº 3. 501-512.

Barallobres G. (2004): "La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre". Recherches en didactique des Mathématiques 24 (2/3) 285-328

Bell, A. (1976): « A study of pupils' proof – explanations in mathematical situations », Education Studies in Mathematics 7, 23-40.

Bell, A. (1979): "The learning of process aspectcs of mathematics". Educational Studies in Mathematics. 10. 361-387

Boero, P. (1999): "Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education". International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof 07/08. http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html. Acceso: enero 2010.

Boero, P.; Douek, N. ; y Ferrari, P. (2002): "Developing mastery of natural language: Approaches to some theoretical aspects of mathematics". En Handbook of International Research in Mathematics Education. Second Edition. Routledge. N. York.

Boero, P.; Garuti, R. & Marioti, M.:(1996): "Some dynamic mental proceses underlying producing and proving conjectures". Proceedings of PME-XX. Vol 2. 121-128.

Brousseau, G.(1986): "Fondaments et Méthodes de la Didactique des mathématiques". Recherches en didactiques de mathématiques, Vol 7. Nº 2. 33-115.

Brousseau, G.(1997): "Theory of Didactical Situations in Mathematics". Kluwer Academic Publishers. London.

Brousseau, G. (2000): "Educación y didáctica de las matemáticas". Revista: Educación Matemática. México. Nº12. Vol.1. 5-39.

Brousseau, G. (2004): "Introducción al estudio de la enseñanza del razonamiento y de la prueba: las paradojas". http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/04Ete/04EteThemeES.html

Brousseau, G. (2007): "Introducción al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas". Ed. El Zorzal. Buenos Aires.

Brousseau, G. y Centeno, J. (1991): "Rôle de la mémoire didactique de l´enseignant". Recherches en Didactique des mathématiques. Vol. 11/2.3. 167-210. La Pensée Sauvage, Grenoble

Brousseau, G. y Gibel, P. (2005): "Didactical Handling of Student's Reasoning Processes in Problem Solving Situations". Educational Studies in Mathematicas. 59. 13-58.

Burbules, N. (1993): "El diálogo en la ensañanza. Teoría y Práctica". Amorrortu Editores. Buenos Aires.

Charnay, R. (1994): "Aprender por medio de la resolución de problemas", en Saiz, I. , Parra, M. (comps) Didáctica de Matemáticas, Paidós. Buenos Aires.

Chevallard, Y. (1985): "La transposición didáctica". Grenoble. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989): "Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège- deuxième partie: perspectives curriculaires: la notion de modélisation". Petit x 19. 43-72.

Davis, P. & Hersch, R. (1981): "The Mathematical Experience". Birkhäuser. Boston.

De Villiers, M. (1990): "The role and function of proof in mathematics", Pythagoras 24, 17-24.

Douady, R. (1986). "Jeux de cadres et dialectique outil-objet". Recherches en Didactique des Mathématiques. 7(2). 5-31

Duval R. (1990): "Pour une approche cognitive de l'argumentation". Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 3. 195-221. Strasbourg : IREM de Strasbourg.

Duval R. (1991) : »Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration ». Educational Studies in Mathematics. Vol. 22. Nº 3. 233-261.

Duval R. (2000) : « Basics Issues for Research in Mathematics Education ». Proceedings of the Conference of the International Group for the Psichology of Mathematics Education, PME. Vol.(1).

Duval R. (2002) : « Proof understanding in mathematics : what ways for students ? ». Proceedings of 2002 International Conference on Mathematics : Understanding Proving and Proving tu Understand. 61-77.

Gálvez, G. (1994) : « La didáctica de las matemáticas" en Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones. Parra C. y Saiz I. (comps.) Buenos Aires. Paidós.

Galbraith, P. (1981): "Aspects of proving : a clinical investigation of process". Educational Studies in Mathematics. 12. 1-29.

Gerring, J. (2004): "What is a Case Study ad What is it Good for". American Political Science Review. Vol. 98, Nº 2. Mayo 2004.

Gonobolin, F. (1954): "Pupils' Comprehension of Geometric Proofs" en Wilson J. (Ed) (1975) Soviets Studies in the Psychology of Learning and Teaching of Mathematics. Vol XII: Problems of Instruction. Chicago. University of Chicago.

Grugeon, B.; (1995) "Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves a l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BEP et Première B". Thèse de doctorat, Université de Paris VII.

Gutiérrez Rodríguez, A(2005).: "Aspectos Metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica". Paper presentado en el Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática, SEIEM, Septiembre de 2005.

Hanna, G. (1996): "The Ongoing Value of Proof". Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vigésima Conferencia. Vol I Puig, L. and Gutierrez, A. (Eds.), 1, 1-21 - 1-34.Valencia. España.

Hanna, G. (2000) : " Proof, explanation and exploration : an overview". Educational Studies in Mathematics. 44. 5-23.

Hanna, G. y de Villiers, M.(2008). ICMI 19: "Proof and proving in mathematics education". ZDM – The International Journal on Mathematics Education. 40. 329-336.

Hanna, G. y Hahnke, H. (1996): "Proof and proving", en A. Bishop, K. Clements, C.

Herbst. P. (2002): “Engaging students in proving: a double bind on the teacher”. Journal for Research in Mathematics Education”. 2002. Vol 33. Nº 3. 176-203.

Herbst, P.; Miyakawa T. (2008) : « When, how and why prove theorems ? A methodology for studying the perspective of geometry teachers ». ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40, 480-502.

Heinze, A. Et al (2008): “Strategies to foster students’ competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany”. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40, 443-453.

Herbst, P. (2002): “Engaging students in proving: a double bind on the teacher”. Journal for Research in Mathematics Education. Vol 33. Nº 3. 176-203.

Hersant, M. Y Perrin-Glorian, M. (2005)“Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations”. Educational Studies in Mathematics. 59. 113-151.

Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), International Handbook of Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 877-908.

Kilpatrick, J., Schlesinger, B. y Silver, E. (1995): “Thinking through Mathematics. Fostering Inquiry and Communication in Mathematics Classrooms”. College Entrance Examination Board. New York.

Klimovsky, G. (1994): “Las desventuras del conocimiento científico. Una introducción a la epistemología”. A-Z Editora. Buenos Aires.

Klimovsky, G. y Bodio, G. (2005): “Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: una introducción”. A-Z Editora. Buenos Aires

Knipping, C. (2001): “Towards a comparative analysis of proof teaching”. Proof. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. Automne 2001.

Knipping, C. (2008): “A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes”. ZDM - The International Journal on Mathematics Education. 40. 427-441.

Laborde, C y Perrin-Glorian, M.: (2005) “Teaching situations as object of research: empirical studies within theoretical studies”. Educational Studies in Mathematics. 59. 1-12.

Lakatos, I. (1976): “Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático”. Alianza Universidad.

Margolinas, C. (1993): “De l’importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.” Grenoble: La Pensée Sauvage.

Moore, R. (1994) : " Making the transition to Formal Proof". Educational Studies in Mathematics. 27. 249-266.

Orus, P. (1992): "Le raisonnement des élèves dans la relation didactique: effects d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire". Tesis de doctorado. Universidad Bordeaux I.

Panizza, M. (2005): Razonar y Conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos. Libros del Zorzal. Buenos Aires.

Parra, C. y Saiz, I. (1994): (comps.) "Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones". Paidós Educador. Bs. As.

Polya, G.(1945): "How to solve it". Princeton University Press. New Jersey.

Polya, G. (1957): "Mathematics and plausible reasoning". Princeton University Press. New Jersey.

Pedemonte, B. (2000): "Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics". International Newsletter of the teaching and learning of mathematical proof. On-line Material. Noviembre/Diciembre

Pedemonte, B. (2005): "Quelques outils pour l'analyse c.ognitive du rapport entre argumentation et demonstration". Recherches en Didactique des Mathématiques. 25(3). 313-348

Pedemonte, B. (2007): "How can the relationship between argumentation and proof be analysed?" Educational Studies in Mathematics. 66. (1). 23-41.

Pedemonte, B. (2008): "Argumentation and algebraic proof". ZDM. The International Journal on Mathematics Education. Vol 40. Nº 3. 385-400.

Perrin Glorian, M.J. (1993): "Questions Didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des clases "faibles"". Recherches en Didactique des mathématiques. Vol 13/1.2. 5-118. La Pensée Sauvage, Grenoble

Raman, M. (2002): "Proof and justification in collegiate Calculus". Tesis Doctoral. University of California. Berkeley.

Reiss, K. et al (2008): "Reasoning and proof in geometry: effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples" ZDM. The international Journal on Mathematics Education Vol. 40. Nº 3. 455-467.

Rockwell, Elsie(2009): "La experiencia etnográfica. Historia y cultura en los procesos educativos". Paidós. Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2005): "Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos". Libros del Zorzal. Buenos Aires.

Sadovsky, P.; Sessa, C. (2004): "The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a milieu for the emergence of new question". Educational Sudies in Mathematics. 59. 85-112.

Schoenfeld, A.(2000): "Purposes and Methods of Research in Mathematics Education". Notices of the American Mathematical Society. Vol 47. Nº 6. June/July.

Sessa, C. (2005): "Iniciación al estudio didáctico del Algebra. Orígenes y Perspectivas". Libros del Zorzal. Buenos Aires.

Tall, D. (1995): "Cognitive development, representations and proof". Paper presentado en la conferencia sobre *Justifying and Proving in School Mathematics*. Institute of Education, London, Diciembre 1995. 27-38.

