



UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS
ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN Y NEGOCIOS
MAGÍSTER EN FINANZAS

**Sobre el algoritmo de Hua He y su aplicación en la
valuación de opciones multi-activos barreras**

Autor: Miguel Herschberg

DNI: 33.203.139

Directora del Trabajo Final de Graduación: Dra. Elsa Cortina

Buenos Aires, 25 de Octubre 2018

Resumen

El propósito de esta tesis es valorar opciones multi-activos barrera mediante la aplicación de un algoritmo desarrollado por He en 1990 cuya aplicación práctica ha sido, hasta el momento, nula. En este trabajo valuamos opciones sobre dos y tres activos con *payoffs* y barreras sobre uno o más activos subyacentes. Finalmente consideramos los puntos débiles y las limitaciones del método ya que, por ejemplo, opciones *path-dependent* no podrían ser valuadas con este algoritmo por cuestiones computacionales.

Previo a usarlo para resolver un problema en particular, resulta imperante estudiar las propiedades de convergencia (incluyendo velocidad de convergencia y precisión) de este algoritmo. La peculiaridad del algoritmo de He reside en que preserva la completitud de mercado y que visualmente lo podamos representar como un árbol recombinante multinomial, es decir, una extensión del árbol binomial de Cox-Ross-Rubinstein.

Índice general

1. Introducción	4
2. Revisión de la literatura	7
2.1. Derivados multi-activos	7
2.2. Algoritmos multi-nomiales con forma de árboles	8
2.3. Opciones multi- <i>asset</i> barrera	12
3. El algoritmo de Hua He	14
3.1. Construcción	15
3.1.1. Primer paso: construcción de N variables aleatorias no correlacionadas	15
3.1.2. Segundo paso	16
3.1.3. Tercer paso: descomposición de Cholesky	17
3.1.4. Cuarto paso: aplicación de la fórmula 6 del paper de He	18
4. Opciones <i>spread</i> y la fórmula de Margrabe	21
4.1. Introducción	21
4.2. Opciones <i>spread</i>	21
4.2.1. Definición	21
4.2.2. Usos de las opciones <i>spread</i>	22
4.3. Métodos de valuación	23
4.4. La fórmula de Margrabe	24

4.4.1.	Demostración de la fórmula de Margrabe mediante un cambio de numerario	25
4.4.2.	Valores de los parámetros	27
4.5.	Convergencia del modelo de He al precio de Margrabe	28
4.6.	Sensibilidades – <i>The Greeks</i>	30
4.6.1.	Delta	32
4.6.2.	Vega ν	34
4.6.3.	Sensibilidad con respecto a la correlación	35
4.6.4.	Theta Θ	37
4.6.5.	Gamma Γ	38
5.	Valuación de opciones <i>multi-asset</i>	41
5.0.6.	Opción barrera sobre dos activos con payoff sobre un activo	41
5.1.	Valuación de un derivado sobre 3-activos	43
5.1.1.	Valuación de un derivado sobre el máximo de tres Activos	45
5.1.2.	Valuación de un derivado con una barrera sobre tres activos	46
5.2.	Explicación del código	50
5.3.	Limitaciones	51

Índice de figuras

4.1. He con $n = 50$	28
4.2. He con $n = 500$	28
4.3.	29
4.4.	29
4.5. Tiempo de corrida	29
4.6. Delta S1	33
4.7. Delta S2	33
4.8. Diferencia Delta S1	34
4.9. Diferencia Delta S2	34
4.10. Vega S1	35
4.11. Diferencia Vega S1	35
4.12. Vega S2	35
4.13. Diferencia Vega S2	35
4.14. Correlación	37
4.15. Diferencia Correlación	37
4.16. GammaS1S1	39
4.17. Diferencia GammaS1S1	39
4.18. GammaS1S2	39
4.19. Diferencia GammaS1S2	39
4.20. GammaS2S2	40
4.21. Diferencia GammaS2S2	40

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo es valorar opciones multi-*asset* barrera usando el algoritmo de Hua He. Debido a que no fue utilizado anteriormente en la literatura académica, resulta necesario realizar un estudio formal de sus propiedades de convergencia (incluyendo velocidad de convergencia y precisión), para evaluar si puede ser utilizado o no en la práctica para valorar derivados financieros.

En 1990, Hua He publicó un *paper* titulado "*Convergence From Discrete to Continuous-time Contingent Claims*" donde construye un algoritmo en forma de árbol que converge a la distribución normal multivariada multidimensional. Su método consiste en aproximar un proceso de generación de precios, es decir, una difusión N -dimensional, mediante una secuencia de un proceso $(N + 1)$ -nominal, N -variado.

Su novedad reside en el hecho de que los activos y el bono en el modelo multinomial en tiempo discreto, forman un mercado de activos dinámicamente completo. Esto significa que cualquier precio contingente puede ser replicado y *fully-hedged* usando los activos básicos del modelo.

La demostración formal de la convergencia de los precios contingentes en tiempo discreto a su versión límite en el continuo y la existencia de estrategias de replicación del portafolio

se encuentran en detalle en el *paper* de Hua He [19].

Sin embargo, el autor nada dice sobre la forma en la cual el método converge del discreto al continuo ni tampoco sobre la precisión y velocidad de esta convergencia. Estudiar estas propiedades es de sumo interés para la valuación de derivados financieros porque a la hora de elegir un modelo se deben tener en cuenta estas propiedades que analizaremos. Sobre este punto en particular, el autor aporta dudas sobre la performance de su propio método refiriéndose a que quizás este no sea superior a la de los métodos alternativos. Tampoco existe ningún artículo de investigación sobre las propiedades de convergencia del algoritmo de Hua He. Abordamos aquí este vacío en la literatura. Este trabajo comienza con una introducción a la temática, ubicando a los algoritmos que se pueden representar mediante árboles en una perspectiva histórica junto a otros métodos similares. La aplicación de este conjunto de métodos va más allá de sus aplicaciones en la valuación de derivados complejos. Problemas en diversas áreas tales como economía, finanzas y economía agraria se pueden reformular como problemas multi-activos (o multi-”factores de riesgo”) y recurrir a la matemática financiera (y a algoritmos como el de Hua He en particular) para su resolución. Por un tema de completitud, optamos por incluir una brevísima reseña sobre problemas multi-activos más allá de los encontrados en el área de matemática financiera.

Una vez terminada la revisión de la literatura, introducimos el algoritmo de Hua He con especial énfasis en una detallada explicación de sus propiedades formales. También elegimos incluir las indicaciones para poder construir el árbol multi-nomial para $N = \{2, 3\}$, o sea, dos y tres activos correlacionados y riesgosos. El caso de dos activos correlacionados, $N = 2$, nos sirve como punto de referencia para comparar la performance de este método y valuar derivados multi-asset con y sin barreras.

La forma de evaluar las propiedades de convergencia del algoritmo de Hua He es usarlo para valuar un derivado que tenga una solución cerrada. En nuestro caso, afortunadamente, contamos con la opción de Margrabe, la opción para intercambiar dos activos correlacionados y riesgosos en una fecha cierta en el futuro. Nuestro análisis reside en ir incrementando

paulatinamente la cantidad de pasos del algoritmo de Hua He y observar cómo los resultados se aproximan a los "verdaderos" resultados obtenidos para la opción de Margrabe, cuya solución cerrada conocemos.

Una vez que corroboremos que el modelo de Hua He valúa correctamente la opción de Margrabe, evaluamos su eficiencia para aproximar sus sensibilidades. Para llevar a cabo esta tarea, al igual que en caso anterior, usamos las sensibilidades de la opción de Margrabe (que también tienen una fórmula cerrada) para compararlas con las que obtenemos usando el método de He y evaluar la precisión y la velocidad de convergencia a los resultados teóricos para las sensibilidades.

Después de estudiar las propiedades del algoritmo, explicamos cómo se lo puede modificar para valorar opciones multi-activos y, en particular, opciones multi-activos barrera. La primera opción que consideramos tiene un pago final sencillo, pero es uno de los pocos contratos que han sido previamente valuados en la literatura. Esto nos aporta un punto de comparación para estudiar la aplicabilidad del modelo de Hua He en la valuación de productos financieros más complejos. Posteriormente, mostramos lo sencillo que resulta modificar el árbol de Hua He para satisfacer nuestras necesidades. Finalmente, indicamos cómo valorar derivados sobre dos y tres activos subyacentes correlacionados y riesgosos, con y sin barreras.

Capítulo 2

Revisión de la literatura

La aplicación de métodos multi-nomiales que puedan ser representados como árboles con la finalidad de valorar opciones multi-activos es el producto del desarrollo histórico de diversas áreas de la matemática financiera tales como: algoritmos multi-nomiales en forma de árboles, derivados multi-activos y la valuación de opciones barrera.

2.1. Derivados multi-activos

Los derivados multi-activos y *single-asset* comparten un desarrollo histórico similar. Cuarenta años atrás, en 1973, se empezaron a comercializar opciones financieras en la bolsa CBOT de Chicago. A fin de ese año, Black, Scholes [4] y Merton [31] publicaron dos de los trabajos más conocidos del mundo financiero.

Tan solo cinco años más tarde, en 1978, el *Journal of Finance* publicó dos artículos sobre derivados multi-activos: Margrabe [29] y Fischer [17]. Ambos consideraban el problema de valorar una opción Europea para intercambiar dos activos correlacionados en una economía Black-Scholes y ambos llegaron a la misma solución. Actualmente la conocemos bajo el nombre del primer autor: la fórmula de Margrabe.

La aplicación más importante de la fórmula de Margrabe es la valuación de *spread options*, un derivado cuyo valor se deriva de la diferencia entre el precio de dos o más activos subyacentes. Este tipo de productos es muy frecuente en los mercados de *commodities* donde los inversores los usan para cubrirse del riesgo entre dos productos relacionados (por ejemplo, porotos de soja y aceite de soja). También encontramos aplicaciones de estas opciones en la literatura de finanzas corporativas. Por ejemplo, para: 1.- modelar *proxy contests*, Hancock y Mukherjee [18]; 2.- valorar la factibilidad de expandir un proyecto, Karsak et al. [23]; 3.- evaluar la selección de plataformas de software, Taudes et al. [36] y 4.- valorar el precio de intercambiar dos fábricas.

El interés en los derivados multi-activos fue creciendo con el pasar de los años, pero desafortunadamente muy pocos productos de esta clase pueden ser resueltos de forma cerrada. Para sobrellevar esta limitación se han ido desarrollado algoritmos numéricos basados en diferentes técnicas: diferencias finitas, *mesh algorithms*, árboles multi-nomiales, simulación de Monte Carlo, copulas, *wavelets*, *sparse grid methods*, entre otros. Un mayor nivel de detalle sobre este tema se encuentra en Firth [16].

2.2. Algoritmos multi-nomiales con forma de árboles

El mercado de derivados multi-activos comenzó a adquirir volumen a fines de la década del 80. A medida que la ingeniería financiera se volvió accesible al inversor particular, se desarrollaron nuevos productos más complejos. En esa época, existían solamente dos técnicas numéricas para valorar opciones: árboles (binomiales), basados en el modelo de Cox-Ross-Rubinstein (CRR) [12] y simulación de Monte Carlo.

Si bien ambos métodos podían ser utilizados para valorar opciones Europeas, la valuación de opciones Americanas sólo podía llevarse a cabo mediante la implementación de algoritmos similares al árbol binomial de CRR. Esto puso un gran interés en extender el algoritmo de CRR para valorar opciones Americanas. La técnica necesaria para adaptar el método de

simulación de Monte Carlo *Least Square Monte Carlo* recién fue desarrollada en el 2001 por Longstaff y Schwartz [27].

Técnicamente, a la hora de construir un algoritmo que pueda ser representado como un árbol, el investigador tiene dos herramientas: 1- elegir el tamaño de los saltos (entre los nodos de diferentes ramas) y 2- elegir las probabilidades de tal manera que la función característica de la distribución discreta converja a su respectiva distribución continua. Según Boyle, Evine y Gibbs (comúnmente abreviado como BEG) [7], esto se puede llevar a cabo de dos maneras.

La primera posibilidad es definir el tamaño de los saltos como en CRR [12] y elegir las probabilidades para que coincidan con la función característica. La segunda, es fijar las probabilidades (por ejemplo la probabilidad de un salto hacia arriba = probabilidad de un salto hacia abajo = probabilidad de un no salto = $1/3$) y luego determinar el tamaño de los saltos para garantizar la convergencia a la distribución continua. La mayoría de los papers, incluyendo CRR [12], Boyle [5] y BEG [7], siguen la primera opción. Sin embargo, Hua He [19] usa la segunda manera para construir el árbol multi-nomial.

Para que un árbol multi-nomial pueda usarse para valuar derivados debe satisfacer los siguientes tres requisitos:

1. debe ser recombinante, porque si no lo fuese el modelo sería computacionalmente inviable;
2. debe poder soportar hasta n activos;
3. debe preservar la completitud de mercado.

