EFICIENCIA EN SUBASTAS DE MÚLTIPLES OBJETOS

Carlos Hugo Mendiburu Díaz[1]

Universidad de San Andrés

Maestría en Economía

[2011]

Abstract

This research aims to systematize recent findings about efficiency in multi-object auctions. The main questions are: Is it possible to reach efficiency in multi-object auctions? How? What factors affect efficiency, in theory and in practice? Several issues arise in the study of efficiency in auctions. For example, results vary depending on players' attitude toward risk, on whether we assume private or common values, on whether objects are identical (which requires specifying whether each player has unit-demand or multi-unit demand), or heterogeneous (assuming players have defined valuations for each possible package). A general point is that if one can use observed bids to infer valuations, it is possible to reach efficiency. For instance, it has been shown that efficiency can be achieved in multi-object auctions when players have independent private values and in common values settings with one-dimensional signals. This in general is not true with common values and multidimensional signals. Finally, there is a growing literature about experiments with auctions, designed in order to compare auction formats in terms of efficiency.

Palabras clave: Subastas de múltiples objetos, Subastas eficientes.

Clasificación *JEL*: D44; D82; D4.

[1]Correo electrónico: cmendiburu@udesa.edu.ar

1. Introducción

La utilización de subastas como mecanismos de asignación de recursos es una opción cada vez más atractiva. Una posible explicación es que las subastas están diseñadas para promover la competencia, aún cuando el número de agentes involucrados sea pequeño. Cuando el número de agentes es elevado, es más probable que cada uno sea precio aceptante, con lo cual el primer teorema del bienestar asegura que los resultados del mecanismo de intercambio puro están asociados a asignaciones eficientes de los recursos. Por el contrario, cuando hay un solo vendedor y el número de compradores interesados es limitado, las subastas aparecen como un medio atractivo para vender objetos o contratar la provisión de servicios.[2] Sin embargo, considerando la gran variedad de formas de subastas existentes, surge la dificultad de elegir cuál de ellas es la mejor. Para evaluar las subastas comúnmente se recurre a dos criterios: i) el valor esperado del ingreso por ventas, y ii) la asignación eficiente de recursos. El primer criterio es importante desde el punto de vista del vendedor.[3] El segundo criterio -la eficiencia- es importante desde una perspectiva más general que implica maximizar la utilidad total del vendedor y de los postores.[4]

La literatura de subastas se inició con el trabajo de Vickrey (1961). Los principales avances teóricos en las tres décadas siguientes se enfocaron en las subastas de un único objeto. Sin embargo, recientemente han ganado popularidad los estudios sobre subastas de múltiples objetos, impulsados en parte por las aplicaciones en la asignación de licencias de telefonía móvil alrededor de todo el mundo. El objetivo de este trabajo es revisar y organizar la literatura más importante acerca de la eficiencia en las subastas de varios objetos, con la finalidad de responder a las siguientes preguntas:

1. Si se ponen en venta varios objetos, o varias unidades de un mismo objeto, ¿mediante qué tipos de subastas se pueden alcanzar las asignaciones óptimas?, ¿qué tan robusta es esta conclusión?

2. ¿Qué factores afectan la eficiencia de las asignaciones generadas por los principales tipos de subastas tanto en la teoría como en la práctica?

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se describen los elementos de una subasta utilizando el lenguaje de la teoría de juegos. En la sección 3 se describen las

[2] No obstante, hay otras alternativas, como la negociación directa con agentes seleccionados según cierto criterio. Para una comparación de las subastas con estas alternativas, ver Manelli y Vincent (1995).

[3] Este criterio ha sido ampliamente estudiado. Ver, por ejemplo, Myerson (1981), Armstrong (2000), Avery y Hendershott (2000), y Jehiel, Meyer-ter-Vehn y Moldovanu (2007).

[4] Estos criterios no necesariamente están en conflicto. Ausubel y Cramton (1999) analizan esta situación cuando existen mercados de reventa adecuados.

subastas de múltiples objetos cuando cada agente demanda como máximo una unidad. En la sección 4 se estudian las subastas de múltiples bienes homogéneos cuando cada agente demanda más de una unidad. En este caso, la utilidad de cada agente no depende de qué unidades gana, puesto que todas son idénticas, sino de cuántas unidades gana en total. La sección 5 se ocupa de las subastas de múltiples bienes heterogéneos, también conocidas como subastas multi-objeto, en las cuales cada agente tiene un interés particular por cada objeto. Finalmente, la sección 6 resume los principales estudios empíricos sobre eficiencia en subastas. La sección 7 concluye con algunos comentarios finales.