Thurston, William P. (1994): "On Proof And Progress in Mathematics". Bulletin of the American Mathematical Society. 30(2). 161-177.

Toulmin, S. (1958): "The Uses of Argument". Cambridge University Press. London.

Vinner, S. (1983): « The notion on proof: Some aspects of students' view at the senior high level". Paper presentado en el 7º International Conference of the Psychology of Mathematics Education, Rehovot, Israel.

Yin, R.(1993): "Applications of case study research". Sage Publications. London.

Young, Robert (1993): "Teoría crítica de la educación y discurso en el aula". Paidós. Barcelona

Documentos

Matemática: Contenidos para el Nivel Medio. Documento desarrollado por el Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Dirección General de Planeamiento Educativo de la Dirección de Currícula y Enseñanza.
http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/programa_matematica.pdf . Último acceso. Mayo 2010.

APÉNDICE 1: La Secuencia

SECUENCIA DE TRABAJO SOBRE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DESARROLLADA EN EL TALLER CON DOCENTES.

Los comentarios dirigidos a los docentes van indicados en “negrita”.

1) ÁREA DE CUADRADOS (1)

En esta situación de clase se propone que el docente muestre en pizarrón la construcción de la nueva figura instando a los alumnos a decidir qué tipo de polígono queda construido y a justificar por qué. La intención de esta tarea conjunta es por un lado la de proponer estrategias de trabajo que luego puedan ser reutilizadas por los alumnos para resolver la medida de los sucesivos cuadrados y por otro iniciar el trabajo de fundamentación. Luego entrega el enunciado del problema.

Dado un cuadrado realizamos una construcción de un nuevo cuadrado a partir de la figura. A esta construcción la denominaremos “**el paso**”: Por cada vértice se traza una recta paralela a la diagonal del cuadrado inicial que no pasa por ese vértice.

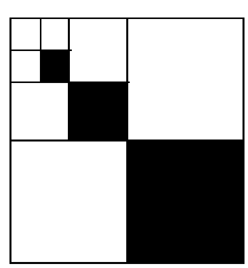
a. Compara el área del cuadrado obtenido en el paso 1 con el área del cuadrado original.
b. Si se repite el paso varias veces ¿podrías indicar cómo serán las áreas de los cuadrados que se van obteniendo respecto del cuadrado original?
c. Si llamamos ***A*** al área del cuadrado original indica qué área tendrá el cuadrado generado en el paso 17.
d. ¿Se podría dar una expresión generalizada del área del cuadrado generado en el **paso *n***? (también en este caso el cuadrado original tienen área ***A***).

Optativo

e. Indicar en qué porcentaje aumentó el área en cada paso.

2) ÁREA DE CUADRADOS (2)

Observa la siguiente figura



Al cuadrado inicial de área 1 se le trazaron las medianas y se sombreó el cuadrado inferior derecho. En este ejercicio se llama "**paso**" al trazado de las medianas y al sombreado del cuadrado inferior derecho. A partir de cada paso se continúa con el cuadrado opuesto como se ve en el dibujo.

a. ¿Cuál es el área del cuadrado que queda sombreado en el primer paso, en el segundo y en el cuarto?
b. ¿Habrá algún paso en el que se obtiene un cuadrado de área 1/60?
c. Si sabemos que el área que quedó sombreada en el séptimo paso es $\frac{1}{16384}$ ¿cuál será el área sombreada en su siguiente paso? ¿y en su anterior?
d. ¿Habrá una expresión general que me permita saber el área de los sucesivos cuadraditos sombreados según los **pasos** que se hicieron?
e. ¿Podrías contestar la pregunta anterior si el cuadrado original tiene área ***A***?

Optativos

f. Si el trabajo realizado sobre el cuadrado de área 1 fuera hecho sobre otro cuadrado de área 1024 ¿podrías contestar las mismas preguntas a partir de tus respuestas anteriores?

g. Sobre un cuadrado, de área desconocida, se tuvieron que realizar 10 pasos como los realizados para llegar a un cuadrado sombreado de área 1. ¿Te alcanza este dato para conocer el área del cuadrado inicial?

h. ¿Es posible inventar un valor A para el área del cuadrado original de manera que en alguno de los pasos se obtenga un cuadradito cuya área sea 1/60? ¿Cuánto tendría que valer A y cuál sería el paso?

3) LOS PIOJOS

En la cabeza de un niño se coloca un número determinado de piojos a las 10 de la mañana del día lunes 05/05/08 y se observa la evolución de la población de piojos mediante un sofisticado procedimiento computarizado (o sea, los piojos se pueden contar ¡con precisión!).
Transcurridos 10 días el niño convive con 180 piojos en su cabeza. Si se sabe que una población cualquiera de piojos tarda 5 días en triplicarse
a.- ¿cuántos piojos habrá transcurridos 20 días?
b.- ¿cuántos piojos había transcurridos 5 días?
c.- ¿cuántos piojos se pusieron en la cabeza?
d.- ¿cuántos piojos había el primer día?

Optativo
e.- ¿Cuánto varió la cantidad de piojos al pasar del inicio al 5º día? ¿del 5º al 10º día? ¿y del 10º al 15º día? ¿y del 15º al 20º día?

Comentario

Esta tabla se presenta como una alternativa de trabajo que el docente puede sugerir para trabajar el ejercicio optativo. No se presentará dentro del material que se le entrega al inicio a los alumnos.

t número de días	Nº de piojos	Variación de piojos de pasar del día **t** al día **t +5**
0	20	
		40
5	60	
		120
10	180	
		360
15	540	
		1080
20	1620	

Los números en azul son los que los alumnos van a completar.

4) LUMINOSIDAD EN LA LAGUNA

Una laguna contiene sedimentos uniformemente distribuidos que reducen la transmisión de la luz a través del agua. Dicha luminosidad se reduce en un 20% cada vez que se avanza un metro hacia la profundidad de la laguna, (es decir, cualquiera sea el nivel de profundidad en el que se encuentre el buzo, al descender un metro pierde el 20% de luminosidad que tenía).

Un buzo está pronto a sumergirse en dicha laguna; si consideramos la intensidad de la luz (medida en unidades lumínicas), como de 100 unidades en la superficie,

a. Realizar una tabla que indique la luminosidad para cada uno de los primeros 10 metros.
b. ¿Puedes decir qué intensidad de luz tendrá el buzo al bajar 0,5 m?
c. Nuestro buzo en cuestión tiene instrumentos de medición que pueden detectar luz hasta una intensidad del 0,2 unidades lumínicas. Teniendo en cuenta este dato, ¿podrá detectar luz si baja a 20 m?
d. ¿Hasta qué profundidad podrá descender con su instrumental, para todavía detectar cierta luminosidad?

5) CONTRATOS

Patricia ha recibido dos propuestas de dos empresas interesadas en su perfil laboral. Una de las empresas de ofrece ocupar el cargo de gerencia de proyecto especiales y le hace la siguiente oferta de sueldo: $10.000 inicialmente, y un aumento **mensual** de $4.000. La otra empresa le ofrece ocupar el cargo de gerencia de publicidad, un sueldo inicial de $10.000 y un aumento **mensual** de un 20%.

- ¿Qué oferta será más ventajosa?
- ¿Cómo explicarías convincentemente la conveniencia de una de las ofertas respecto de la otra?

6) BACTERIAS

En un laboratorio, están experimentando con una población de bacterias. Han observado que al reproducirse la masa de la población crece siempre en forma pareja, de manera que en cada hora aumenta un 25%. Al comienzo de la observación, el cultivo de bacterias tiene una masa de 60 gr.
¿cuál será la masa de las bacterias después de dos horas?
Explique como evoluciona de la masa de bacterias a lo largo de las primeras 8 horas.

Una vez trabajadas todas las situaciones se propone.

7) Volver a cada uno de los problemas analizados y encontrar una fórmula que represente la situación en cada uno.

Comentarios:
.- Se trata de hacer una puesta en común, haciendo foco en cada uno de los problemas vistos, en la producción de fórmulas.

.- Se hará una presentación de $y = k \cdot a^x$ a través de las fórmulas que ellos dan de las situaciones trabajadas (aunque todavía no se analizan condiciones de los parámetros para definir la función exponencial; eso será más adelante)
Se promoverá una discusión con los alumnos sobre:

a) el significado de los parámetros que aparecen en cada una de ellas,
b) el valor que puede asumir la variable en cada uno (existencia o no del continuo según el contexto),
c) cuáles son las similitudes y diferencias entre estas funciones.

.- Se les proporcionará las gráficas de todos los problemas preguntándoles a qué situaciones pertenece cada una de las gráficas y el análisis de los puntos a y b anteriores. Se aclarará que tal vez algunos problemas puedan no estar representados (para que los alumnos tengan que confirmar con más de un dato la asignación fórmula – gráfica).