Vale señalar que para obtener una interpretación económica satisfactoria es necesario que el árbol preserve la completitud del mercado. Sin embargo, esto no es un requisito fundamental para obtener una buena convergencia.

En un trabajo publicado en 1988, Phelim Boyle [5], un matemático canadiense, resolvió

el problema de valorar opciones sobre dos variables subyacentes de riesgo mediante la implementación de una modificación del árbol binomial de CRR. En su modelo, cada activo puede moverse para arriba, permanecer constante, o moverse para abajo con probabilidades p_1, p_2, p_3 respectivamente. Por ejemplo, para valorar la opción para intercambiar dos activos, son necesarios dos árboles con tres ramas cada uno. Esto hace que el método de Boyle sea computacionalmente demandante, pero factible de ser usado comercialmente. Lo positivo del método es que aún para árboles con pocos pasos (alrededor de 20) observamos una muy buena convergencia.

Sin embargo, el modelo de Boyle tiene los siguientes inconvenientes:

1. solo puede soportar 2 activos de riesgo;
2. los árboles no son recombinantes;
3. no preserva la completitud del mercado.

Al no preservar la completitud del mercado, el precio del derivado que queramos valorar dependerá del precio de riesgo del mercado, que denotamos con el parámetro λ . La intuición es que λ refleja cuán distanciados están entre si, los nodos que comparten un mismo padre. Boyle llama un *stretch parameter*.

El primero de estos problemas fue resuelto al año siguiente en el trabajo de Boyle, Evine y Gibbs (BEG) [7] y extendido en Boyle de 1990 [6]. BEG suponen que en cada nodo cada activo puede moverse para arriba o abajo. Entonces después de cada momento tenemos 2^n posibles estados. El resto del algoritmo es análogo a CRR [12] y Boyle [5]. Hay que tener en cuenta que para poder aplicar este algoritmo necesitamos construir dos árboles con dos ramas para cada activo. Por lo tanto, los árboles no resultan ser recombinantes, lo que hace que el procedimiento sea muy lento.

A fines del año 1990, el problema de la completitud de mercado fue resuelto independientemente en dos trabajos: Madan, Milne y Shefrin [28] y He [19]. Madan, Milne y Shefrin [28], construyen un árbol $(N + 1)$ -nomial para N activos de tal manera que la distribución

del proceso en tiempo discreto para cada activo individual converge a su respectivo proceso continuo log-normal y unidimensional. He [19] explica, que este *paper* falla en no especificar las correlaciones entre los diferentes activos y por ende no establece una convergencia conjunta de los N activos riesgosos. Si bien el modelo satisface los tres requisitos (ser recombinante, poder soportar hasta N activos y preservar la completitud de mercado), para que se pueda usar para valuar derivados, debería asegurar una convergencia para procesos multivariados.

Madan, Milne y Shefrin [28] no tuvo un impacto considerable en la literatura. Fue refinado posteriormente por He en [19] y Chen et al. [10] quienes también desarrollaron un árbol multinomial que cumple con los tres requisitos mencionados más arriba. Sin embargo, según Amin [2], el método propuesto por He [19] no es muy útil desde una perspectiva computacional. La convergencia del modelo discreto a su análogo en el tiempo continuo también fue demostrada por Amin y Khanna [3], He [19] y Chen et al. [10].

Kamrad y Ritchken [22] desarrollaron un árbol para los problemas en Boyle, Evnine y Gibbs [7] extendiendo el método de BEG para permitir que los activos salten horizontalmente. En este caso, la convergencia es mucho más rápida que en el modelo anterior pero se pierde la completitud del mercado.

A comienzos de la década del 2000, ya existían bastantes métodos basados en árboles multi-nomiales, pero muy poco se conocía sobre la precisión y velocidad de convergencia de estos modelos. La cuestión de la convergencia fue abordada por Heston y Zhou [20] que muestran cómo unos árboles trinomiales convergen asintóticamente en $O(\Delta^{1/2})$ donde Δ es el tamaño del paso (*step size*). Una pregunta importante, planteada en Schachermayer y Hubalek [21] es si un árbol construido para aproximar un sistema de difusiones correlacionadas pueda usarse para aproximar los precios de los contratos derivados. La respuesta es afirmativa.

La literatura más reciente sobre árboles multi-nomiales se concentra en extender su apli-

cación para nuevas situaciones. Martini [30] presenta un minucioso detalle de los árboles binomiales y trinomiales existentes y muestra cómo pueden ser usados para valuar opciones barreras. Sierag [34] desarrolla un novedoso árbol multinomial recombinante basado en el simplex de Pascal. Figlewski, Gao y Ahn en [15] y [1] crearon una técnica muy usada actualmente en la práctica; descubrieron que era posible obtener una convergencia más precisa si reducían el *step size* en los nodos cercanos a la barrera.

Si bien a lo largo del tiempo estos métodos han ido mejorando considerablemente, su aplicación en la práctica aún no es frecuente. En general, programar árboles multi-nomiales resulta una tarea difícil, manipularlos requiere de conocimientos de programación avanzados y obtener resultados precisos demanda tiempo. Por lo tanto no debe sorprendernos que se utilicen simulaciones de Monte Carlo en vez de árboles multi-nomiales, dejando estos últimos como un *back up* para corroborar los resultados obtenidos mediante simulaciones.

2.3. Opciones multi-*asset* barrera

La primera mención sobre opciones barrera en la literatura aparece en Snyder [35]. Poco a poco fue incrementando el interés comercial en estos productos y *Risk Magazine* publicó un artículo escrito por Rubinstein y Reiner [33] en el cual explican que valuar una opción barrera es más sencillo que valuar opciones Americanas porque la barrera crítica está determinada con anterioridad y especificada en el contrato y esto permite, en algunos casos, encontrar soluciones cerradas.

La primera referencia bibliográfica al uso de algoritmos basados en árboles para valuar derivados con barreras es Broadie et al. [9]. Un punto importante que debemos considerar, acota Kou [24], es si el cruce de la barrera se monitoriza en tiempo continuo o discreto. La mayoría de los modelos supone que la barrera se monitoriza en tiempo continuo. Sin embargo, en la práctica, debido a varias razones: legales, contractuales, etc, casi todas las

opciones barreras son monitorizadas en tiempo discreto.

Broadie et al. [9] usan los métodos de Boyle [5] y de Kamrad y Ritchken [22]. Los autores extienden el modelo de Boyle y Lau [8] quienes encontraron que ubicando los nodos relativamente cerca a la barrera afecta radicalmente la convergencia del método binomial. Siguiendo esta idea, Ritchken [32] aplica el algoritmo de Boyle [6] pero el elige un valor particular para el parámetro de apertura de tal manera que una capa de nodos coincida siempre con la barrera para cualquier número de pasos temporales.

La valuación de opciones barrera con múltiples activos como subyacentes siguió siendo un problema abierto hasta que en 1997 Kwok et al. [25] descubrieron, usando el método de imágenes y funciones de Green, un algoritmo para valuar opciones multi-activos con una barrera externa. Adicionalmente, aplicando un método similar Chen, Petrou y Suchanec-ki [11] lograron derivar formulas con soluciones cerradas para valuar opciones *Parisian Rainbow*, que podrían ser de gran utilidad en el marco de derivados climáticos.

A modo de conclusión, podemos remarcar que la ventaja de utilizar árboles multi-nomiales es su flexibilidad. Sin embargo, estos algoritmos son computacionalmente demandantes, difíciles de implementar y en general lentos.

Capítulo 3

El algoritmo de Hua He

La clave del algoritmo de Hua He es aproximar la difusión N -dimensional que modela el proceso de los precios con una secuencia de procesos N -variados, $(N + 1)$ -nominales. Este modelo es una generalización del modelo estándar binomial de Cox, Ross y Rubinstein [12]. El modelo de He consiste de N activos riesgosos (acciones) y un activo libre de riesgo (bono) de tal manera que estos activos conformen un mercado de activos dinámicamente completo.

El modelo discreto resultante también forma un mercado de activos dinámicamente completo. Esto significa que el riesgo de cada contrato derivado sobre alguno de estos activos puede ser perfectamente cubierto en cualquier punto del tiempo con un portafolio de subyacentes y el numerario.

Hua He demuestra además que los precios de todos los pagos contingentes y el portafolio de estrategias de replicación derivadas del modelo en tiempo discreto convergen en el límite a su correspondiente precio y portafolio de estrategia de replicación del modelo en tiempo continuo.

3.1. Construcción

La idea básica es aproximar los incrementos de N movimientos Brownianos independientes con N variables aleatorias no correlacionadas.

3.1.1. Primer paso: construcción de N variables aleatorias no correlacionadas

Para aproximar los incrementos de los movimientos Brownianos en todos los sub-intervalos, construimos una secuencia de vectores aleatorios, N -dimensionales, independientes e idénticamente distribuidos (iid), $\tilde{\epsilon}^k = (\tilde{\epsilon}_1^k, \dots, \tilde{\epsilon}_N^k)^T$, $k = 1, 2, \dots, n$, donde n designa el número de pasos temporales.

Sea A una matriz de orden $(N + 1)$, real y ortonormal tal que su última columna es $(1/\sqrt{N + 1}, \dots, 1/\sqrt{N + 1})^T$. Por ejemplo, cuando $N = 1$, A puede ser

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Cuando $N = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Cuando $N = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3.1.2. Segundo paso

Definimos una matriz E tal que: $e_{s,j} = a_{s,j}\sqrt{N+1}$, donde $a_{s,j}$ es el s -to elemento en la j -va columna de A . Hay que tener en cuenta que la última columna de E por construcción va a ser siempre igual a 1. Por ejemplo, cuando $N = 2$

$$E = \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1,3} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} \\ e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Cuando $N = 3$

$$E = \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1,3} & e_{1,4} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} & e_{2,4} \\ e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} & e_{3,4} \\ e_{4,1} & e_{4,2} & e_{4,3} & e_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -1 & 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.3. Tercer paso: descomposición de Cholesky

En este paso, expresamos el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas fundamental del mercado como función de una sucesión de movimientos Brownianos independientes usando la descomposición de Cholesky de la matriz de correlaciones.

El caso $N = 2$ figura en el *paper* de He. Para $N = 3$, la parte estocástica de la estructura del mercado puede ser descripta como: $\langle dB_1, dB_2 \rangle = \rho_{12}dt$, $\langle dB_1, dB_3 \rangle = \rho_{13}dt$, $\langle dB_2, dB_3 \rangle = \rho_{23}dt$. Usando la matriz de descomposición de Cholesky obtenemos:

$$\begin{aligned} e_1 &= W_1, \\ e_2 &= \rho_{12}W_1 + \sqrt{1 - \rho_{12}^2}W_2, \\ e_3 &= \rho_{13}W_1 + \rho_{23}^*W_2 + \rho_{33}^*W_3, \end{aligned}$$

dónde

$$\rho_{23}^* = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}}; \rho_{33}^* = \sqrt{\frac{1 - \rho_{12}^2 - \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2 + 2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13}}{1 - \rho_{12}^2}}.$$

Finalmente, a partir de las ecuaciones anteriores, obtenemos que los precios de los activos siguen tres procesos log-normales correlacionados que satisfacen las siguientes ecuaciones

diferenciales estocásticas

$$dS_1 = \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dW_1,$$

$$dS_2 = \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 \rho_{12} dW_1 + \sigma_2 S_2 \sqrt{1 - \rho_{12}^2} dW_2,$$

$$dS_3 = \mu_3 S_3 dt + \sigma_3 S_3 \rho_{13} dW_1 + \sigma_3 S_3 \rho_{23}^* dW_2 + \sigma_3 S_3 \rho_{33}^* dW_3,$$

dónde W_1 , W_2 y W_3 son tres movimientos Brownianos independientes, σ_i^2 representa la volatilidad del retorno instantáneo de la acción i y ρ es el coeficiente de correlación entre los retornos instantáneos de las dos acciones.