2. Descripción de las subastas utilizando teoría de juegos

Una subasta se puede modelar como un juego con información incompleta o juego bayesiano. En un juego de subasta existe un conjunto de reglas que determinan cómo los participantes efectúan sus propuestas, cómo se elige a los ganadores, y cómo se establecen las transferencias monetarias de los participantes hacia el vendedor. Formalmente, se requiere especificar los jugadores (que se denominarán indistintamente agentes, participantes, postores o compradores), sus espacios de tipos (valoraciones), sus espacios de estrategias (funciones de oferta o propuestas), sus funciones de utilidad (beneficio neto que depende del resultado de la subasta) y la información disponible a lo largo del juego (participantes en carrera, ofertas realizadas por los demás, etc.).

Universidad de San Andrés

Se asume que el subastador pone en venta K objetos, los mismos que se indexan por $k = 1, \ldots, K$. En general, estos objetos podrían ser todos idénticos u homogéneos, o bien podrían ser heterogéneos, o bien podría haber una combinación de ambas categorías. En todos los casos se asume que cada bien es una unidad indivisible. El conjunto de todos los objetos en venta se denotará como $\bar{K} = \{1, \ldots, K\}$. La subasta tiene un número definido, N, de participantes o compradores, indexados por $i = 1, \ldots, N$. El conjunto de todos los participantes se denotará como $\bar{I} = \{1, \ldots, N\}$.

Cada agente i recibe una señal unidimensional $s_i^k \in \left[\underline{s}_i^k, \bar{s}_i^k\right] \subseteq \mathbb{R}$, independiente por cada objeto k, la cual representa su información privada acerca de dicho bien. Esta información puede ser el resultado de estimaciones acerca del valor del objeto. Desde el punto de vista de un observador externo, esta señal se modela como una variable aleatoria cuya distribución se asume conocida por todos. Se denotará al vector de todas las señales recibidas por el participante i como $s_i = \left(s_i^1, \ldots, s_i^K\right)$. Las señales recibidas por todos los compradores se pueden representar en un vector $(N \times K)$-dimensional, $s = [s_1, \ldots, s_N] = \left[\left(s_1^1, \ldots, s_1^K\right), \ldots, \left(s_N^1, \ldots, s_N^K\right)\right] \in \mathbb{R}^{N \times K}$.

La valoración marginal del agente i por cada unidad u objeto k, se denotará como $v_i^k \in \mathbb{R}$.[5] Se puede modelar esta valoración, o valor, como una función de la información disponible, con lo cual v_i^k también será una variable aleatoria. En un caso muy general, v_i^k puede depender de toda la información repartida entre la población, $s \in \mathbb{R}^{N \times K}$, de manera que se puede escribir $v_i^k(s)$. Un caso especial es el de las valoraciones informacionalmente separables, en el cual el valor que i asigna al objeto k sólo depende de las señales referidas al objeto k disponibles entre todos los agentes. Es decir, $v_i^k(s) = v_i^k\left(s_1^k, \ldots, s_N^k\right)$. Un supuesto usual en la literatura es que, para un agente dado, a mayor señal, mayor valoración. Formalmente, si $\hat{s}_i^k \geq \tilde{s}_i^k$ entonces $v_i^k\left(s_1^k, \ldots, s_{i-1}^k, \hat{s}_i^k, s_{i+1}^k, \ldots, s_N^k\right) \geq v_i^k\left(s_1^k, \ldots, s_{i-1}^k, \tilde{s}_i^k, s_{i+1}^k, \ldots, s_N^k\right)$.

La forma en que las señales afectan a las valoraciones determina la estructura de información de la subasta y es clave en su modelación. En la literatura sobre subastas los siguientes casos han sido los más estudiados, siempre bajo el supuesto de valoraciones informacionalmente separables. Dado un vector de señales s, el agente i tiene una valoración por el objeto k, $v_i^k(s)$, que se puede ubicar entre dos casos extremos:

- Valores privados puros (o valores privados independientes): $v_i^k(s) = v_i^k\left(s_1^k, \ldots, s_N^k\right) = v_i^k(s_i^k)$. En este caso, la privacidad significa que cada agente conoce su valoración por cada uno de los objetos en venta, la cual es información privada para cada postor. La independencia significa que la señal recibida por el jugador j no afecta la valoración del agente i, y las señales son estadísticamente independientes.[6] Con ello, cada objeto puede tener un valor diferente para cada postor. Por ejemplo, $v_i^k\left(s_1^k, \ldots s_N^k\right) = s_i^k$, indica que el comprador i asigna un valor al objeto k igual a su estimado personal.[7]

- Valores comunes puros: Para todo $i \neq j$, $v_i^k(s) = v_j^k(s) = \bar{v}^k$, $\forall\ \left(s_1^k, \ldots s_N^k\right)$, $i\ ,\ j \in \bar{I}$. Esto significa que el objeto k tiene el mismo valor *ex post* para todos, $\bar{v}^k$, aunque ningún agente lo conoce antes de la subasta. Cada postor tiene información privada (estimada

[5] Esta situación asume que la valoración por varios objetos es igual a la suma de las valoraciones marginales por cada objeto. Más adeltante se describen otros casos.