Estas son las seis gráficas que se les presentarán

Gráfica 1

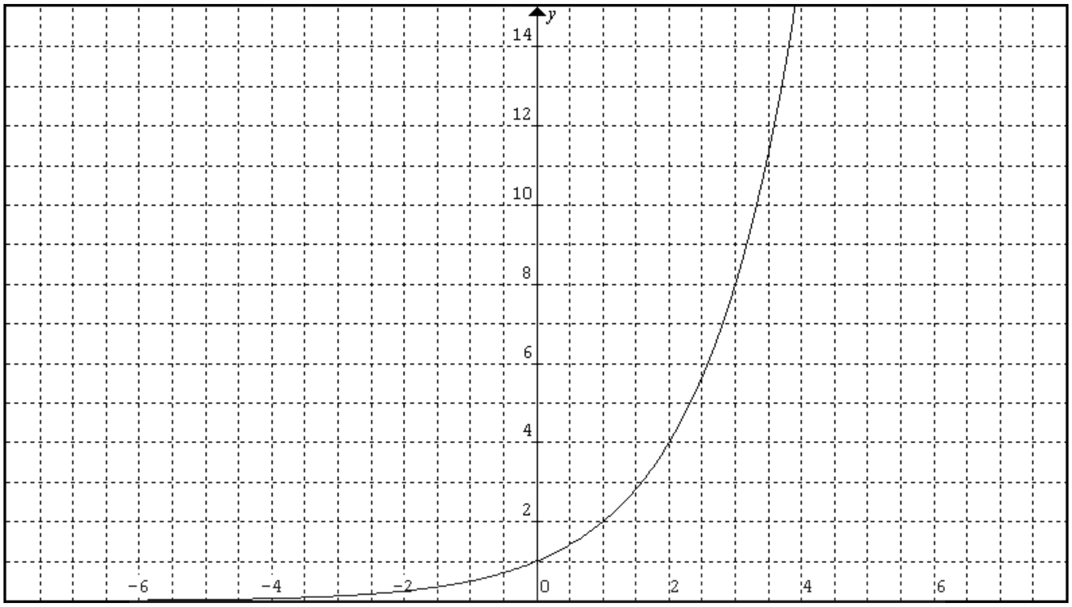


Gráfico 2

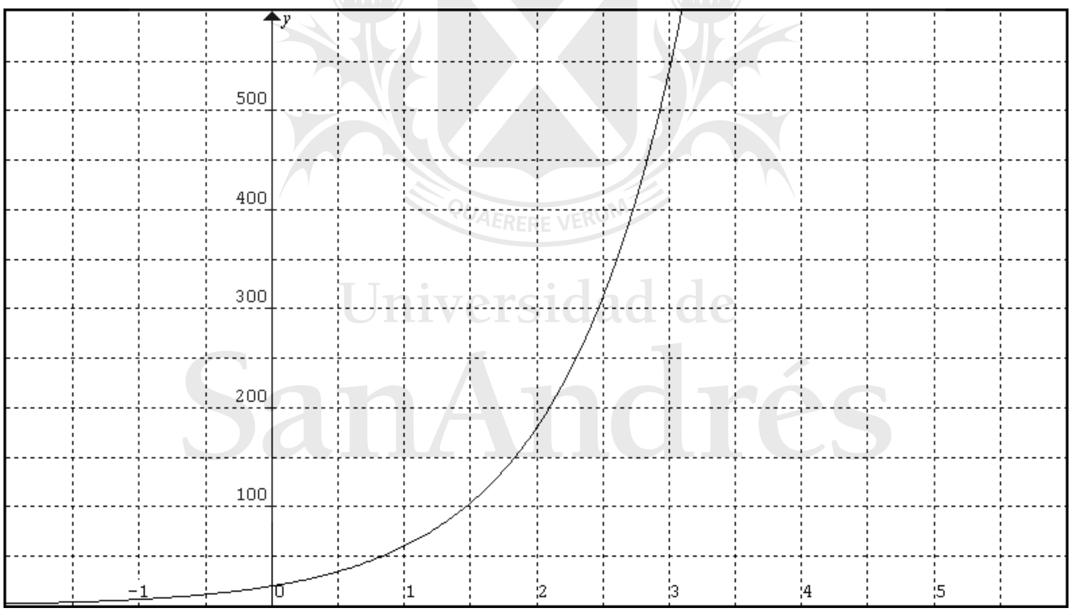


Gráfico3

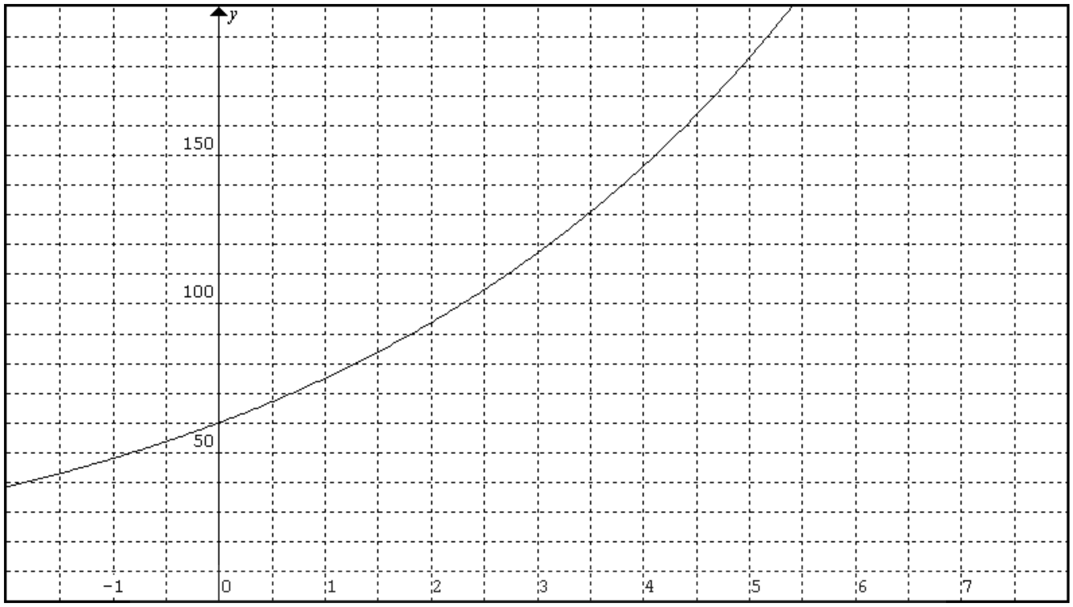


Gráfico 4

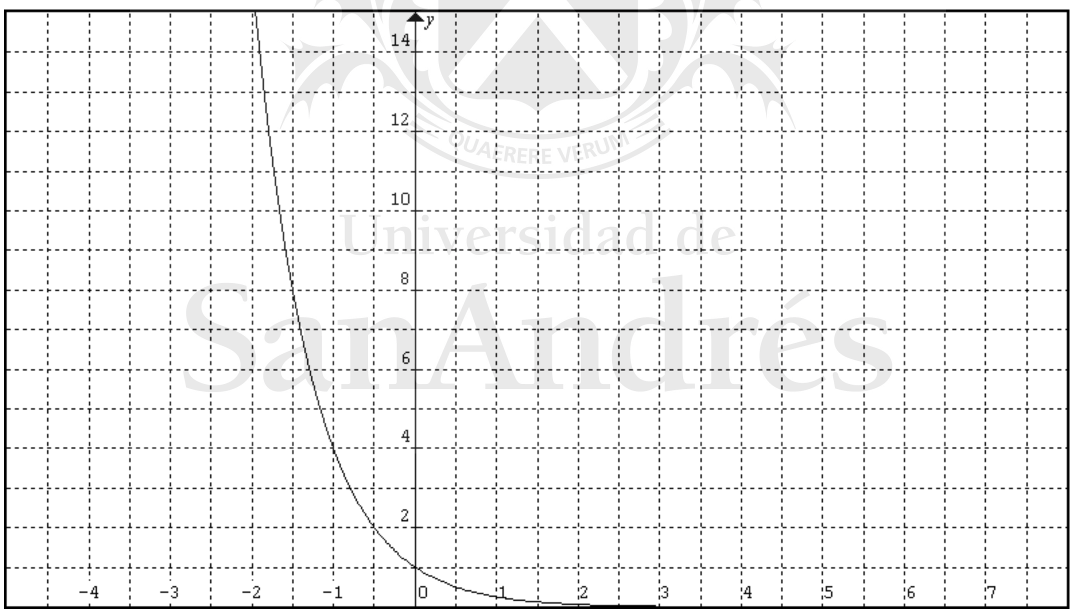
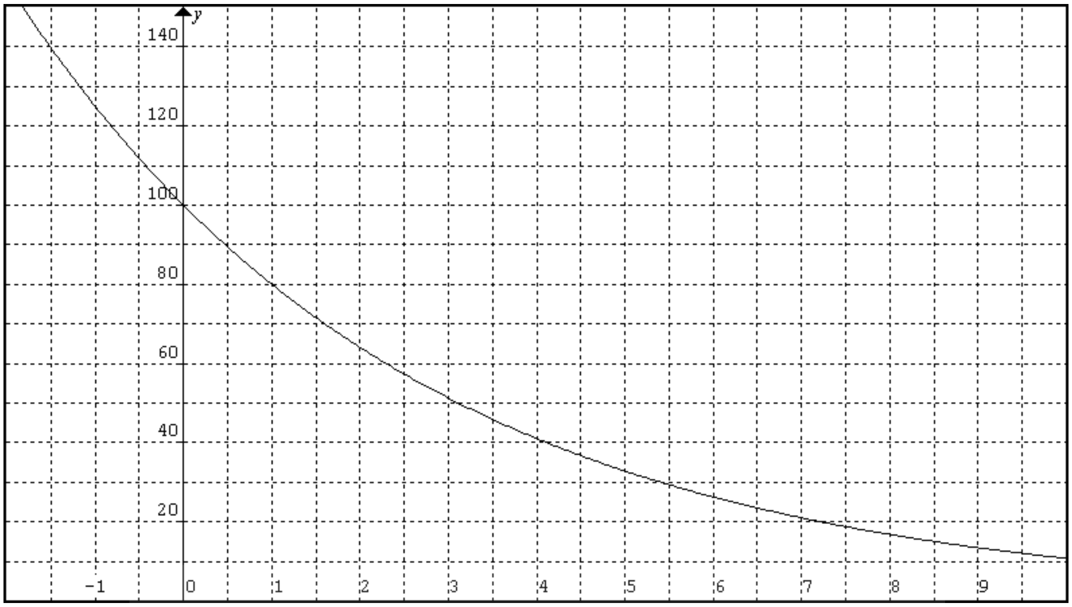
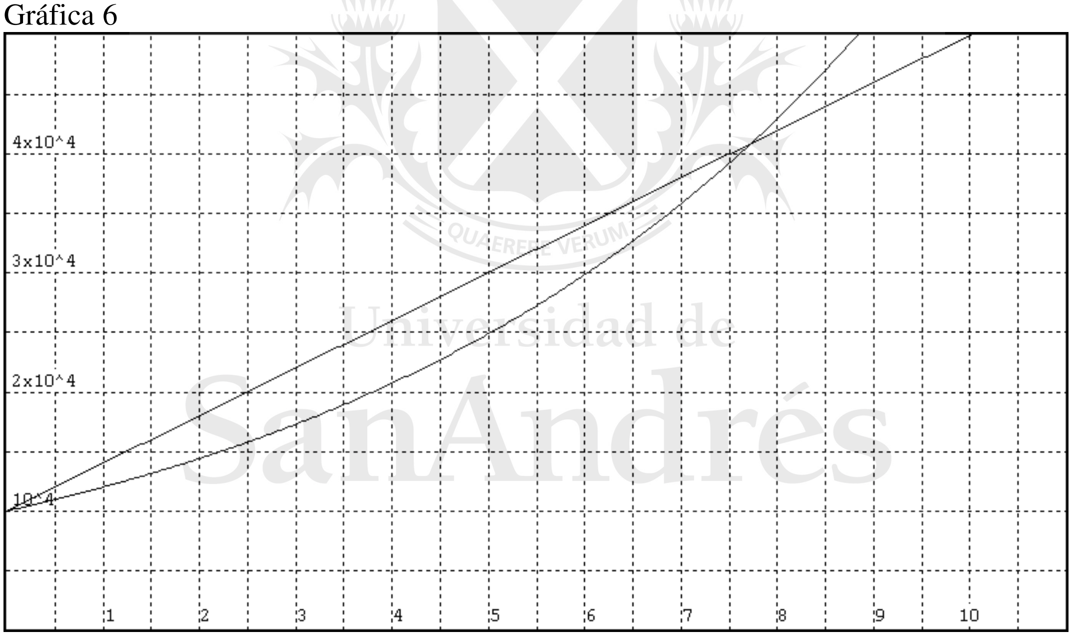