3.1.4. Cuarto paso: aplicación de la fórmula 6 del paper de He

Finalmente, para obtener el árbol $N + 1$ -nominal, definimos el proceso N -variado, $(N + 1)$ -nomial que representa los precios de las acciones, S^n como la solución a la ecuación diferencial estocástica

$$S_{k+1}^n = S_k^n + \frac{b(S_k^n)}{n} + \sigma(S_k^n) \frac{e^k}{\sqrt{n}},$$

dónde k es el *time step* y para un k fijo, e_1^k, \dots, e_N^k son todas no-correlacionadas entre sí. Adicionalmente e^1, e^2, \dots, e^n puede ser tratado como una secuencia de vectores aleatorios independiente e idénticamente distribuidos. También S_k^n denota el vector de precios de la acción en el tiempo k/n y $S_0^n = S_0$ cuya expresión explícita es

$$S_{k+1,j}^n = \begin{cases} S_{k,j}^n + \frac{b_j(S_k^n)}{n} + \sigma_{j,1}(S_k^n) \frac{e_{1,1}}{\sqrt{n}} + \cdots + \sigma_{j,N}(S_k^n) \frac{e_{1,N}}{\sqrt{n}} \\ S_{k,j}^n + \frac{b_j(S_k^n)}{n} + \sigma_{j,1}(S_k^n) \frac{e_{2,1}}{\sqrt{n}} + \cdots + \sigma_{j,N}(S_k^n) \frac{e_{2,N}}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ S_{k,j}^n + \frac{b_j(S_k^n)}{n} + \sigma_{j,1}(S_k^n) \frac{e_{N+1,1}}{\sqrt{n}} + \cdots + \sigma_{j,N}(S_k^n) \frac{e_{N+1,N}}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

Usando esta ecuación obtenemos:

1) Para $N = 2$.

$$S_{k+1,1}^n = \begin{cases} S_{k,1}^n + \frac{\mu_1 S_{k,1}^n}{n} + \sigma_1 S_{k,1}^n \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n}} = S_{k,1}^n a1 \\ S_{k,1}^n + \frac{\mu_1 S_{k,1}^n}{n} = S_{k,1}^n a2 \\ S_{k,1}^n + \frac{\mu_1 S_{k,1}^n}{n} - \sigma_1 S_{k,1}^n \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n}} = S_{k,1}^n a3 \end{cases}$$

$$S_{k+1,2}^n = \begin{cases} S_{k,2}^n + \frac{\mu_2 S_{k,2}^n}{n} + \sigma_2 \rho S_{k,2}^n \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n}} + \sigma_2 + \sqrt{1 - \rho^2} S_{k,2}^n \frac{1}{\sqrt{2n}} = S_{k,2}^n b1 \\ S_{k,2}^n + \frac{\mu_2 S_{k,2}^n}{n} - \sigma_2 + \sqrt{1 - \rho^2} S_{k,2}^n \frac{2}{\sqrt{2n}} = S_{k,2}^n b2 \\ S_{k,2}^n + \frac{\mu_2 S_{k,2}^n}{n} - \sigma_2 \rho S_{k,2}^n \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n}} + \sigma_2 + \sqrt{1 - \rho^2} S_{k,2}^n \frac{1}{\sqrt{2n}} = S_{k,2}^n b3 \end{cases}$$

donde $a1, a2, a3, b1, b2, b3$ son definidos cuando sacamos $S_{k,1}^n$ y $S_{k,2}^n$ respectivamente como factores comunes.

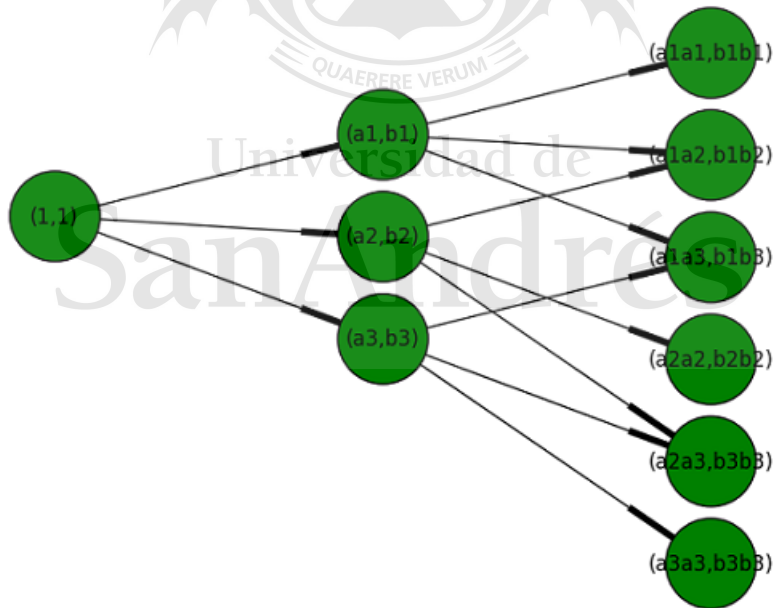
2) Para $N = 3$, utilizando la notación simplificada $S_{k,i}^n = S_i$

$$S_{k+1,1}^n = \begin{cases} S_1 + \frac{\mu_1 S_1}{n} + \frac{\sigma_1 S_1}{n} \\ S_1 + \frac{\mu_1 S_1}{n} - \frac{\sigma_1 S_1}{n} \\ S_1 + \frac{\mu_1 S_1}{n} + \frac{\sigma_1 S_1}{n} \\ S_1 + \frac{\mu_1 S_1}{n} - \frac{\sigma_1 S_1}{n} \end{cases}$$

$$S_{k+1,2}^n = \begin{cases} S_2 + \frac{\mu_2 S_2}{n} + \frac{\sigma_2 S_2 \rho_{12}}{\sqrt{n}} + \sigma_2 S_2 \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \frac{2}{\sqrt{2n}} \\ S_2 + \frac{\mu_2 S_2}{n} - \frac{\sigma_2 S_2 \rho_{12}}{\sqrt{n}} \\ S_2 + \frac{\mu_2 S_2}{n} + \frac{\sigma_2 S_2 \rho_{12}}{\sqrt{n}} - \sigma_2 S_2 \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \frac{2}{\sqrt{2n}} \\ S_2 + \frac{\mu_2 S_2}{n} - \frac{\sigma_2 S_2 \rho_{12}}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$S_{k+1,3}^n = \begin{cases} S_3 + \frac{\mu_3 S_3}{n} + \frac{\sigma_3 S_3 \rho_{13}}{\sqrt{n}} + \sigma_3 S_3 \rho_{23}^* \frac{2}{\sqrt{2n}} \\ S_3 + \frac{\mu_3 S_3}{n} - \frac{\sigma_3 S_3 \rho_{13}}{\sqrt{n}} + \sigma_3 S_3 \rho_{33}^* \frac{2}{\sqrt{2n}} \\ S_3 + \frac{\mu_3 S_3}{n} + \frac{\sigma_3 S_3 \rho_{13}}{\sqrt{n}} - \sigma_3 S_3 \rho_{23}^* \frac{2}{\sqrt{2n}} \\ S_3 + \frac{\mu_3 S_3}{n} - \frac{\sigma_3 S_3 \rho_{13}}{\sqrt{n}} - \sigma_3 S_3 \rho_{33}^* \frac{2}{\sqrt{2n}} \end{cases}$$

Gráficamente, esto produce un árbol multinomial recombinante. Para $N = 2$ el esquema del árbol es el siguiente:



Capítulo 4

Opciones *spread* y la fórmula de Margrabe

4.1. Introducción

En esta capítulo, introducimos el concepto de una opción *spread*, demostramos la fórmula de Margrabe y mostramos en detalle cómo calcular sus sensibilidades.

4.2. Opciones *spread*

4.2.1. Definición

Una opción *spread* es un contrato derivado cuyo valor deriva de la diferencia entre dos o más activos. Es un producto muy frecuente en la industria financiera porque le permite al comprador tomar posiciones en uno o más activos al mismo tiempo.

Potencialmente, estas opciones podrían depender del precio de varios activos subyacentes, aquí solamente vamos a considerar opciones *spread* que dependan de dos activos subya-

centes y para las cuales hay solución cerrada.

Podemos escribir el *payoff* como:

$$\text{Payoff} = \text{máx}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1 - S_2 - K], 0\} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1 - S_2 - K]^+, \quad (4.1)$$

donde tomamos la esperanza \mathbb{E} bajo la medida de neutralidad al riesgo \mathbb{Q} .

Una opción *exchange* representa el caso especial de una opción spread cuando $K = 0$. Sólo en el caso de opciones *exchange* existe una fórmula de valuación cerrada, obtenida por Fisher y Margrabe y que se conoce como la "fórmula de Margrabe".

4.2.2. Usos de las opciones spread

Estas opciones son ubicuas en la industria financiera, especialmente en los mercados de *commodities* (tanto en mercados agropecuarios como en los no-agropecuarios -como por ejemplo: gas, electricidad, etc-). Los mercados más importantes para estos productos son el NYMEX y el CBOT en Chicago. Vale señalar que son usados a diario por productores de *commodities* en todo el mundo como una forma de cubrirse del riesgo de un cambio abrupto entre el precio del material primario y su producto secundario. Por ejemplo:

- *Crush Spread* es un producto que consiste en el intercambio de poroto de soja y alguno de sus productos secundarios, generalmente, una combinación de aceite de soja y harina de soja. Estos derivados son activamente comercializados en el CBOT.
- *Spark Spread* es un contrato que involucra el intercambio de gas natural por alguna medida del precio de un unidad de electricidad. A diferencia del crush spread, estos contratos se comercializan mayoritariamente en el NYMEX.
- *Crack Spread* involucra el intercambio de petróleo con su producto refinado, ya sea gasolina, diésel, aceite para calefaccionar, etc. También se comercializan mayorita-

riamente en el NYMEX.

En los mercados de renta fija, las posibilidades son múltiples ya que estos contratos son negociados OTC. Los contratos más comunes consisten en el intercambio de activos con diferentes fechas de expiración, diferentes niveles de calidad crediticia y diferentes emisores. En los mercados de *foreign exchange*, los exportadores a menudo necesitan intercambiar diferentes monedas para cubrirse del riesgo cambiario. En los mercados de acciones, es común necesitar intercambiar dos acciones de diferentes compañías, o grupos de acciones de diferentes rubros.

4.3. Métodos de valuación

Existen dos posibilidades para valorar opciones *spread*: métodos numéricos y aproximaciones analíticas. Los métodos numéricos atacan el problema usando la Transformada Rápida de Fourier, integración numérica o simulación de Monte Carlo. Los métodos analíticos tratan de obtener fórmulas cerradas para aproximar el precio de la opción.

En Deng et al. [14] los autores introducen un concepto novedoso: la *frontera de ejercicio* definida como la distancia mínima del precio logarítmico del primer activo, en función del precio logarítmico del segundo activo, para que la opción expire *in the money*. Los autores argumentan que la razón por la cual existe una solución de fórmula cerrada para el caso de la *exchange option* es que la frontera de ejercicio es lineal cuando el "spread", K , es igual a cero. En general, $K \neq 0$ lo que hace que la frontera de ejercicio no sea lineal y por lo tanto no se puedan desarrollar nuevas soluciones cerradas.

Los métodos de valuación son juzgados según su velocidad de convergencia y su precisión. En general, son buenas aproximaciones, pero ocasionalmente los tiempos de corrida son muchos más largos que lo deseable. Por otro lado, los métodos basados en aproximaciones analíticas son más rápidos que los numéricos pero frecuentemente no pueden ser utilizados

en la práctica por falta de precisión.

4.4. La fórmula de Margrabe

Empezamos por analizar el caso de la opción para intercambiar dos activos en el futuro, que tiene solución cerrada. Introducimos la fórmula de Margrabe, calculamos sus sensibilidades (*Greeks*) y finalmente programamos estos resultados.

Lo que sigue a continuación está basado en las notas de clase de Davis [13] y la derivación de la fórmula de Margrabe, en el trabajo de MingQian Li [26].

Por definición, el precio de la opción para intercambiar un Activo 1 por un Activo 2 en tiempo T es el valor presente de (4.1) con $K = 0$. Con esto en mente, el valor de la opción está dado por:

$$C = \mathbb{E}[e^{-rT} \max(S_1(t) - S_2(t), 0)] = \mathbb{E}[e^{-rT} (S_1(t) - S_2(t))^+] \quad (4.2)$$

Bajo la medida neutral al riesgo \mathbb{Q} , modelamos los precios de los activos como movimientos Brownianos correlacionados. Para simplificar la notación los valores iniciales son $S_1(0) = s_1$ y $S_2(0) = s_2$.

$$dS_1(t) = rS_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dw_1, \quad S_1(0) = s_1, \quad (4.3)$$

$$dS_2(t) = rS_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)dw_2, \quad S_2(0) = s_2, \quad (4.4)$$

donde w_1 y w_2 son movimientos Brownianos con $\mathbb{E}[dw_1 dw_2] = \rho dt$ y el parámetro r representa la tasa de retorno libre de riesgo. La fórmula de Margrabe está, por lo tanto, dada por

$$C(s_1, s_2) = s_1 N(d_1) - s_2 N(d_2), \quad (4.5)$$

donde $N(\cdot)$ es la acumulativa de la distribución normal y

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}, \\ \sigma &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \end{aligned}$$

4.4.1. Demostración de la fórmula de Margrabe mediante un cambio de numerario

La intuición detrás de esta demostración es transformar la *exchange option* usando el teorema de Girsanov para obtener una expresión que se parezca a la fórmula Black-Scholes y que pueda ser resuelta usando esta fórmula.

$$\begin{aligned} C &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \max(S_1(T) - S_2(T), 0) \right], \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} S_2(T) \max\left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1, 0\right) \right]. \end{aligned}$$

Cabe señalar que C en (4.5) y (4.7) no dependen de r , porque $S_i(t) = e^{rt} \tilde{S}_i(t)$ para ambos $i = 1, 2$. $\tilde{S}_i(t)$ proviene de la solución a las SDE en (4.3) y (4.4).