[6] Nótese que salir de este caso extremo implicaría relajar o bien esta independencia, o bien la privacidad, o ambas.

[7] Con la equivalencia entre señales y valoraciones, la valoración del jugador i por el bien k puede modelarse como una variable aleatoria que tiene una distribución F_i^k en el intervalo $\left[\underline{s}_i^k, \bar{s}_i^k\right]$, el cual, con $\bar{s}_i^k = \bar{v}_i^k$, suele normalizarse a $\left[0, \bar{v}_i^k\right]$; es decir: $v_i^k \sim F_i^k\left[0, \bar{v}_i^k\right]$, $\forall i = 1, \ldots, N$. Si el soporte de la distribución, $\left[0, \bar{v}_i^k\right]$, y la distribución F_i^k son los mismos para todo agente i, de manera que podemos escribir $F^k\left[0, \bar{v}^k\right]$, se dice que los agentes son simétricos, o más precisamente, que la distribución de valoraciones es simétrica. En cambio, si el soporte de la distribución o la distribución varía entre agentes, se dice que los agentes son asimétricos. En ambas situaciones se suele asumir que los soportes y las distribuciones son información de conocimiento común.

a partir de las señales) acerca de cuál es dicho valor. A señales diferentes corresponden diferentes estimados de ese valor.

Los casos intermedios se conocen como valores comunes o valores interdependientes, en los cuales la valoración del agente i por el objeto k es efectivamente una función de todo el vector $\left(s_1^k, \ldots s_N^k\right)$, y las señales s_j^k para $j \neq i$ tienen un efecto no nulo sobre v_i^k. Es decir, cada postor recibe una señal que es información privada para él, pero el valor es una función de todas las señales. Este valor no tiene porqué ser igual para todos los agentes. Milgrom y Weber (1982) proponen un modelo más general mediante la noción de valoraciones afiliadas, que comprende los casos previos. Esta noción captura la idea de correlación positiva entre señales de dos agentes. Cuando las valoraciones son afiliadas, es más probable observar señales altas para el postor i cuando se observan señales altas para un postor j.[8]

En una subasta multiobjeto, el valor total para un participante i cuando recibe un paquete o subconjunto de bienes $P_i \subseteq \bar{K}$, denotado como $\tilde{v}_i^{P_i} = \tilde{v}_i\left(P_i\right)$, es una función de sus valoraciones marginales por los objetos en dicho conjunto.[9] Si para todo $P_i \subseteq \bar{K}$, $\tilde{v}_i^{P_i} = \sum_{k \in P_i} v_i^k$, entonces la función $\tilde{v}_i$ es aditivamente separable. Esto significa que el valor que asigna el participante i a recibir los objetos contenidos en el paquete P_i es simplemente la suma de sus valoraciones marginales por dichos objetos. Si para todo $P_i \subseteq \bar{K}$, $\tilde{v}_i^{P_i} \leq \sum_{k \in P_i} v_i^k$, entonces se dice que la función $\tilde{v}_i$ es subaditiva, lo cual significa que para el participante i, los objetos son sustitutos. En general, en una subasta los K objetos serán sustitutos si la función $\tilde{v}_i$ es subaditiva para todo $i = 1, \ldots, N$. Si para todo $P_i \subseteq \bar{K}$, $\tilde{v}_i^{P_i} \geq \sum_{k \in P_i} v_i^k$, entonces se dice que la función $\tilde{v}_i$ es superaditiva. Esto significa que para el participante i, los objetos son complementarios o exhiben sinergias entre sí, de modo que valen más en paquete que por separado. En una subasta los K objetos serán complementarios si $\tilde{v}_i$ es superaditiva para todo $i = 1, \ldots, N$.[10]

Si las reglas de la subasta establecen que la propuesta por un paquete P_i es la suma de propuestas por cada objeto dentro de él, entonces la utilidad de un comprador que recibe el paquete de objetos P_i y paga T_i, se denotará como $U_i(P_i, Ti)$.[11] Por ejemplo, una función

[8] Otra propuesta en el mismo sentido, pero menos general que la de Milgrom y Weber (1982) es la presentada por Li, Perrigne y Vuong (2000), en cual la información privada es independiente cuando se condiciona en un componente común.

[9] Si $P_i = \emptyset$, se define $\tilde{v}_i\left(\emptyset\right) = 0$.