Gráfico 5



Gráfica 6



SEGUNDA PARTE: La Función Exponencial

1) Graficar las funciones $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $g(x)=3^x$ y encontrar similitudes y diferencias en los gráficos. Comparar estas gráficas con las anteriores.

2) La gráfica $g(x)=2^x$

Comentarios:

Todo este ejercicio es oral, no tiene una formulación escrita.

El objetivo de este ejercicio es mostrar en la gráfica de $g(x)=2^x$ cómo la altura de $g(a+1)$ es el doble que la de $g(a)$.

El docente dibuja la gráfica de $g(x)=2^x$ (en lo posible sin escalas, ni tampoco nombrando a g(a) y g(a+1)) en el pizarrón , elige un punto "a" cualquiera sobre el eje x , luego el punto a +1 , construye los segmentos paralelos cuyos extremos están sobre la función y luego traza el segmento horizontal que sale a la altura de g(a) y corta al segmento de longitud g(a+1), luego el docente enuncia, afirma, que lo parte en dos segmentos iguales y es ahí cuando le pregunta a los alumnos:

¿Por qué la horizontal divide al segmento en dos segmentos iguales?

En una segunda fase podrá preguntar si será cierto para cualquier a y a+1?

En una tercera fase podrá preguntar qué ocurriría si se considera dos puntos *a* y *a+k* (en la oralidad el docente planteará "si no fuera *a* y *a+1* y en cambio fuera *a* y *a+2*, o *a* y *a+3* ¿podemos prever qué ocurriría?")

El propósito de este ejercicio es poner a los alumnos en la necesidad de probar aquello que observan en el gráfico. Imaginamos que deberán apoyarse en el lenguaje algebraico y en la propiedad de la exponencial para poder hacerlo. En esta situación el docente podrá reformular la hipótesis mencionada en el ejercicio 7 de la sección primera, pero ahora apoyándose en lo gráfico, es decir, "al avanzar una longitud de tamaño *k* ¿en qué parte del segmento se divide?

3)

a) Confeccionar una tabla de valores para los pares ordenados que resuelven la ecuación $y=(-1)^x$

b) Idem para $y=(-2)^x$

c) ¿Puede definirse una función $f(x)=(-2)^x$? ¿por qué?

d) ¿Qué condiciones debe cumplir a para definir una función $f(x)=a^x$?

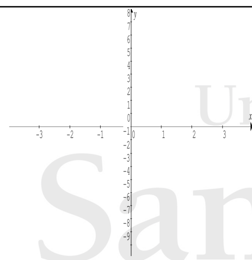
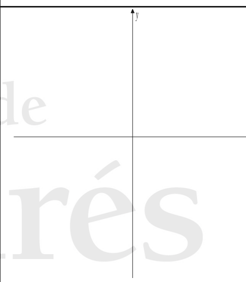
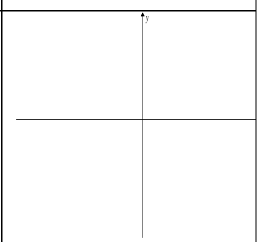
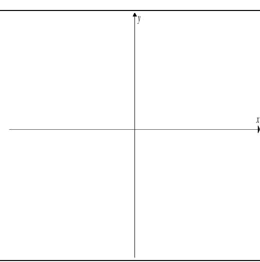
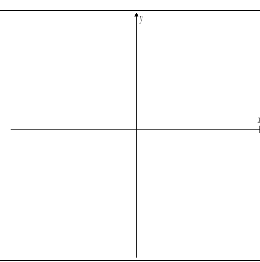
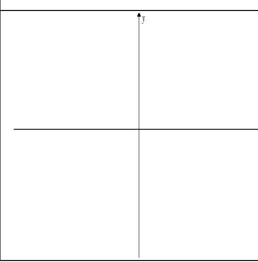
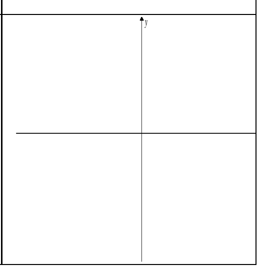
e) Con las condiciones del ítem anterior ¿qué condiciones debe cumplir a para que la función $f(x)=a^x$ sea

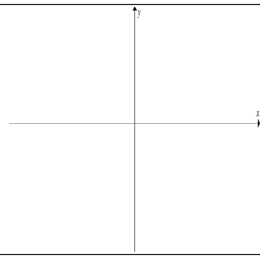
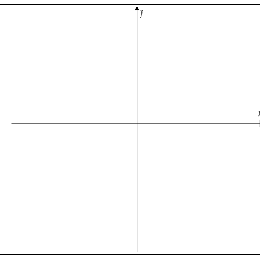
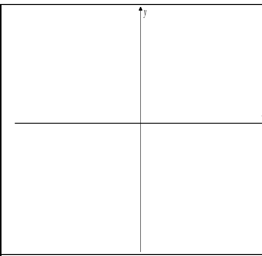
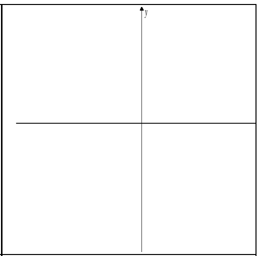
i) creciente?

ii) decreciente?

f) ¿Puedes encontrar algún valor de x para que su imagen sea 0?

4)

Preguntas para responder de cada función que ya trabajaste	$f(x)=2^x$	$g(x)=3^x$	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$
¿Qué sucede con los valores de y cuando la x toma valores cada vez más grandes?				
¿Podés encontrar algún valor de x para que su imagen sea 0?				
¿Qué les pasaría a las imágenes de la función si las multiplicamos por **2**? Da tu respuesta en forma gráfica				
Ídem si multiplicamos por **–1**				

Ídem si multiplicamos por **0.5**				
Al multiplicar a la función $y = a^x$ por un número real ***k*** distinto de cero se obtiene la función $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ ¿mantiene la función $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ las mismas características? Detalla similitudes y diferencias y busca sus causas.	Si k=1 Si k<0 Si k>0	Si k=1 --------------------------- Si k<0 Si k>0	Si k=1 --------------------------- Si k<0 Si k>0	Si k=1 ---------------------------- Si k<0 Si k>0

5) Siendo $a > 0$, $a \neq 1$ caracterizar el conjunto de positividad y negatividad de $f(x) = a^x$.

Optativo

Realizar un análisis similar al realizado en el punto 3.- d) a f) para $y = k \cdot a^x$.

6) ¿Qué modificarías en la función $\mathrm{f(x)} = 3 \, . \, 0{,}4^{\mathrm{x}}$ para que:

a) sea creciente?

b) la nueva función tenga una gráfica que sea simétrica con la gráfica original con respecto al eje y ?