Primero necesitamos expresar C en (4.7) como el cociente entre $S_1(t)$ y $S_2(t)$. Esto es equivalente a usar el Activo 2 como numerario.

Dado que C no depende de r , podemos asumir sin pérdida de generalidad que $r = 0$. Para

simplificar aún más la notación, ya que $r = 0$, $\tilde{S}_i(T) = S_i(T)$. Podemos concluir que bajo la medida neutral al riesgo \mathbb{Q} , C está dado por:

$$C = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\tilde{S}_2(T) \max \left(\frac{\tilde{S}_1(T)}{\tilde{S}_2(T)} - 1, 0 \right) \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[S_2(T) \max \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1, 0 \right) \right].$$

Sea $Y_t = S_1(t)/S_2(t)$, por una aplicación directa del lema de Ito

$$dY = Y (\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho) dt + Y (\sigma_1 dw_1 - \sigma_2 dw_2).$$

Definimos una nueva medida $\tilde{\mathbb{Q}}$ según la siguiente derivada de Radon-Nikodym:

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_T = \Lambda_T = \frac{e^{-rT} S_2(T)}{S_2(0)} \Big|_{r=0} = \frac{S_2(T)}{S_2(0)}.$$

Por el teorema de Girsanov, también tenemos que, bajo la nueva medida $\tilde{\mathbb{Q}}$

$$d\tilde{w}_2 = dw_2 - \sigma_2 dt.$$

Recordemos que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[dw_1 dw_2] = \rho$. Usando la descomposición de Cholesky de la matriz de correlaciones ρ , podemos escribir w_1 en términos de otro movimiento Browniano $w'(t)$ independiente de $w_2(t)$. Es posible probar que w' sigue siendo un movimiento Browniano bajo $\tilde{\mathbb{Q}}$, independiente de \tilde{w}_2 (ver Davis [13]). Entonces, bajo \mathbb{Q} tenemos que

$$w_1 = \rho w_2 + \sqrt{1 - \rho^2} w'(t).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 d\tilde{w}_1 &= \rho d\tilde{w}_2 + \sqrt{1 - \rho^2} dw'(t) = \rho [dw_2 - \sigma_2 dt] + \sqrt{1 - \rho^2} dw'(t), \\
 &= \rho dw_2 - \rho \sigma_2 dt + \sqrt{1 - \rho^2} dw'(t), \\
 &= dw_1 - \sqrt{1 - \rho^2} dw'(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dw'(t) - \rho \sigma_2 dt, \\
 &= dw_1(t) - \rho \sigma_2 dt.
 \end{aligned}$$

La ecuación de Y bajo $\tilde{\mathbb{Q}}$ es

$$dY = Y(\sigma_1 d\tilde{w}_1 - \sigma_2 d\tilde{w}_2) = Y\sigma dw,$$

donde w es un movimiento Browniano estándar. y σ está definida en (4.15). Por lo tanto,

$$C = S_2(0) \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}} [(Y(T) - 1)^+]. \quad (4.9)$$

De (4.9) podemos deducir que la opción para intercambiar activos es equivalente a una opción *call* sobre el activo Y con volatilidad σ , precio de ejercicio (*strike*) 1 y tasa de retorno libre de riesgo 0. La solución (4.5) de esta opción se obtiene modificando la fórmula de Black-Scholes.

4.4.2. Valores de los parámetros

En lo que resta del trabajo asignamos los siguientes valores a los parámetros del modelo.

Valores	
$s_1 = 200$	$s_2 = 250$
$\sigma_1 = 0.3$	$\sigma_2 = 0.2$
$\rho = 0.75$	$T = 1$
$r = 0.10$	

4.5. Convergencia del modelo de He al precio de Margrabe

En los gráficos siguientes observamos que a medida que incrementamos el número n de pasos temporales, el algoritmo de He converge por debajo al precio de la opción de Margrabe. Usando $n = 500$, donde n se refiere al número de pasos temporales, la diferencia entre ambos es aproximadamente 0,0032. El método es preciso para valores pequeños de n (por ejemplo $n = 80$), pero a medida que incrementamos n la brecha disminuye. Visualmente la diferencia entre ambos tiende a cero con n creciente.

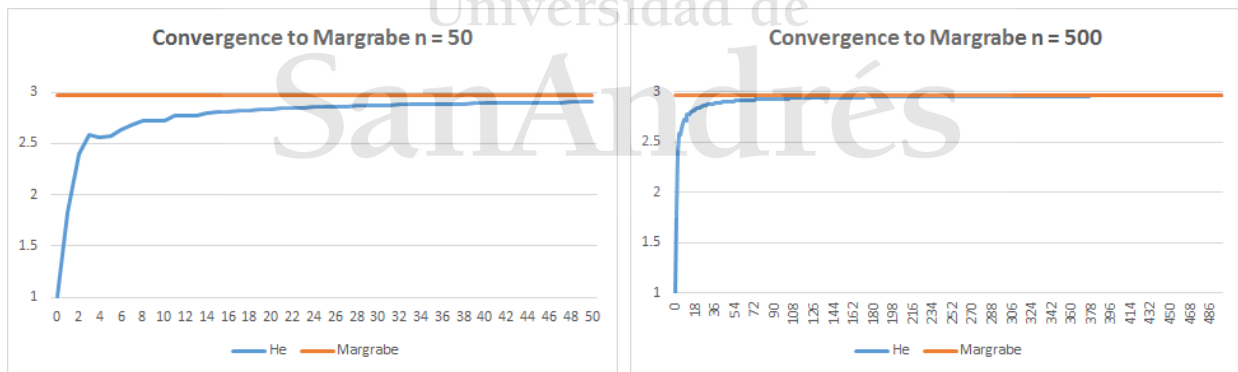


Figura 4.1. He con $n = 50$

Figura 4.2. He con $n = 500$

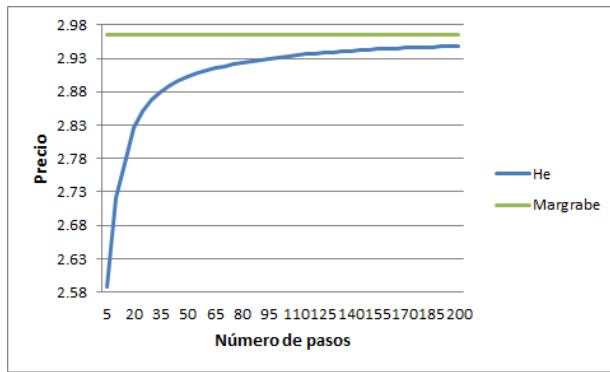


Figura 4.3.

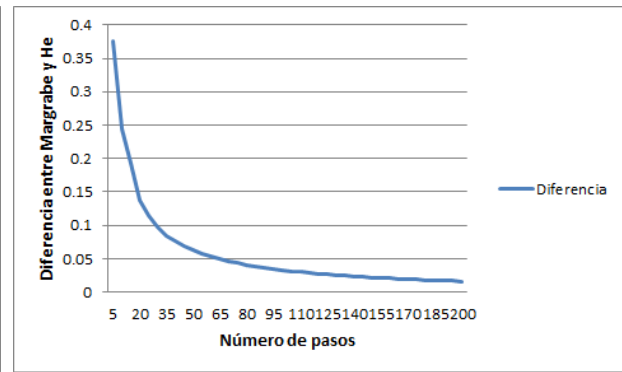


Figura 4.4.

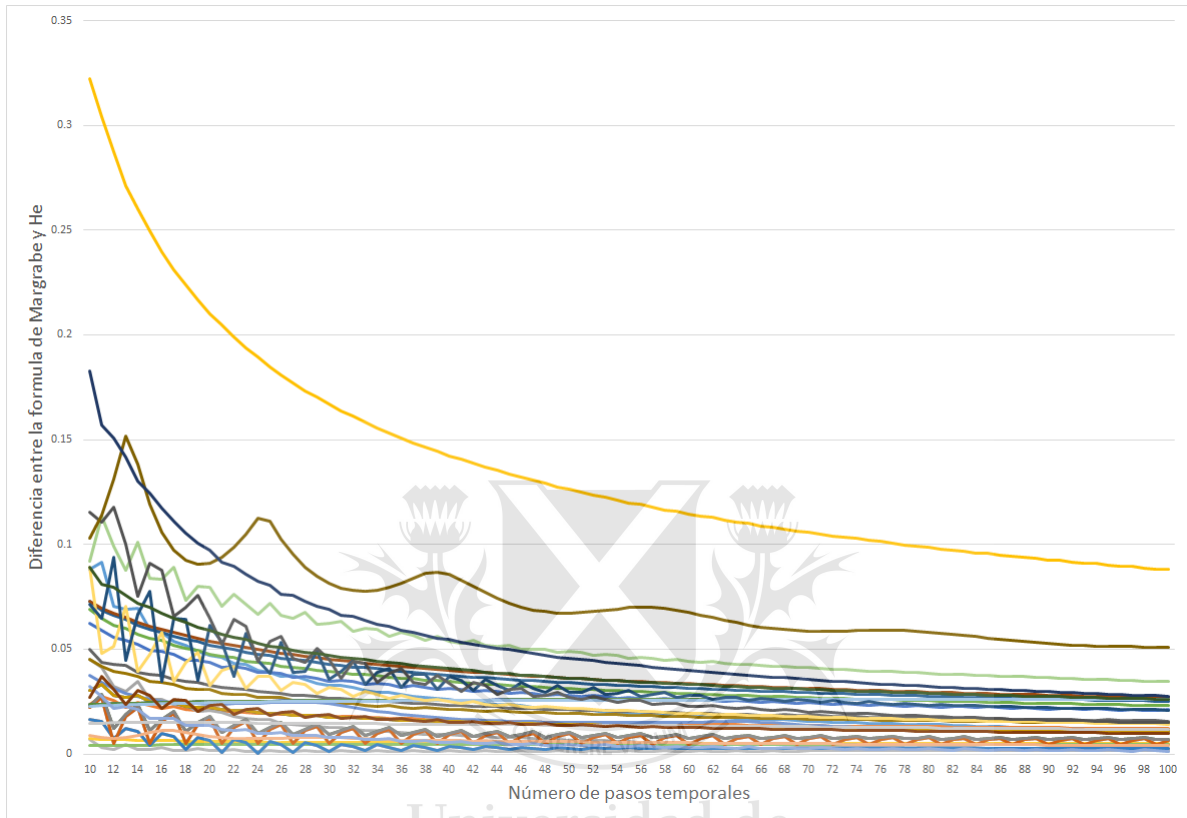
El principal inconveniente es que el tiempo de corrida crece exponencialmente con el número de pasos.



Figura 4.5. Tiempo de corrida

A continuación repetimos el mismo ejercicio, variando los parámetros del modelo a modo de simular la performance del algoritmo a la hora de valorar la opción de Margrabe. Para poder comparar los resultados y no depender de valores absolutos, graficamos la diferencia entre los valores obtenidos con la fórmula de Margrabe y el método de He en términos de

este último. Observamos claramente cuando aumenta n , el resultado obtenido con el He se aproxima al valor teórico de la opción, cualesquiera sean los parámetros del modelo. Aún para árboles pequeños, de 10 a 15 pasos, observamos una buena convergencia.



4.6. Sensibilidades – *The Greeks*

Las *Greeks* son las sensibilidades del precio de la opción con respecto a los subyacentes y parámetros del modelo. Intuitivamente son una medida de cómo cambia el precio de la opción cuando algún parámetro o variable (por ejemplo S_2 , σ y ρ) varía. Matemáticamente esto es equivalente a calcular la derivada del precio de la opción con respecto a cada uno de los parámetros. Para utilizar el algoritmo de Hua He para valorar opciones, debemos asegurarnos que el algoritmo numérico aproxime con precisión las sensibilidades de la opción de Margrabe.

Primero demostramos que el precio de la opción es homogéneo de grado 1. Usaremos este

resultado junto al teorema de Euler para derivar el resto de las sensibilidades sin caer en álgebra tediosa.