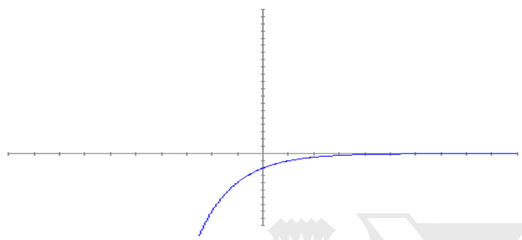
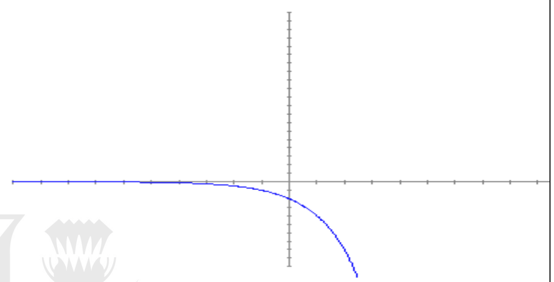
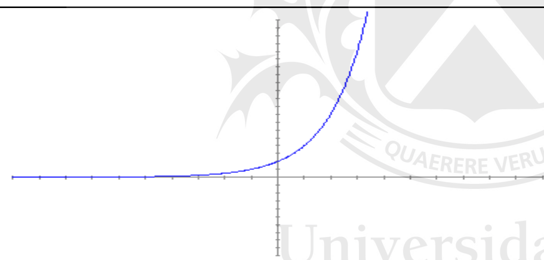
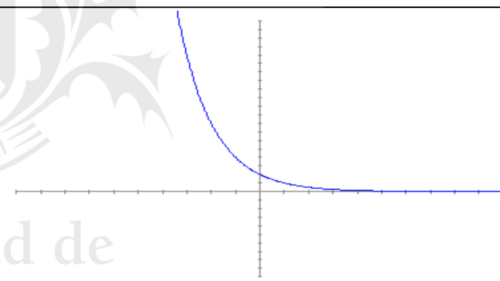
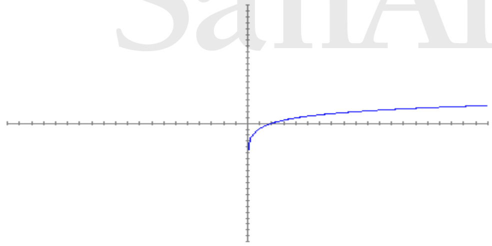
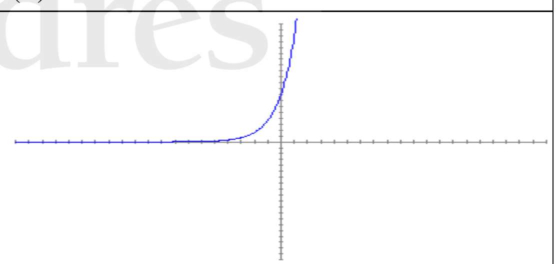
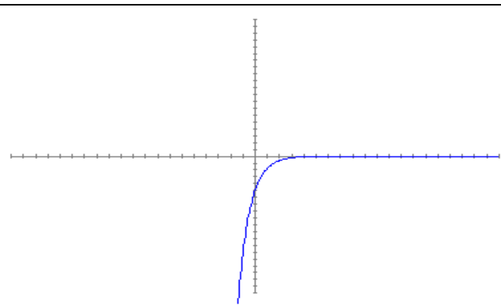
c) Su conjunto imagen sea $(-\infty\,; 0)$?

d) Si crees que hay distintos tipos de transformaciones sobre $f(x)$ para lograr lo pedido en cada caso, explica cuáles son.

7) A) ¿Crees qué bastará, como anteriormente, determinar las condiciones sobre el parámetro a para decidir si $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ es creciente o decreciente?

B) En caso afirmativo explica por qué el crecimiento o decrecimiento de este tipo de funciones está ligado únicamente al parámetro a ; en caso negativo explica y valida ¿Qué condiciones establecerías sobre k y a para que la función $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ se a creciente? ¿y para que sea decreciente?

8) Las funciones graficadas tienen fórmulas del tipo $f(x) = k \cdot a^x$
Indicar cuáles de ellas corresponden a las condiciones detalladas de a y b en cada caso.

 $f(x)$	 $g(x)$
 $h(x)$	 $i(x)$
 $j(x)$	 $k(x)$
 $l(x)$	

<u>condiciones de a y b</u> <u>Funciones</u>

$0 < a < 1$ y $b < 0$ ....

$0 < a < 1$ y $b > 0$ ....

$a > 1$ y $b > 0$ ....

$a > 1$ y $b < 0$ ....

9) ¿Puedes encontrar una función exponencial que pase por los puntos (0,2) y (2,32)?
a) En caso de existir ¿es única?
b) ¿y por (1,200) y (4,25)?
c) Idem por (-1,-1) y (1,1)

10) ¿Será cierto que los gráficos de las funciones $f(x) = 2^{x+1}$ y $g(x) = 2 \cdot 2^x$ son iguales? Si creés que si, explicá por qué. Si creés que son diferentes, demostralo de alguna manera.

Optativo

a) Realizar el mismo trabajo con:

$f(x) = 2^{-x}$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$f(x) = 2^{2x}$ y $g(x) = 4^x$
$f(x) = 2^{x-1}$ y $g(x) = 2^x/2$
$f(x) = 2^{x^2}$ y $g(x) = \left(2^x\right)^2$

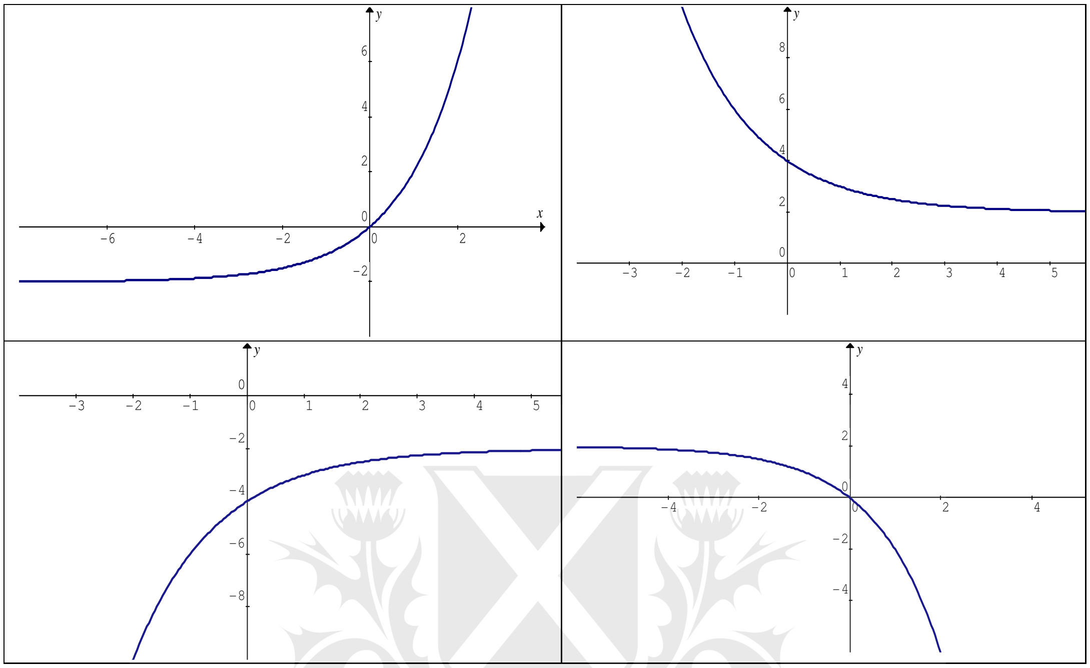
b) ¿es $f(x) = 2^{-x}$ una función exponencial? ¿por qué?

11) a)¿Puedes encontrar algún valor de x tal que $f(x) = 2^x - 4$ tenga imagen nula?
b) ¿Existe algún valor de x tal que $f(x) = 3$? ¿Por qué?
c) ¿Existe algún valor de x tal que $f(x)$ sea negativa? ¿Por qué?
d) ¿Puedes hallar algún valor del dominio de la función tal que $f(x) = -3{,}5$? ¿y para $f(x) = -3{,}9375$?
e) Ídem para $f(x) = -5$

Optativo

¿Cuáles son todos los valores posibles que puede tomar la variable x para que la función $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4$ proporcione imágenes negativas?

12) Las siguientes funciones son del tipo: $y = k \cdot a^x + b$, para cada una de ellas analizá el signo de k y b y además indicá si $a \in (1;+\infty)$ o si $a \in (0;1)$.



APÉNDICE 2: Secuencia Final

FUNCIÓN EXPONENCIAL - ACTIVIDAD FINAL

Como ha sido trabajado en clase la familia de funciones exponenciales $f(x) = k \cdot a^x$ y la familia $f(x) = k \cdot a^x + b$ está considerada con parámetros que tienen las siguientes restricciones: $k \neq 0$, $a > 0, a \neq 1$ todos números reales. Así serán considerados durante esta actividad.

Se pide que todas las respuestas estén validadas.

I) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones.

1) En la familia de funciones $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ el signo de las imágenes depende exclusivamente del parámetro *k*.
2) En la familia de funciones $f(x) = k \cdot a^x + b$ el signo de las imágenes depende exclusivamente del parámetro *k*.