Lemma 4.6.1. *El precio de la opción, $C(s_1, s_2) = s_1N(d_1) - s_2N(d_2)$, que se desprende de la ecuación (4.5), es homogéneo de grado uno en (s_1, s_2) .*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos deducir:

$$\begin{aligned}
 C(\lambda s_1, \lambda s_2) &= \lambda s_1 N\left(\frac{\ln\left(\frac{\lambda s_1}{\lambda s_2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \lambda s_2 N\left(\frac{\ln\left(\frac{\lambda s_1}{\lambda s_2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right) \\
 \\
 C(\lambda s_1, \lambda s_2) &= \lambda s_1 N\left(\frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \lambda s_2 N\left(\frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right), \\
 &= \lambda s_1 N(d_1) - \lambda s_2 N(d_2) = \lambda (s_1 N(d_1) - s_2 N(d_2)), \\
 &= \lambda C(s_1, s_2).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $C(s_1, s_2)$ es homogéneo de grado 1 en (s_1, s_2) .

Universidad de

San Andrés

□

Primero vamos a hacer un cambio de numerario y expresar el valor de la *exchange option* en términos de S_2 .

Ahora supongamos que en la demostración anterior $\lambda = 1/S_2$. Siguiendo con la misma lógica: $(1/S_2)C(S_1, S_2) = C(S, 1)$ o $C(S_1, S_2) = S_2 C(S, 1)$ donde $S = S_1/S_2$ y $C(S, 1)$ es

una opción *call* con precio de ejercicio \$1 cuya solución es:

$$C(S, 1) = N(d_1)S_t - N(d_2)e^{-r(T-t)},$$

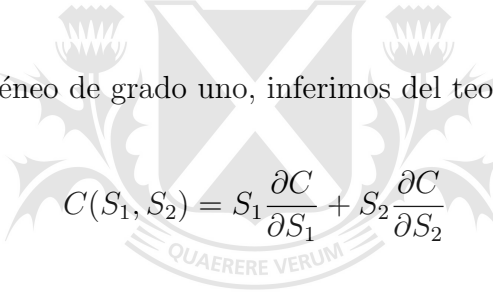
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln S_t + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right],$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

De los resultados anteriores obtenemos

$$C(S_1, S_2) = S_2 C(S, 1) = S_2 (S N(d_1) - N(d_2)).$$

Debido a que C es homogéneo de grado uno, inferimos del teorema de Euler que:



$$C(S_1, S_2) = S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2}$$

Esto implica que $\partial C / \partial S_1 = N(d_1)$ y $\partial C / \partial S_2 = -N(d_2)$.

Antes de continuar con la derivación de las sensibilidades, cabe la pena recordar:

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

4.6.1. Delta

La *Greek* Delta Δ representa como la medida de la sensibilidad del precio de la opción con respecto a cambios en el precio del activo subyacente. Además, usamos la *greek* delta como

una medida de *moneyness*: la probabilidad de que la opción expire *in the money*.

$$\Delta_1 = \frac{\partial C}{\partial S_1} = N(d_1),$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial C}{\partial S_2} = -N(d_2)$$

Gráficamente, podemos observar que a medida que n aumenta, el valor obtenido mediante el método de He converge a la solución cerrada. Además, observamos que la convergencia es desde arriba o desde abajo, no oscila alrededor del valor solución cerrada.

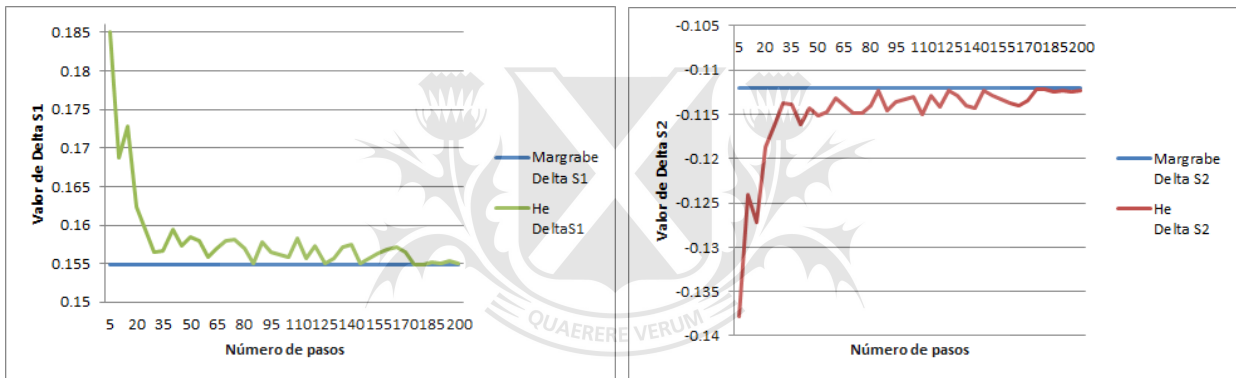


Figura 4.6. Delta S1

Figura 4.7. Delta S2

Los gráficos siguientes muestran que las diferencias entre ambos tienden a cero con n creciente.

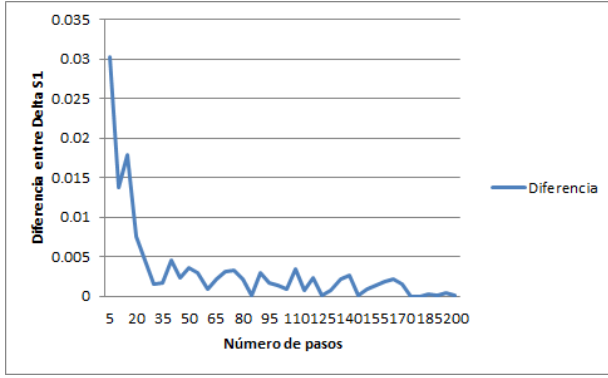


Figura 4.8. Diferencia Delta S1

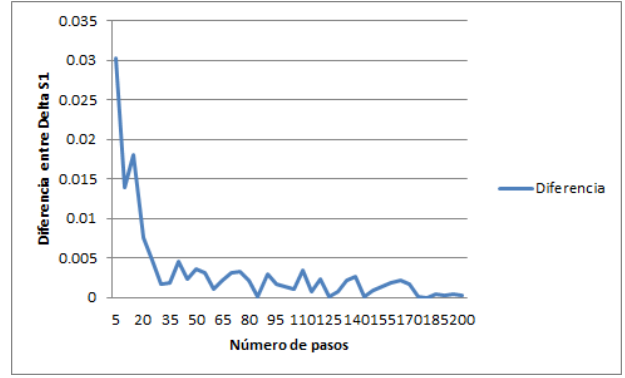


Figura 4.9. Diferencia Delta S2

4.6.2. Vega ν

Vega ν mide la sensibilidad de la opción con respecto a la volatilidad. Matemáticamente es la derivada del valor de la opción con respecto a la volatilidad del activo subyacente. Intuitivamente expresa la cantidad de dinero por activo subyacente que el valor de la opción ganará o perderá a medida que la volatilidad aumente o disminuya en 1%.

Primero vale la pena notar que $\partial d_2 / \partial \sigma_1 = \partial d_1 / \partial \sigma_1 - \partial \sigma / \partial \sigma_1 \sqrt{t}$. Además $\partial \sigma / \partial \sigma_1 = (\sigma_1 - \rho \sigma_2) / \sigma$ y análogamente para $\partial \sigma / \partial \sigma_2$.

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= \frac{\partial C}{\partial \sigma_1} = S_1 N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_1} - S_2 N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_1} \\
 &= [S_1 N'(d_1) - S_2 N'(d_2)] \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_1} + S_2 N'(d_2) \frac{\sigma_1 - \rho \sigma_2}{\sigma} \sqrt{t} \\
 &= S_2 N'(d_2) \frac{\sigma_1 - \rho \sigma_2}{\sigma} \sqrt{t} = S_1 N'(d_1) \frac{\sigma_1 - \rho \sigma_2}{\sigma} \sqrt{t} \\
 &= \frac{S_1 \sqrt{t} e^{d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma_1 - \rho \sigma_2}{\sigma} \right) \\
 \nu_2 &= \frac{S_1 \sqrt{t} e^{d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma_2 - \rho \sigma_1}{\sigma} \right)
 \end{aligned}$$

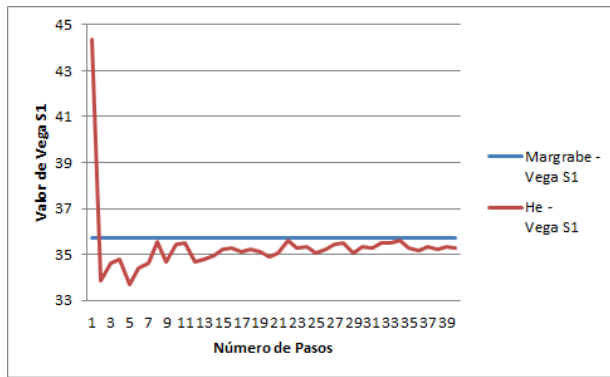


Figura 4.10. Vega S1

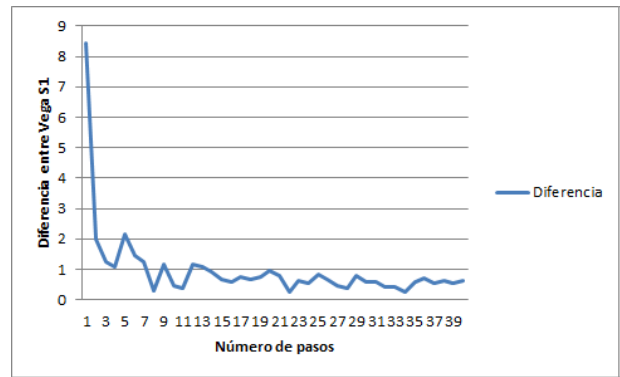


Figura 4.11. Diferencia Vega S1

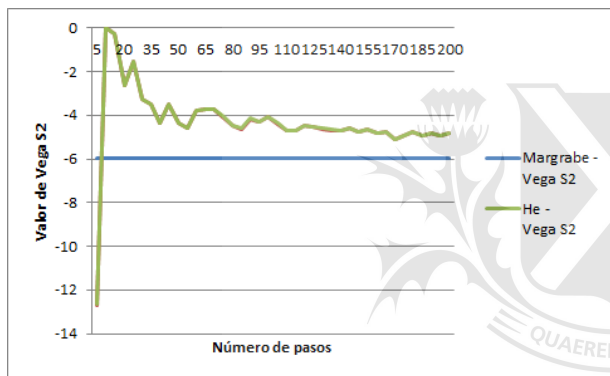


Figura 4.12. Vega S2

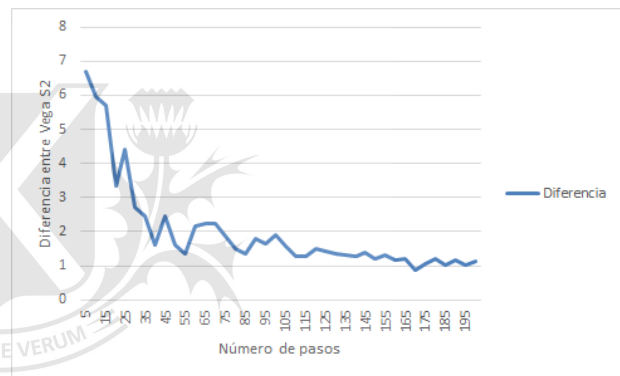


Figura 4.13. Diferencia Vega S2

Universidad de
San Andrés
 QUERERE VERUM

4.6.3. Sensibilidad con respecto a la correlación

La sensibilidad con respecto a la correlación expresa la cantidad de dinero por activo subyacente que el valor de la opción ganará o perderá a medida que la correlación entre

los activos varíe en 1 %. Formalmente,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial \rho} &= S_1 N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \rho} - S_2 N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \rho} \\
 &= S_1 N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \rho} - S_2 N'(d_2) \left[\frac{\partial d_1}{\partial \rho} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} \sqrt{t} \right] \\
 &= [S_1 N'(d_1) - S_2 N'(d_2)] \frac{\partial d_1}{\partial \rho} - S_2 N'(d_2) \sqrt{t} \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} \right) \\
 &= -S_2 N'(d_2) \sqrt{t} \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} \right) = -S_1 N'(d_1) \sqrt{t} \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} \right), \\
 \\
 \frac{\partial C}{\partial \rho} &= -S_2 N'(d_2) \sqrt{t} \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} \right) = -\frac{S_1 \sqrt{t} e^{d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma_2 \sigma_1}{\sigma} \right).
 \end{aligned}$$

Intuitivamente, la opción carece de valor cuando ambos activos están perfectamente correlacionados porque si

1. los activos están perfectamente y positivamente correlacionados ($\rho = 1$), la opción para intercambiarlos es análoga a la opción para intercambiar un mismo activo, es decir Activo 1 por Activo 1,
2. los activos están perfectamente y negativamente correlacionados ($\rho = -1$), la opción para intercambiarlos equivale a vender en corto uno de los activos.

De esto se desprende que la sensibilidad con respecto a la correlación ($\partial C / \partial \rho$) decrezca a medida que incrementamos el valor absoluto de la correlación entre ambos activos ($|\rho|$).

Es decir, $\partial C / \partial \rho$ aumenta según cuán disímiles sean ambos activos.

Gráficamente podemos observar que la sensibilidad a la correlación calculada usando el He converge por debajo a la obtenida por la fórmula de Margrabe.

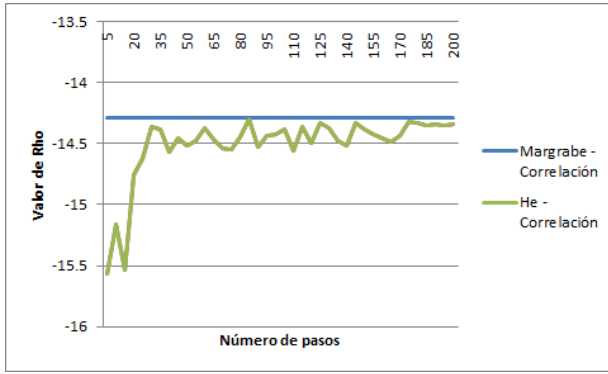


Figura 4.14. Correlación



Figura 4.15. Diferencia Correlación

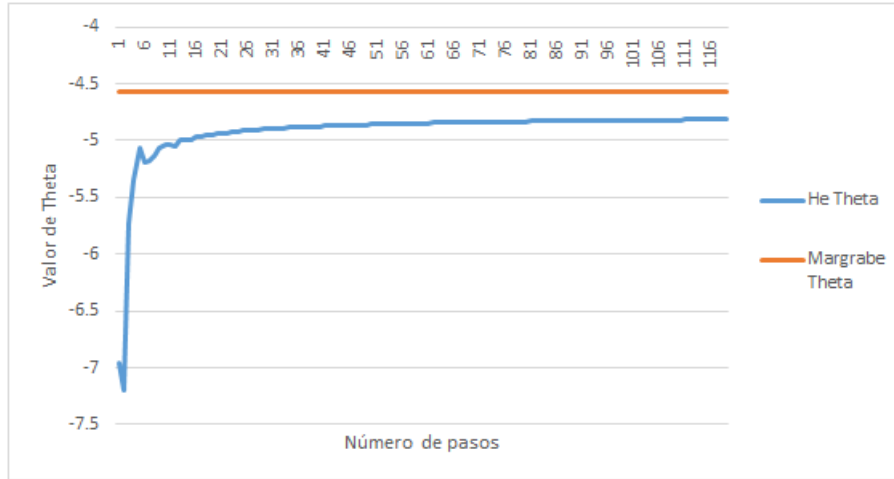
4.6.4. Theta Θ

Theta mide la tasa de disminución en el valor de la opción debido al paso del tiempo. Intuitivamente, theta siempre debe ser negativa porque a medida se acerca la fecha de vencimiento, la opción se vuelve menos costosa.

Gráficamente, usando pasos de 100, observamos la convergencia entre theta calculada usando la fórmula de Margrabe y el algoritmo de He.

$$\begin{aligned}
 \Theta &= \frac{\partial C(S_1, S_2, t)}{\partial t} = s_1 N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial t} - s_2 N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial t} \\
 &= s_1 N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial t} + s_2 N'(d_2) \left[\frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} \right], \\
 &= \frac{\partial d_1}{\partial t} [s_1 N'(d_1) - s_2 N'(d_2)] + \frac{\sigma N'(d_2)}{2\sqrt{t}} \\
 &= \frac{\sigma N'(d_2)}{2\sqrt{t}} = -\frac{\sigma S_1 N'(d_1)}{2\sqrt{t}} \\
 &= -\frac{\sigma S_1 e^{-d_1^2/2}}{2\sqrt{2\pi t}}
 \end{aligned}$$

dónde usamos que $S_1 N'(d_1) - S_2 N'(d_2) = 0$.



4.6.5. Gamma Γ

Gamma, Γ mide la tasa de cambio en la sensibilidad Delta con respecto a los cambios en el precio subyacente. Matemáticamente, es la segunda derivada del valor de la opción con respecto al precio del activo subyacente.

Aunque la diferencia entre las soluciones numérica y cerrada es pequeña, no observamos convergencia para el número de pasos que podemos utilizar con nuestra computadora. Esto es lo esperado ya que la segunda derivada parcial numérica es menos precisa y converge más lentamente que las derivadas de primer orden en todos los métodos numéricos. Posiblemente habría que optimizar la programación o contar con más recursos computacionales

$$\Gamma_{S_1} = \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S_1} = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_1} = N'(d_1) \frac{1}{\sigma S_1 \sqrt{t}} = \frac{e^{-d_1^2/2}}{\sigma S_1 \sqrt{2\pi t}},$$

$$\Gamma_{S_2} = \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S_1} = -N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S_2} = N'(d_2) \frac{1}{\sigma S_2 \sqrt{t}} = \frac{e^{-d_2^2/2}}{\sigma S_2 \sqrt{2\pi t}}$$

$$\Gamma_{S_1 S_2} = \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} = -N'(d_1) \frac{1}{\sigma S_2 \sqrt{t}}$$

El valor de $\Gamma_{S_1S_2}$, que se lo conoce como *cross gamma*, mide la sensibilidad del delta de un activo subyacente en respuesta a un cambio en el precio de otro subyacente.

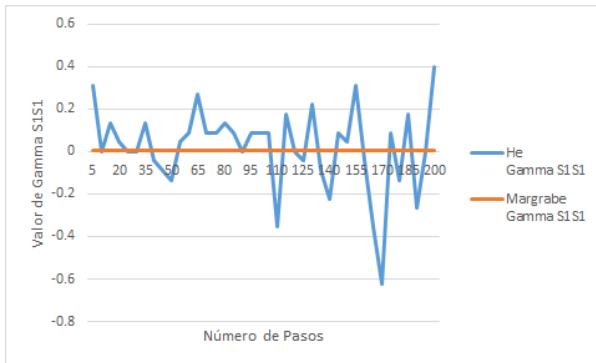


Figura 4.16. GammaS1S1

Figura 4.17. Diferencia GammaS1S1

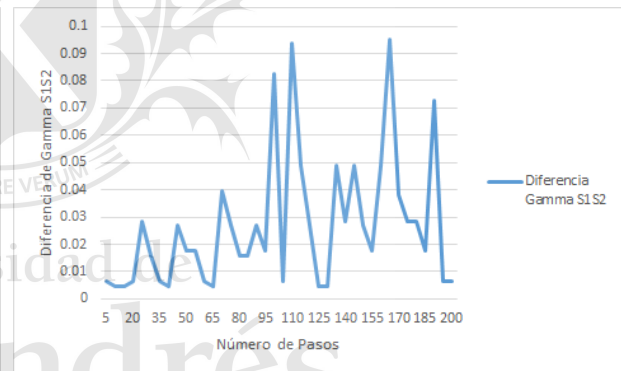
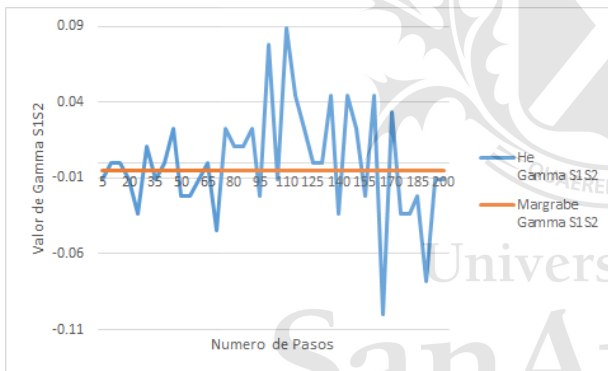


Figura 4.18. GammaS1S2

Figura 4.19. Diferencia GammaS1S2

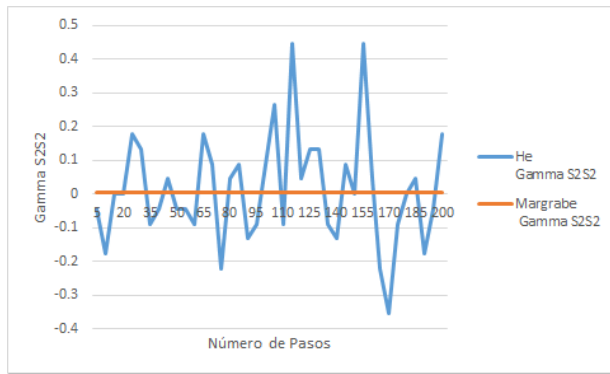
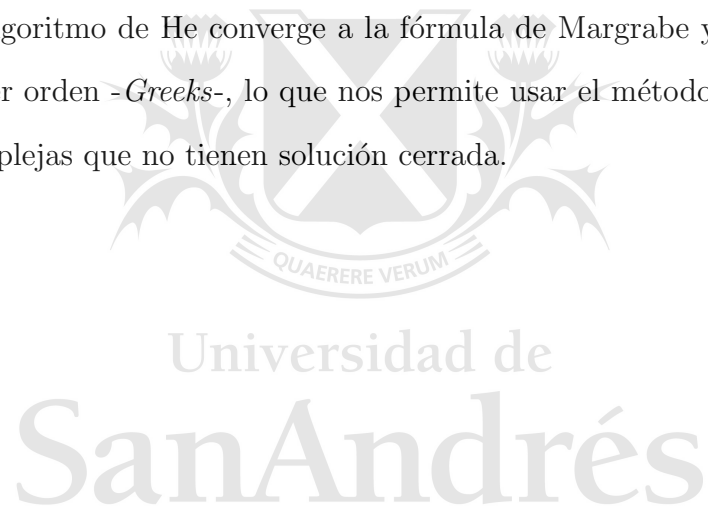


Figura 4.20. GammaS2S2



Figura 4.21. Diferencia GammaS2S2

Esto concluye nuestra prueba de la corrección del método de He. Como hemos observado gráficamente, el algoritmo de He converge a la fórmula de Margrabe y a todas sus sensibilidades de primer orden -*Greeks*-, lo que nos permite usar el método de He para valuar opciones más complejas que no tienen solución cerrada.



Capítulo 5

Valuación de opciones *multi-asset*

5.0.6. Opción barrera sobre dos activos con payoff sobre un activo

Definición. Una opción *multi-asset* barrera call (put) con payoff sobre un activo es un producto financiero que otorga el derecho a comprar (vender) un activo S_1 en una fecha predeterminada de expiración t_1 y precio de ejercicio K , siempre y cuando el precio de ningún activo $\{S_i(\cdot)\}_{1 \leq i \leq k}$ toque o pase, antes de la fecha de expiración, la o las barreras ubicadas en $\{H_i\}_{1 \leq i \leq k}$ correspondientes a los precios de cada activo individual, con $H_i > S_i(0)$ para todo i y $H_1 > K$. La función de pago de estas opciones están dadas por:

$$\left(\prod_i \mathbb{I}_{\tau_i > t_i} \right) (S_1(t_1) - K)^\pm$$

donde $\tau_{H_i} = \inf\{t | S_i(t) = H_i\}$ representa la primera vez que el proceso de precios de una acción $S_i(\cdot)$ toca el nivel H_i .

A continuación valuamos esta opción usando el algoritmo de He y comparamos nuestros resultados con los de Sierag [34] quien valuó la misma opción usando un método numérico diferente (árboles multinomiales recombinantes basados en el simplex de Pascal).

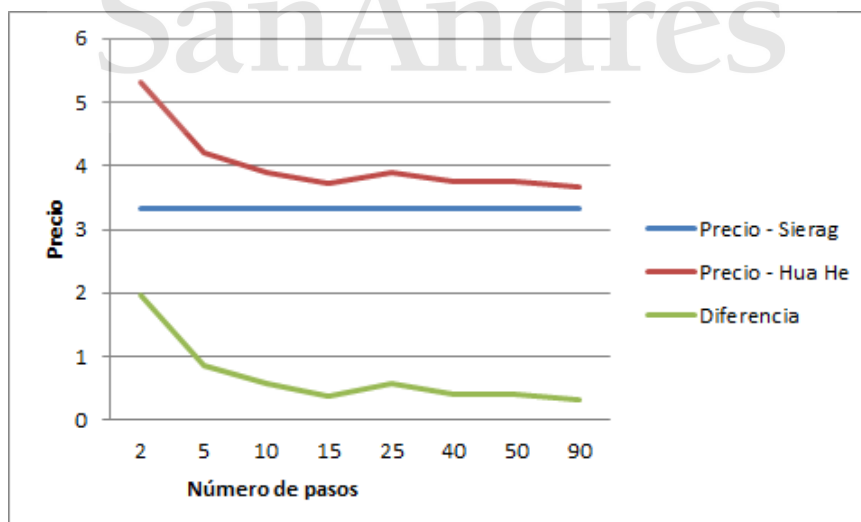
Usando los mismos parámetros que Sierag [34]:

S1 = \$40	Sigma 1 = 0.2
S2 = \$40	Sigma 2 = 0.2
Barrier 1 = \$60	Strike (K) = \$40
Barrier 2 = \$60	r = 10 %

Obtenemos los siguientes resultados:

Número de pasos	Precio (Sierag)	Precio (Hua He)	Diferencia
2	\$ 3.338	\$ 5.30287	\$ 1.9648743
5	\$ 3.338	\$ 4.203377	\$ 0.86537743
10	\$ 3.338	\$ 3.904368	\$ 0.56636906
15	\$ 3.338	\$ 3.731011	\$ 0.39301157
25	\$ 3.338	\$ 3.902513	\$ 0.56451321
40	\$ 3.338	\$ 3.75920	\$ 0.42120123
50	\$ 3.338	\$ 3.74800	\$ 0.41
90	\$ 3.338	\$ 3.6664	\$ 0.32843113

Observamos que el algoritmo de He converge a la solución de Sierag a medida que incrementamos el número de pasos.