II) En este ejercicio se estudia la familia de funciones $f(x) = k \cdot a^x + b$. Analizar las condiciones sobre los parámetros k, a y b para que la función:

1) tenga como imagen al conjunto $(4, +\infty)$.
2) tenga como imagen al conjunto (0, 100).
3) tenga como imagen al conjunto $(-\infty, +\infty)$.
4) función resulte creciente o decreciente.

III) ¿qué condiciones pondrías?
Nota: en cada caso, entre paréntesis figura el detalle sobre qué tipo de condiciones se quiere que armes tu hipótesis para obtener las consecuencias ya escritas.

1) Si...(condición sobre x)...................................... entonces $(-0,2) \cdot 5^x + 1 > 0$
2) Si...(condición sobre $f(x) = k \cdot a^x$).....................entonces $f(x) = k \cdot a^x$ es creciente.
3) Si...(condición sobre $f(x) = k \cdot a^x$).....................entonces $f(x) = k \cdot a^x$ tiene como asíntota al eje *x*.
4) Si...(condición sobre $f(x) = k \cdot a^x$).....................entonces $f(x) = k \cdot a^x$ intercepta al eje *x*.
5) Si... ...(condición sobre k, a y b)........................entonces 4 pertenece a la imagen de la función $f(x) = k \cdot a^x + b$

IV) Recordarás que en el comienzo de la guía práctica de la función exponencial trabajamos con la función $f(x) = 2^x$ y su gráfica. Vimos que si nos ubicábamos en un punto arbitrario del eje x y trazábamos el segmento que une el punto de abscisa con la gráfica y luego realizábamos lo mismo con el punto $x+1$ el segundo segmento tiene el doble de altura que el primero. Tendrás que analizar

a) qué situación se da con la función $f(x) = 3^x$
b) qué situación se da con la función $f(x) = 4^x$

¿Cómo podrías generalizar esto que está ocurriendo?

APÉNDICE 3: Material Presentado a Docentes

Marzo de 2008

PROPUESTA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNDAMENTACIÓN

El siguiente es un diseño de actividades posibles a proponer a los alumnos que han sido pensadas con el objetivo de introducirlos en las prácticas de **fundamentación**.

La actividad de **fundamentación**, no constituye un objeto matemático - es decir un concepto que se espera que los alumnos construyan - sino que se encuentra en las esferas de la práctica[152]. Es por ello que la fundamentación se irá proponiendo y sosteniendo, a lo largo del tiempo como una actividad enmarcada en el aprendizaje de nociones matemáticas.

Las actividades que se proponen a continuación pueden tener distintos propósitos según las características de los alumnos y su trabajo realizado hasta el momento en prácticas de validación o de demostración. En tal sentido pueden pensarse como una entrada que permite identificar las concepciones que los alumnos ya tengan sobre trabajo de fundamentación y las dificultades y obstáculos particulares del grupo así como también para desplegar un tipo inicial, rudimentario, de trabajo. Estas actividades consisten en.

a) Resolución de problemas donde las respuestas elegidas requieran de una explicación dado el contexto poco pautado del problema.

b) Actividades de exploración: el trabajo con ejemplos de objetos matemáticos para distinguirlos, elegir de un conjunto para un trabajo específico, descartar, proponer. En un principio el docente provee de los ejemplos sin especificar para qué sirven y luego en una segunda etapa el alumno debe buscar ejemplos por sí mismo para explorar.

c) Uso de ejemplos genéricos para apoyar razonamientos.

d) Actividades de entrada al uso y dominio del lenguaje matemático: una exploración sobre su uso, sus posibilidades y sus limitaciones. Problemas que pongan en juego la precisión del lenguaje matemático.

e) Actividades que requieran del análisis del razonamiento deductivo.

f) Producción de **fundamentaciones** para sostener:

   i. Conjeturas: la conjetura de propiedades para colecciones infinitas de objetos, la formulación precisa de las mismas y su validación *a partir de los conocimientos que se poseen*. Interesará tanto discutir la verdad o falsedad de una

[152] Artigue (Artigue, 1995:37) distingue la producción en el campo de la ingeniería didáctica destina a investigar los procesos de aprendizaje de un concepto determinado de aquellos que apuntan a un dominio paramatemático como la demostración ya que estos últimos juegan el papel de herramienta en la enseñanza.

cierta propiedad enunciada para un conjunto dado, como encontrar su dominio de validez, restringiendo, si fuera necesario, el conjunto original.

ii. Procedimientos realizados para resolver problemas.

Este listado no es exhaustivo ni conforma categorías excluyentes. Con esto queremos subrayar que los ejercicios que se proponen a continuación pueden acoplarse a varios de los tipos propuestos con mayor o menor precisión.

Nuestro propósito es que el desarrollo de fundamentaciones sea una de las formas de poner en funcionamiento los conocimientos de los alumnos.

En especial, se espera que los alumnos lleguen a comprender qué significa y cómo se juega en la matemática, el establecimiento de la verdad.

Las actividades que planteamos a continuación se ubican en el tema de Funciones Reales, que es tratado en varios años de la enseñanza de la matemática en la Escuela Media.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

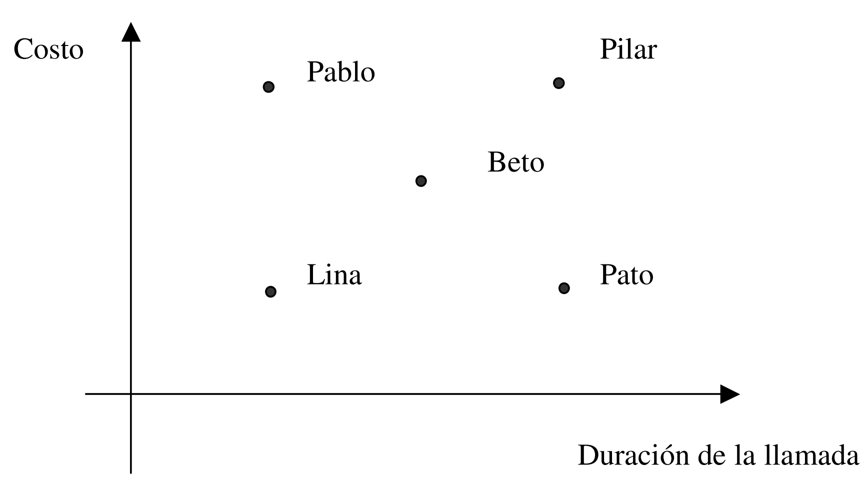
1) Actividades de entrada a la noción de función.

En estos primeros ejercicios los alumnos se encuentran frente a situaciones donde aparecen elementos simples, sencillos y motivadores que hacen al concepto de función. La característica principal de estas actividades es que invita a producir explicaciones por parte de los alumnos a partir de las interpretaciones de las consignas de las situaciones.

¿Son estas explicaciones fundamentaciones? Este es un tema a discutir para comenzar a plasmar el concepto de fundamentación.

Enunciado para los alumnos

I) En un fin de semana cinco personas hicieron llamadas telefónicas a varias partes del país. Anotaron el tiempo de sus llamadas y el monto que abonaron en el siguiente gráfico.



a) ¿quiénes llamaron al lugar más cercano?
b) ¿quiénes llamaron al lugar más lejano?
c) ¿quienes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente?
d) ¿viven todos en la misma localidad?
e) El día del empleado telefónico, el 18 de marzo, la empresa permite que sus usuarios hablen gratis todo el día. Si estas llamadas se realizaran este día ¿cómo sería el aspecto del gráfico?

Comentarios sobre el problema

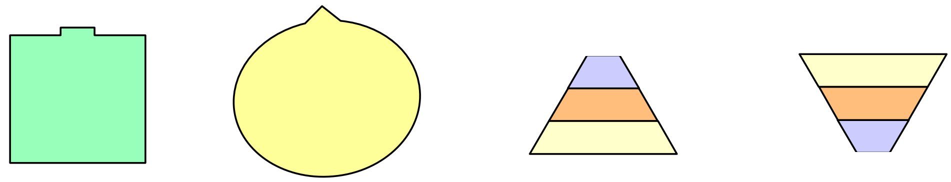
En primer lugar los alumnos deben poder comprender cuáles son los datos que están representados. En una segunda instancia pueden o no descubrir que hay datos que no están representados. En otros términos, hay una variable matemática que no ha sido representada y esa ausencia es la que explica que personas que hablan distinto tiempo paguen lo mismo. En otras palabras el costo de una llamada está en función tanto de la duración como de la distancia a la que se llama y en ambos casos se puede afirmar que a mayor duración de la llamada el costo es mayor (manteniendo constante la distancia) así como también a mayor distancia el costo es mayor mantenido constante el tiempo de la llamada. Como no se tiene una fórmula del costo en términos de estas dos variables independientes no se puede establecer con mayor precisión este tipo de comentarios.