5.1. Valuación de un derivado sobre 3-activos

En los próximos ejemplos vamos a mostrar el verdadero potencial del algoritmo de He: evaluar derivados financieros cuyo payoff dependa de más de dos activos subyacentes. Esto es un problema que muy pocos métodos pueden resolver.

Comenzamos valuando una opción sobre tres activos subyacentes cuyos precios siguen un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dS_{t,1} = \mu_1 S_{t,1} dt + \sigma_1 S_{t,1} dW_{t,1},$$

$$dS_{t,2} = \mu_2 S_{t,2} dt + \sigma_2 S_{t,2} dW_{t,2},$$

$$dS_{t,3} = \mu_3 S_{t,3} dt + \sigma_3 S_{t,3} dW_{t,3},$$

donde $W_{t,1}, W_{t,2}$ y $W_{t,3}$ representan tres procesos de Weiner correlacionados con una estructura de correlación: $\langle W_{t,1}, W_{t,2} \rangle = \rho_{12} dt$, $\langle W_{t,2}, W_{t,3} \rangle = \rho_{23} dt$ y $\langle W_{t,1}, W_{t,3} \rangle = \rho_{13} dt$.

Usando la descomposición de Cholesky de la matriz de correlaciones, podemos expresar el sistema como funciones de tres movimientos Brownianos no-correlacionados. $Z_{t,1}$, $Z_{t,2}$ y $Z_{t,3}$:

$$dS_{t,1} = \mu_1 S_{t,1} dt + \sigma_1 S_{t,1} dZ_{t,1}$$

$$dS_{t,2} = \mu_2 S_{t,2} dt + \sigma_2 S_{t,2} \rho_{12} dZ_{t,1} + \sigma_2 S_{t,2} \sqrt{1 - \rho_{12}^2} dZ_{t,2}$$

$$dS_{t,3} = \mu_3 S_{t,3} dt + \sigma_3 S_{t,3} \rho_{13} dZ_{t,1} + \sigma_3 S_{t,3} \rho_{23}^* dZ_{t,2} + \sigma_3 S_{t,3} \rho_{33}^* dZ_{t,3}$$

con

$$\rho_{23}^* = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \quad \text{y} \quad \rho_{33}^* = \sqrt{\frac{1 - \rho_{12}^2 - \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2 + 2\rho_{12}^2\rho_{23}\rho_{13}}{1 - \rho_{12}^2}}$$

A continuación, construimos el árbol basándonos en las instrucciones en [19]. Primero, construimos una matriz A , real, ortogonal y de tamaño $(3 + 1)$, tal que la última columna de A sea $(1/\sqrt{3+1}, \dots, 1/\sqrt{3+1})$ y definimos la matriz $\epsilon = \sqrt{3+1}A$. Por ejemplo, ¹ sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \epsilon = 2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando esta matriz y la ecuación 6 del *paper* de He, definimos el proceso N -variado, $(N + 1)$ -nominal para modelar los precios de los activos S^n , donde N representa el número de activos en nuestro modelo. Más explícitamente tenemos que:

$$S_{k+1,1}^n = \begin{cases} S_{k,1}^n + \mu_1 \frac{S_{k,1}^n}{n} + \sigma_1 S_{k,1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = S_{k,1}^n \left[1 + \frac{\mu_1}{n} + \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \right] \\ S_{k,1}^n + \mu_1 \frac{S_{k,1}^n}{n} - \sigma_1 S_{k,1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = S_{k,1}^n \left[1 + \frac{\mu_1}{n} - \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \right] \\ S_{k,1}^n + \mu_1 \frac{S_{k,1}^n}{n} - \sigma_1 S_{k,1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = S_{k,1}^n \left[1 + \frac{\mu_1}{n} - \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \right] \\ S_{k,1}^n + \mu_1 \frac{S_{k,1}^n}{n} + \sigma_1 S_{k,1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = S_{k,1}^n \left[1 + \frac{\mu_1}{n} + \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \right] \end{cases}$$

$$S_{k+1,2}^n = \begin{cases} S_{k,2}^n + \mu_2 \frac{S_{k,2}^n}{n} + \sigma_2 S_{k,2}^n \rho_{12} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sigma_2 S_{k,2}^n \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ S_{k,2}^n + \mu_2 \frac{S_{k,2}^n}{n} - \sigma_2 S_{k,2}^n \rho_{12} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sigma_2 S_{k,2}^n \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ S_{k,2}^n + \mu_2 \frac{S_{k,2}^n}{n} - \sigma_2 S_{k,2}^n \rho_{12} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sigma_2 S_{k,2}^n \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ S_{k,2}^n + \mu_2 \frac{S_{k,2}^n}{n} + \sigma_2 S_{k,2}^n \rho_{12} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sigma_2 S_{k,2}^n \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

¹Cualquier matriz A real, ortogonal y de dimensión $(N + 1)$ puede ser usada para construir el árbol de He. En la sección anterior construimos un árbol para tres activos usando una matriz A diferente.

$$S_{k+1,3}^n = \begin{cases} S_{k,3}^n + \mu_3 \frac{S_{k,3}^n}{n} + \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{13} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{23}^* \frac{1}{\sqrt{n}} + \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{33}^* \frac{1}{\sqrt{n}} \\ S_{k,3}^n + \mu_3 \frac{S_{k,3}^n}{n} - \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{13} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{23}^* \frac{1}{\sqrt{n}} - \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{33}^* \frac{1}{\sqrt{n}} \\ S_{k,3}^n + \mu_3 \frac{S_{k,3}^n}{n} - \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{13} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{23}^* \frac{1}{\sqrt{n}} + \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{33}^* \frac{1}{\sqrt{n}} \\ S_{k,3}^n + \mu_3 \frac{S_{k,3}^n}{n} + \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{13} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{23}^* \frac{1}{\sqrt{n}} - \sigma_3 S_{k,3}^n \rho_{33}^* \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

A primera vista, parece complicado, pero esencialmente es igual que antes pero con dos adiciones. Primero, en cada hoja necesitamos agregar una rama más. Segundo, en cada hoja necesitamos guardar el valor del precio del tercer activo $S_{k,3}$. Eso significa que debemos incrementar en una unidad el largo del *array* que almacena la información de los distintos precios en cada hoja. A pesar de su simplicidad, el hecho de que el tiempo de corrida del algoritmo sea exponencial produce que al extenderlo a tres activos, éste se vuelva extremadamente lento y computacionalmente demandante.

5.1.1. Valuación de un derivado sobre el máximo de tres Activos

Usando el algoritmo de He valuamos un derivado de tipo Europeo sobre el máximo de una canasta de tres activos con el siguiente payoff:

$$Payoff = \max \left\{ \max \{ S_1, S_2, S_3 \} - Strike, 0 \right\}$$

Como ejemplo, asignamos los siguientes valores a los parámetros:

Valores		
s1 = 200	s2 = 250	s3 = 220
$\sigma_1 = 0.3$	$\sigma_2 = 0.2$	$\sigma_3 = 0.25$
$\rho_{12} = 0.75$	$\rho_{13} = 0.65$	$\rho_{23} = 0.85$
r = 0.10	years = 1	strike = 200

Obtenemos los siguientes resultados:

Resultados		
n	Número de nodos	Precio
2	15	74.0259744
3	35	74.99011278
4	70	74.40457779
5	126	75.18483582
6	210	75.13564695
7	330	75.17755785
8	495	75.53678955
9	715	75.30246598
10	1001	75.49909209
11	1365	75.40471516

donde n es la cantidad de pasos temporales en la cual dividimos un año.

5.1.2. Valuación de un derivado con una barrera sobre tres activos

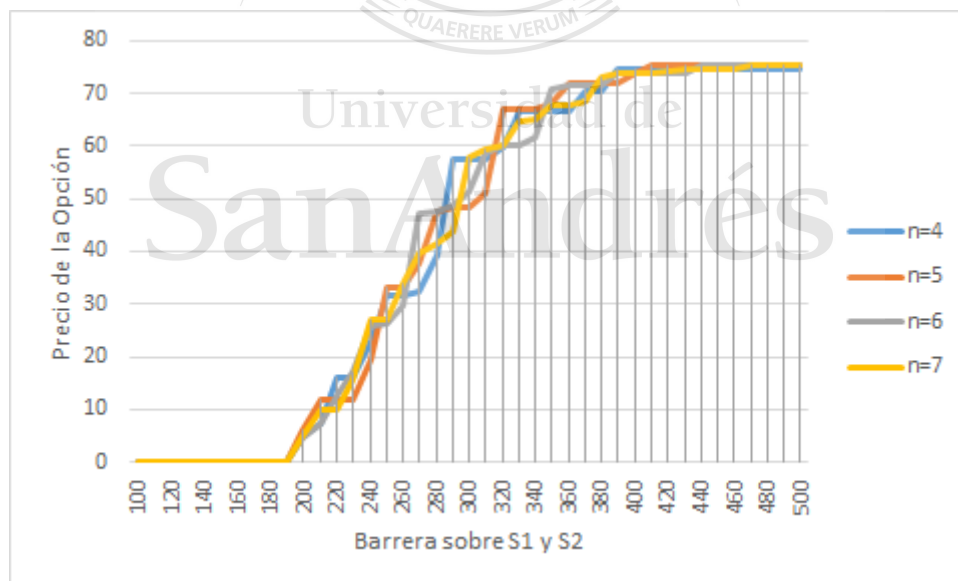
La belleza del algoritmo de He es que puede manejar múltiples complicaciones en la estructura de pago, como varias barreras, barreras sobre uno o más activos, ejecución temprana, etc. Comenzamos imponiendo una sola barrera B para los tres activos: si alguno de los precios de los activos es mayor a B , el derivado paga \$0.

Como en el caso de las opciones barrera sobre dos activos subyacentes, cuanto más alta es la barrera, menor es la probabilidad de que sea superada. Cuando la barrera es demasiado alta (por ejemplo $B > \$450$), el precio de la opción es igual al caso previo sin la barrera. Es decir la existencia de barreras en estos casos no aportan nada, porque la probabilidad de tocarlas es ínfima.

En el siguiente ejemplo el precio de la opción es 0 si S1 y S2 superan la barrera de \$250.

Precio de la opción				
Barrera	n=4	n=5	n=6	n=7
150	0	0	0	0
200	5.128245	6.054164	4.47021	4.901368
250	31.52419	33.29289	26.45618	27.21867
300	57.4443	48.1868	51.23144	57.75089
350	66.42184	68.26443	70.64444	67.63219
400	74.40458	73.68289	73.8286	73.63368
450	74.40458	75.18484	75.13565	74.68948
500	74.40458	75.18484	75.13565	75.17756

Gráficamente

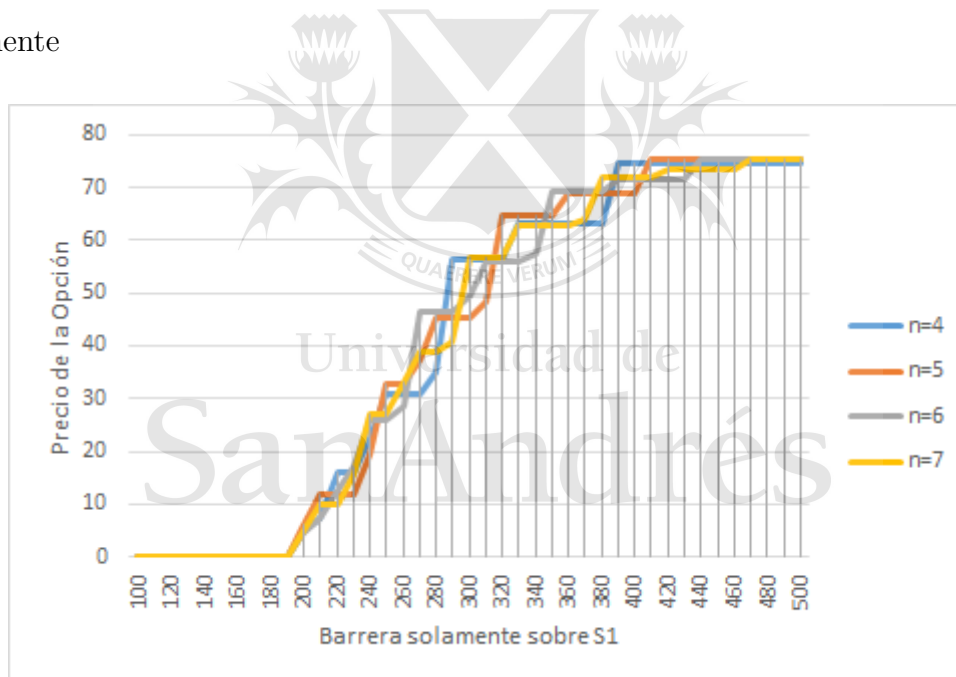


El valor al cual observamos que converge es el precio de la opción sin barreras.

Repetimos el ejercicio con una barrera sobre la primera acción:

Precio de la Opción				
Barrera	n=4	n=5	n=6	n=7
150	0	0	0	0
200	5.128245	6.054164	4.46516	4.901321
250	30.92838	32.93549	25.93598	26.91083
300	56.20493	45.47819	49.29446	56.55191
350	63.20406	64.71529	69.25135	62.87337
400	74.40458	68.84465	71.61922	71.89428
450	74.40458	75.18484	75.13565	73.24046
500	74.40458	75.18484	75.13565	75.17756

Gráficamente

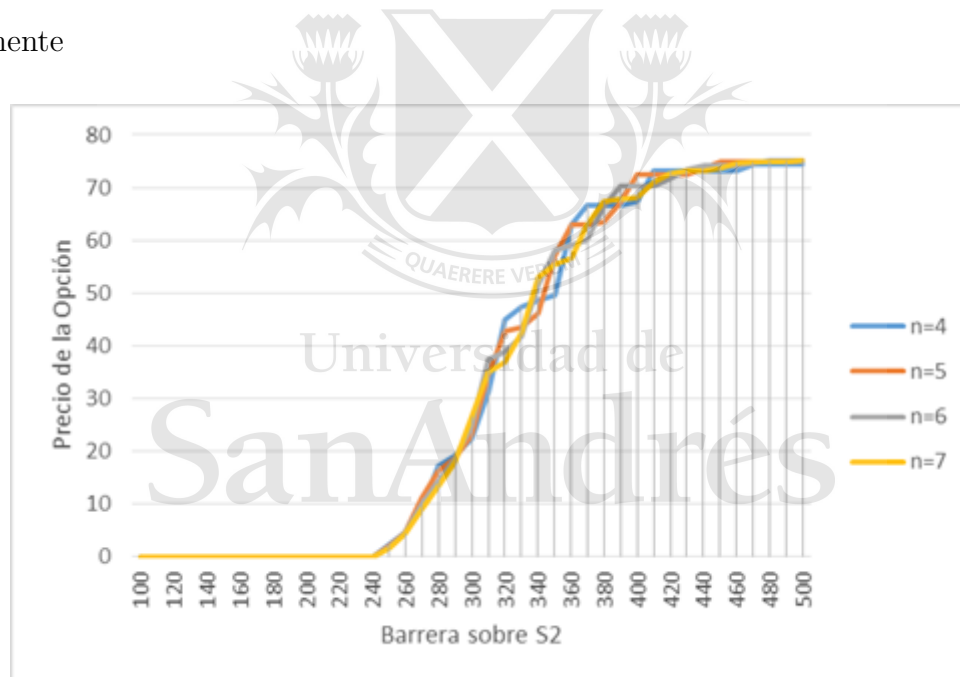


A pesar de que nueve pasos no sean suficientes para verificar la convergencia del algoritmo, observamos que no converge monótonamente ni desde arriba ni abajo como en los casos anteriores.

Repetimos el mismo ejemplo pero con una barrera sobre S_2 .

Precio de la Opción				
Barrera	n=4	n=5	n=6	n=7
150	0	0	0	0
200	0	0	0	0
250	2.376145035	2.286330941	2.010621004	1.777187302
300	22.341575	23.18583469	24.86479698	26.59576948
350	49.67256737	57.13099658	58.16433797	55.52954105
400	67.40166995	72.34230352	70.20451285	68.12430348
450	73.2644152	74.84990514	74.1432211	73.71227248
500	74.40457779	75.18483582	75.03949744	75.00650788

Gráficamente



En ambos casos observamos que los precios de las opciones oscilan, pero la convergencia es lenta. Por cuestiones técnicas no resulta posible extender el árbol a más de 7 pasos temporales porque la cantidad de memoria necesaria agota los recursos computacionales disponibles.

5.2. Explicación del código

Tal como podemos imaginarnos, existen diferentes formas de programar el algoritmo de He. Mi código, por ejemplo, hace uso de una librería de Python creada para teoría de grafos, Networkx. La elección de usar esta librería en particular se debe a que es realmente sencillo implementar nodos y vértices, y realizar operaciones sobre ellos.

Por otro lado, para implementar el algoritmo de He necesitamos construir un árbol con $N + 1$ vértices por nodo, dónde N representa la cantidad de activos de riesgo que queramos modelar. Supongamos que $N = 2$, para implementar el *paper* de He debemos construir un árbol con tres “estados del mundo” (o sea, cada nodo tiene 3 sucesores): ”Arriba”, ”Sin Cambio” y ”Abajo”. Por consiguiente, en el primer paso temporal vamos tener 4 nodos por activo, en total 8 nodos, contando los árboles de cada activo.

A pesar de que esta forma de razonar es correcta existe una manera de optimizar el código ya que de esta forma no explotamos el hecho de que los estados del mundo son los mismos para cada activo. Teniendo en cuenta este detalle, modificamos el código e implementamos solo un árbol para ambos activos. Lo importante es que en cada nodo debemos almacenar tres (o sea $N + 1$) ”informaciones”: los valores de los activos 1 y 2 y el valor del proceso de inducción hacia atrás (*backward induction*). Después de un paso temporal, de esta manera tenemos solo 4 nodos, comparando con 8 en la versión anterior, esto representa una gran mejora.

Sin embargo y a pesar de nuestra mejora, con unos pocos pasos, el algoritmo de He pronto se convierte en computacionalmente inviable, ya que el tiempo de corrida es proporcional al número de pasos temporales.

5.3. Limitaciones

El algoritmo de He tiene dos problemas fundamentales. Aún si optimizásemos el código para que corra lo mas rápido posible, el tiempo de corrida se incrementa exponencialmente con el número de pasos temporales, es decir el algoritmo no corre en tiempo lineal.

Más allá de las limitaciones computacionales, no podemos utilizar el algoritmo de He para valuar opciones *path-dependent*, porque habría que almacenar en cada nodo todos los posibles caminos desde la raíz del árbol hasta ese nodo en particular para cada paso temporal, y así con cada nodo en el árbol, lo que resulta inviable.



Universidad de
San Andrés

Conclusión

En este trabajo estudiamos con detalle las propiedades de convergencia algoritmo de Hua He y mostramos como usarlo para valorar opciones sobre dos y tres activos subyacentes. Si bien tiene limitaciones, el mayor mérito del algoritmo de He es que preserva la completitud de mercado. Esto significa que toda reclamación contingente es replicable mediante un portafolio auto-financiado. Al poder replicar cualquier estructura de pagos, existe una única medida de riesgo neutral. Al haber una única medida de probabilidad neutral al riesgo, no hay posibilidades de arbitraje en el mercado.

La forma con la cual llevamos a cabo el estudio de las propiedades técnicas del método fue usándolo para valorar un producto (la opción de Margrabe) cuya valuación ya ha sido estudiada y su solución tiene una fórmula cerrada. Más allá de comparar que el valor converja al valor teórico, también nos cercioramos que el He pueda aproximar correctamente todas las *Greeks* de la opción de Margrabe. Una vez estudiadas las propiedades del modelo, lo usamos para valorar: 1- una opción barrera sobre dos activos con payoff sobre un activo, 2- un derivado sobre el máximo de tres activos y 3- un derivado con una barrera sobre tres activos subyacentes.

A modo de conclusión, podemos argumentar que, a pesar de sus limitaciones, el He puede ser usado, no solo en la teoría sino también en la práctica, para valorar correctamente opciones y productos híbridos con dependencia débil de la trayectoria multi-activos con y sin barreras.

Bibliografía

- [1] Ahn, Figlewski, and Gao. Pricing discrete barrier options with an adaptive mesh model. *Available at SSRN 162450*, 1999.
- [2] Amin. On the computation of continuous time option prices using discrete approximations. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(4):477–495, 1991.
- [3] Amin and Khanna. Convergence of american option values from discrete-to continuous-time financial models¹. *Mathematical Finance*, 4(4):289–304, 1994.
- [4] Black and Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [5] Boyle. A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23(1):1–12, 1988.
- [6] Boyle. Valuation of derivative securities involving several assets using discrete time methods. *Insurance: Mathematics and Economics*, 9(2-3):131–139, September 1990.
- [7] Boyle, Evine, and Gibbs. Numerical evaluation of multivariate contingent claims. *The Review of Financial Studies*, 1989.
- [8] Boyle and Lau. Bumping up against the barrier with the binomial method. *The Journal of Derivatives*, 1(4):6–14, 1994.
- [9] Broadie, Glasserman, and Kou. Connecting discrete and continuous path-dependent options. *Finance and Stochastics*, 3(1):55–82, 1999.

- [10] Chen, Chung, and Yang. Option pricing in a multi-asset, complete market economy. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37(4):649–666, 2002.
- [11] Chen, Petrou, and Suchanecki. Rainbow over paris. *The Journal of Finance*, 2012.
- [12] Cox, Ross, and Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3):229–263, 1979.
- [13] Davis. Multi-asset options, 2003.
- [14] Shi-Jie Deng, Minqiang Li, and Jieyun Zhou. Closed-form approximations for spread option prices and greeks. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=952747>, 2008.
- [15] Figlewski and Gao. The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing. *Journal of financial economics*, 53(3):313–351, 1999.
- [16] Firth. *High Dimensional American Options*. PhD thesis, Oxford University, 2005.
- [17] Fischer. Call option pricing when the exercise price is uncertain, and the valuation of index bonds. *The Journal of Finance*, 33(1):169–176, 1978.
- [18] Hancock and Mukherjee. Applying margrabe’s exchange option model to pricing proxy contests. *Journal of Business Finance & Accounting*, 19(6):889–900, 1992.
- [19] Hua He. Convergence from discrete-to continuous-time contingent claims prices. *The Review of Financial Studies*, 3(4):523–546, 1990.
- [20] Heston and Zhou. On the rate of convergence of discrete-time contingent claims. *Mathematical Finance*, 10(1):53–75, 2000.
- [21] Hubalek and Schachermayer. When does convergence of asset price processes imply convergence of option prices? *Math. Finance*, 8:385–403, 1998.
- [22] Kamrad and Ritchken. Multinomial approximating models for options with k state variables. *Management science*, 37(12):1640–1652, 1991.

- [23] Karsak and Özogul. An options approach to valuing expansion flexibility in flexible manufacturing system investments. *The Engineering Economist*, 47(2):169–193, 2002.
- [24] Kou. On pricing of discrete barrier options. *Statistica Sinica*, 13(4):955–964, 2003.
- [25] Kwok, Wu, and Yu. Pricing multi-asset options with an external barrier. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1(04):523–541, 1998.
- [26] Minqiang Li. The impact of return nonnormality on exchange options. Available at: <http://mpira.ub.uni-muenchen.de/7020/1/Margrabenonnormality.pdf>, 2007.
- [27] Longstaff and Schwartz. Valuing american options by simulation: a simple least-squares approach. *The review of financial studies*, 14(1):113–147, 2001.
- [28] Madan, Milne, and Shefrin. The multinomial option pricing model and its brownian and poisson limits. *Review of Financial Studies*, 2(2):251–265, 1989.
- [29] Margrabe. The value of an option to exchange one asset for another. *The Journal of Finance*, 33(1):177–186, 1978.
- [30] Martini. Introduction to tree methods for financial derivatives.
- [31] Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, pages 141–183, 1973.
- [32] Ritchken. On pricing barrier options. *Currency Derivatives: Pricing Theory, Exotic Options, and Hedging Applications*, 12:275, 1998.
- [33] Rubinstein and Reiner. Breaking down the barriers. *Risk Magazine*, 1991.
- [34] Sierag. Pricing derivatives on multiple assets.
- [35] Snyder. Alternative forms of options. *Financial Analysts Journal*, pages 93–99, 1969.
- [36] Taudes, Feurstein, and Mild. Options analysis of software platform decisions: a case study. *MIS quarterly*, pages 227–243, 2000.