El ejercicio tiene también una modelización o simplificación de la tarifa telefónica que podría tener otras variables en juego (llamadas internacionales versus llamadas nacionales, horarios en el que se realiza la llamada, etc.).
Tanto las simplificaciones como la variable oculta hacen que los alumnos necesiten explicar las razones de sus respuestas.
Se propone analizar junto con los docentes:

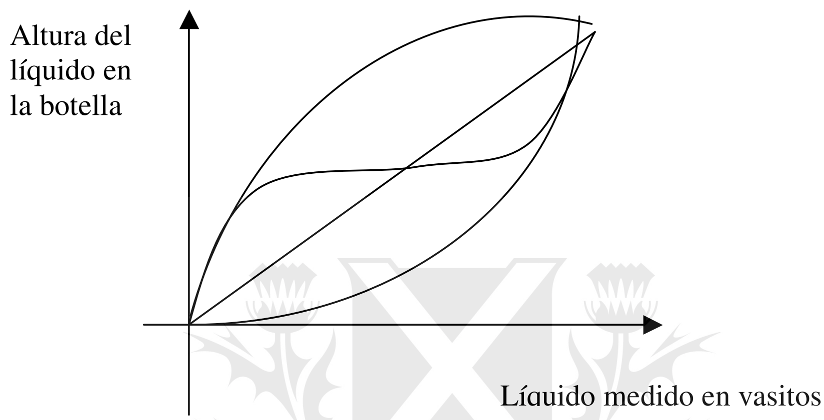
i) qué preguntas disparará la consigna en los alumnos
ii) cuál será un tipo de explicación aceptable y uno insuficiente.
iii) Se trabajará con forma oral o escrita.

Enunciado para los alumnos
II) Cuatro alumnos son convocados a llenar de líquido cada una de estos cuatro recipientes. Al mismo tiempo cada uno de ellos vierte el contenido de un vaso con líquido (todos los alumnos disponen del mismo modelo de vaso). La velocidad a la que echan el contenido del vaso es idéntica.
Aquí se muestran los dibujos de los cuatro recipientes (si bien son esquemas todos ellos tienen base circular) y las correspondientes gráficas que describen como van variando las alturas de los líquidos en cada una de las botellas a medida que se vierten los vasos. Indicar qué gráfica corresponde a qué botella. Justificar la respuesta.

Recipientes



Gráficas



Comentarios sobre el problema

La falta de coordenadas tiene por objeto que no se haga posible un trabajo basado en el cálculo aproximado de medidas (también aporta que el cálculo de volúmenes no es evidente salvo en la primera botella. De este modo se espera que los alumnos se vean obligados a mirar el comportamiento de las gráficas en el sentido de su crecimiento y considerar el volumen que puede ir ocupando el líquido en la medida que se vierten los vasos de agua. Es decir tendrán que pensar en la **variación de la variable altura** en términos de la **variación de la variable vasos vertidos**.
Imaginamos que el ejercicio se resuelve eligiendo los casos más sencillos y por descarte. Esto es lo que tendrán que exponer los alumnos para justificar sus elecciones.

Para discutir con los docentes.

i) ¿qué nociones de función surgirán motorizadas por el problema?
ii) ¿hay datos ocultos que los alumnos tendrán que imaginar o suponer?
iii) ¿pueden otros datos u otros dibujos provocar una mayor o menor dificultad en el momento de la fundamentación?
iv) ¿Resultaría más adecuado presentar las gráficas en forma separada?

2) Pasos deductivos: la condición de entrada

Enunciado para los alumnos

III) Buscar condiciones (o supuestos) que permitan asegurar, mostrar, sostener, fundamentar las siguientes afirmaciones:

i) La función cuadrática $f(x) = 2lx^2 + 6x + m$ pasa por el origen de coordenadas.

ii) La función cúbica $f(x) = tx^3 + 3$ pasa por el origen

iii) La función lineal $f(x) = 3kx + l + t$ pasa por el origen

Comentarios sobre el problema

En ambos casos se espera que los alumnos comiencen a explorar con algunos ejemplos dándole para ello valores a los parámetros l, m y t. A partir de algunos de estos valores puede que utilicen recursos gráficos o algebraicos. Nos parece pertinente plantearnos aquí qué tipo de trabajo previo facilitaría la disposición de las representaciones gráfica o algebraica.

En este caso, disponer de una calculadora graficadora ayudaría a generar ejemplos con mejor aprovechamiento del tiempo.

Una vez que se hayan producido una serie de ejemplos queda por trabajar con los alumnos como podría plantearse tal condición.

Producir y analizar otros ejemplos.

Trabajos previos a considerar:

A) Indique cuáles de las siguientes funciones pasan por el origen:
   i. $f(x) = 2x^2 + 6x$
   ii. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
   iii. $f(x) = 2x^3 + 6$
   iv. $f(x) = \left(2x^2 + 6\right)x$
   v. $f(x) = 2x + 6$
   vi. $f(x) = 2x$

B) Decidir si los siguientes enunciados son **Verdaderos o Falsos**. Fundamentar la respuesta.
   i. La función $f(x) = 2x^2 + 6x$ no pasa por el origen
   ii. La función $f(x) = 2x^2 + 6x + m$ no pasa por el origen

3) Reconocimientos de pasos de inferencia

Una forma del trabajo matemático consiste en deducir, a partir de un hecho que se conoce, otros hechos como conclusiones, al aplicar sobre los hechos conocidos reglas que provienen de la teoría. Por ejemplo:

"Si $0 < x < 6$ entonces $x^2 < 36$"

En esta deducción reconocemos una hipótesis o dato de entrada:
"$0 < x < 6$"

y una conclusión o proposición de salida:
"$x^2 < 36$"

La propiedad que se ha utilizado para arribar de la hipótesis a la conclusión es (aunque es importante decir que no es la única que se podría sostener)
"la función $f(x) = x^2$ es creciente en el conjunto de los números reales positivos"

Se proponen ahora otras para que trabajen los alumnos.

Enunciado para los alumnos:

IV) Se les presenta a continuación una proposición que es verdadera. Se les pide encontrar una explicación convincente que pueda mostrar a partir de la hipótesis (que en este caso es "$a > 0$") como se puede arribar a la conclusión (que en este enunciado es "la ecuación $ax^2 + 5 = 0$ no tiene solución en el campo de los números reales")

Se considera una expresión cuadrática de la forma $y = ax^2 + 5$, donde a es un número real. La proposición a considerar es:
"Si $a > 0$ entonces la ecuación $ax^2 + 5 = 0$ no tiene solución en el campo de los números reales".

Comentarios para el problema:

Hablar de expresión cuadrática tiene el propósito de habilitar en el alumno la posibilidad de apelar a su dominio de conocimientos sobre la función cuadrática. El alumno podrá, en este sentido, trabajar desde una representación gráfica o desde una representación algebraica.

Utilizando representaciones gráficas es posible que el alumno realice varias gráficas tomando distintos valores para el parámetro *"a";* encontrará que en todas las representaciones el vértice es el (0,5) y se verá cómo a partir de estas gráficas es posible una generalización que fundamente la conclusión

También puede ocurrir que un alumno apele a la representación algebraica de la expresión reconociéndola como la ecuación de una parábola. En esta situación podría explorar con valores concretos de "*a*" o bien utilizar la expresión genérica de la parábola para ubicar el vértice en el punto (0;5) (independientemente del valor de *a* y que allí). Se verá entonces dependiendo de lo que se haya trabajado en clase si esto habilita al alumno a sostener que este vértice es un valor mínimo de la parábola. A partir de este hecho el alumno tiene que justificar que cualquier otro valor de la expresión $y = ax^2 + 5 \geq 5$ de donde se puede concluir que no puede tomar el valor $y = 0$.

Otra vía posible para fundamentar consiste en trabajar algebraicamente sin apelar a la noción sobre parábola. En este caso surgen también varias alternativas de trabajo por parte del alumno

a) Analizar el signo del discriminante y resolver que no hay raíces.
b) Despejar directamente de la ecuación

c) Considerar en la expresión los signos de los sumandos. Siendo a>0 un producto con x^2 este producto será positivo. Si luego se suma 5 esta expresión será mayor estricta que cero para todo valor de "*a*"

Todas estas producciones nos parecen explicaciones posibles. A partir de la gestión de clase el docente podrá someter a discusión las distintas producciones que emerjan, ya sea del trabajo individual o del trabajo colectivo (según como haya planteado la actividad).

Otros enunciados a considerar:

i) Si $x+5<9$ entonces $x<4$.
ii) Si $8 \in \mathrm{Im}(f)$ entonces $54 \in \mathrm{Im}(g)$ donde se considera $g(x) = f(x)^2 - 10$.
iii) Si f es una función inyectiva entonces la función $g(x) = f(x)^3 + 2$ también resulta inyectiva.
iv) Si una función lineal tiene pendiente positiva entonces su gráfica intercepta al eje x
v) Si una función lineal tiene pendiente negativa entonces su gráfica intercepta al eje x

A partir de estos dos últimos enunciados se podría considerar la verdad o falsedad de la siguiente afirmación

"Si *f* es una función lineal entonces su gráfica intercepta al eje *x*"

También se podría considerar con más generalidad, pasando o no por la afirmación anterior:

"Si f es una función polinómica entonces la gráfica de f intercepta al eje *x*."

4) La estructura deductiva

En este ejercicio se propone organizar un conjunto de enunciados sobre una supuesta función para que el alumno se encuentre ante la situación de tener que decidir qué enunciados puede utilizar como hipótesis y en función de ellos y de algún concepto teórico que no estará disponible en esta lista y que el alumno tendría que buscar también, elegir a partir de ellos el enunciado que tiene la característica de conclusión. El ejercicio tiene la virtud de poner al alumno frente a enunciados que tanto pueden jugar el papel de hipótesis como el de conclusiones.

Enunciado para los alumnos

V) Las siguientes afirmaciones se refieren a una función $f : R \to R$. Elegir dos enunciados para que puedan organizarse bajo la siguiente estructura:

"Si……………….entonces………………."

Para cada grupo de enunciados deberán presentar también la fundamentación de la afirmación, es decir, las razones que permiten asegurar la conclusión a partir de la hipótesis.

i) f es inyectiva.
ii) f no es inyectiva.
iii) $6 \notin \mathrm{Im}(f)$
iv) $f(4) \neq f(10)$
v) $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 3]$
vi) f no es suryectiva.
vii) f es una función par
viii) El gráfico de f corta el eje x

5) Exploración con ejemplos.

En general el trabajo de exploración en los estudiantes se limita al área del cálculo. El ejercicio que se presenta constituye una vía para ensayar una entrada en el trabajo exploratorio el que a su vez es necesario para la producción de conjeturas.

Se presentan a continuación una serie de ejemplos de funciones y un conjunto de enunciados. Se les pide a los alumnos que decidan qué funciones pueden representar ejemplos de los enunciados que se listarán a continuación. Ellos deberán decidir cuáles son los ejemplos. Algunos de los ejemplos de funciones serán presentados en el lenguaje algebraico mientras que otros tendrán una representación gráfica.

Enunciado para los alumnos

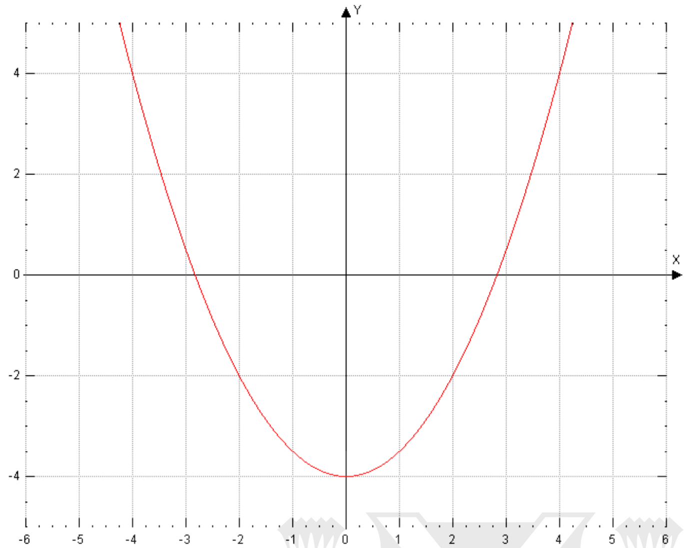
VI) En este ejercicio encontrarán un conjunto de enunciados sobre funciones. Todas ellos son **Verdaderos**. Ustedes deben encontrar un ejemplo para cada enunciado a partir del conjunto de funciones que se presentan a continuación.

i) No todas las funciones lineales son inyectivas.
ii) Las funciones cuadráticas, consideradas como funciones con $\text{Dominio} = \mathbb{R}$ y $\text{Codominio} = \mathbb{R}$ no resultas inyectivas ni suryectivas.
iii) Cuando una función tiene un corrimiento horizontal la imagen del corrimiento no cambia.
iv) Las funciones inversibles son o bien crecientes o bien decrecientes.
v) Si una función es inyectiva cada recta horizontal que se trace sobre su representación gráfica toca a la gráfica a lo sumo una vez.

Ejemplos de funciones:
a.- $f(x) = 6$
b.- $f(x) = 5^x$
c.- $f(x) = x^3$

d.- $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4$

e.-



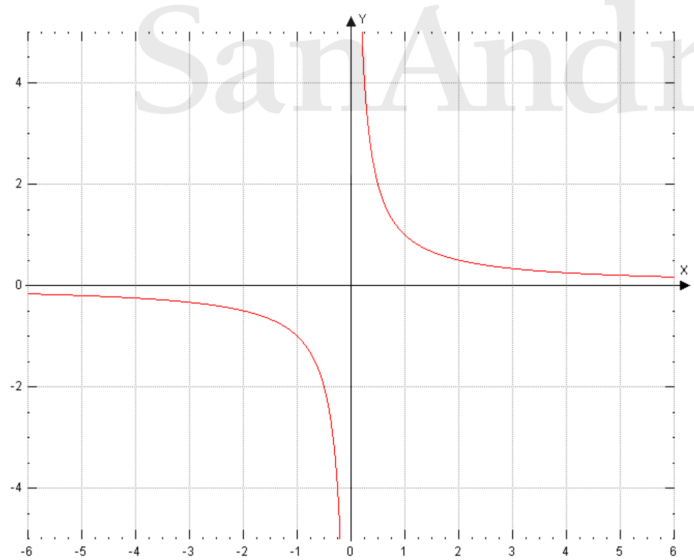
f.- $f(x)=|x|+4$

g.- $f(x)=|x-2|$

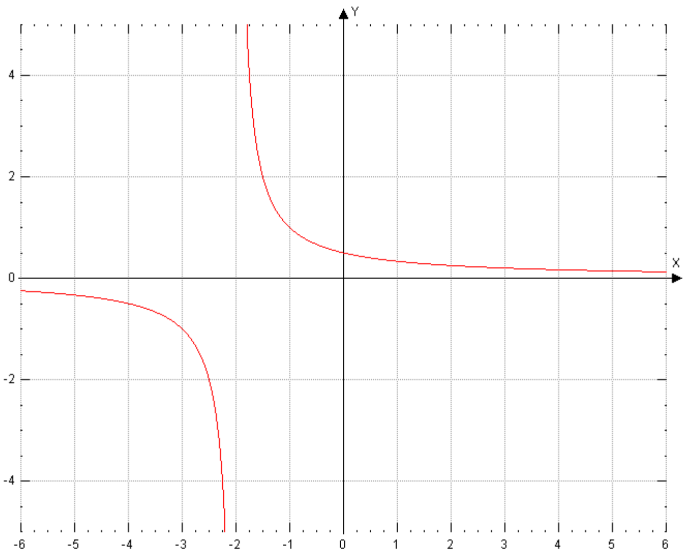
h.- $f(x)=|x|$

i.- $f(x)=|x+4|$

j.-



k.-



<u>Comentarios:</u> se podría plantear una continuación de este trabajo con ejemplos a partir de otro conjunto de enunciados donde los alumnos no dispongan de la afirmación de que son verdaderos o correctos y que tengan que explorar su falsedad o veracidad a partir de los ejemplos que se muestran a continuación.

<u>6) Desplegar anticipaciones y estrategias diversas</u>

<u>Enunciado para los alumnos:</u>

VII) "Se consideran los polinomios $P_1(x) = 5x^3 - 6x^2 + 20x - 1$; $P_2(x) = 2x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 - 22x - 15$; $P_3(x) = 5x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 100x - 10$; y $P_4(x) = 5(x-1)^6(x+1)^4$. Se considera también el conjunto $A = \left\{-1,\ 1,\ 3,\ \frac{1}{2}, 5\right\}$. Indicar para cuál o cuáles de ellos se verifica la siguiente afirmación "Todo elemento de A es raíz del polinomio".

<u>Comentarios sobre el problema</u>

En general los alumnos tienden a realizar una búsqueda al tanteo de raíces. Pocas veces y aún teniendo el dato de quienes serían las candidatas a raíces los alumnos utilizan la información disponible en el mismo enunciado. En este caso no solo no estarían realizando una actividad anticipatoria sino que tampoco estarían utilizando la estrategia más económica para resolver el problema (teniendo en cuenta que no se les pide encontrar las raíces de cada polinomio).
Se espera que la enorme cantidad de cálculos involucrados en la búsqueda de todas las raíces de cada polinomio sea una razón suficiente como para desestimar esta estrategia y buscar otra. En este sentido una variable didáctica para el manejo de esta elección está dada tanto por el número de raíces planteadas en el conjunto A, por la presencia de una raíz con un valor numérico alto (que suele hacer difícil el trabajo por tanteo), y por la cantidad de polinomios presentados.
Otra alternativa para la elección de las estrategias reside en que, dado que el conjunto A contiene a los elementos 1 y -1 con los cuales las cuentas son sencillas, los alumnos

exploren si estos números son raíces de los polinomios planteados. Queda la alternativa de armar una familia de polinomios donde todos tengan al 1 y -1 como raíces para que no sea ésta la estrategia que permita descartar polinomios.

Una anticipación posible está dada por el grado de cada uno de los polinomios. Los alumnos saben que el grado del polinomio está relacionado con el número de raíces y han analizado la proposición "Dado un polinomio $P(x)$ de grado n con coeficientes reales, entonces $P(x)$ tiene a lo sumo n raíces reales contadas con su multiplicidad". Esto hace que los polinomios P_1 y P_3 queden descartados. Para completar la anticipación el polinomio P_4 se ha presentado en su forma factorizada con lo cual las raíces están a la vista. Muchas veces los alumnos pasan automáticamente esta expresión factorizada a la expresión general de los polinomios desaprovechando la información que trae el polinomio en esta forma. Eventualmente este procedimiento haría que los alumnos consideran el polinomio P_4 como candidato y luego de evaluar en alguno de los números del conjunto A lo desechen como respuesta posible.

A modo de cierre

Queremos finalizar esta propuesta a analizar en forma conjunta señalando dos cuestiones que están presentes para nosotros pero que no se deducen de su lectura.

.-Entendemos que es tan importante el trabajo individual-colectivo de producción de fundamentaciones como la puesta en común que traerá aparejado la discusión de la pertinencia de las fundamentaciones producidas por otros. Para ello será preciso que el conjunto de los alumnos comprendan las fundamentaciones que no fueron producidas por ellos mismos y las juzguen correctas o no.

.- Centrar el trabajo en la fundamentación pone en evidencia un tipo de actividad matemática que suele quedar implícita en otras actividades que proponemos a los alumnos, que no explicitamos pero que luego esperamos de ellos.