[10] Naturalmente, es posible que algunos objetos sean considerados sustitutos o complementarios sólo por ciertos participantes. Las subastas que requieren que los agentes precisen preferencias sobre paquetes de objetos se denominan subastas combinatorias. Una revisión del tema puede encontrarse en Vries y Vohra (2003).

[11] Obsérvese que esta especificación implica que a cada agente sólo le importan los objetos que recibe y el monto

cuasilineal en la transferencia monetaria, tal como $U_i(P_i, T_i) = \tilde{v}_i^{P_i} - T_i$, indicará que el agente i es neutral al riesgo.

Las estrategias de un jugador i serán funciones de oferta $b_i^k\left(v_i^k\right)$, las mismas a cada valoración por cada objeto le asignan un número real. Teniendo en cuenta la estructura informativa descrita, las funciones de oferta indican cuánto deberá ofertar el jugador i por el objeto k para cada uno de sus tipos o valoraciones posibles. El espacio de estrategias de cada jugador, B_i, comprende todas las funciones de oferta posibles para cada uno de los objetos en venta. Cada jugador o agente tiene que resolver un problema de optimización: debe elegir la estrategia que maximice su utilidad teniendo en cuenta las estrategias de los demás jugadores. En situaciones de interdependencia estratégica con información incompleta como ésta, se suelen utilizar dos conceptos de solución. Uno de ellos, el más fuerte, es el Equilibrio en Estrategias Dominantes, donde la mejor estrategia de un jugador es independiente de lo que elijan los demás. Sin embargo, en casos donde no es posible encontrar estrategias dominantes, el concepto de solución relevante es el Equilibrio Bayesiano de Nash.[12] Las predicciones que ofrece este concepto son atractivas porque requieren que cada jugador elija su función de oferta de modo que no tenga incentivo a cambiarla una vez que tiene en cuenta las funciones de oferta de equilibrio de los demás participantes.[13]

Las subastas estándar con un solo objeto

Existen varios criterios para clasificar las subastas utilizadas cuando $K = 1$. Uno de ellos es el orden en que se expresan las ofertas. Si todas las ofertas se realizan de manera simultánea, se trata de una subasta estática; en este caso ningún jugador tiene posibilidad de observar las ofertas hechas por sus competidores. En cambio, si los jugadores realizan sus ofertas de manera secuencial, entonces se trata de una subasta dinámica. En este caso los jugadores observan las propuestas de los demás y racionalmente tienen en cuenta la información que van recibiendo para ajustar sus propias ofertas.

que paga, mas no lo que obtienen y pagan los demás. Asimismo, esta especificación no permite que se presenten directamente propuestas por los paquetes.

[12] Un Equilibrio Bayesiano de Nash es una combinación de estrategias, una por cada tipo de jugador, en la cual cada uno maximiza su utilidad esperada dadas las estrategias de los demás. Todo Equilibrio en Estrategias Dominantes es un Equilibrio Bayesiano de Nash, pero el recíproceo no es cierto. Ver, por ejemplo, Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

[13] En un aporte destacable, Manelli y Vincent (2008) encuentran que los resultados asociados a las estrategias que constituyen un Equilibrio Bayesiano de Nash también pueden ser obtenidos mediante un Equilibrio en Estrategias Dominantes, en el contexto de subastas de un objeto con valores privados independientes. Este resultado se mantiene aún con agentes heterogéneos.

Otro criterio de clasificación es la cantidad de información disponible, que se refleja en la forma en que los jugadores definen sus valoraciones por los objetos a subastar. De acuerdo a este criterio, una subasta es de valores privados, si cada jugador conoce con certeza únicamente su propia valoración, la cual es información privada para él, y en su valoración no influye la señal recibida por otro agente. Utilizando la notación indicada previamente, esto significa que cada agente recibe una señal $s_i \in [\underline{s}_i, \bar{s}_i] \subseteq \mathbb{R}$ y tiene una valoración $v_i(s_i) = v_i(s_1, \ldots s_N) = s_i$. Una subasta es de valores interdependientes, si los jugadores, desconocen el valor exacto del objeto pero reciben señales que les dan una idea sobre dicho valor, $v_i(s_1, \ldots s_N)$, y en particular, la señal recibida por el agente j puede afectar la valoración del agente i.

El formato de subasta más conocido y utilizado es la subasta ascendente o inglesa. En ella el subastador propone un precio inicial bajo y lo va incrementando progresivamente. Conforme el precio se incrementa algunos participantes se van retirando al no estar dispuestos a pagar la cantidad solicitada. La subasta concluye cuando queda un único postor dispuesto a pagar el precio. Si se piensa en incrementos infinitesimales en el precio, el ganador se quedará con el objeto y pagará el monto que su competidor más cercano estaba dispuesto a pagar. Tal como se ha descrito, la subasta inglesa es dinámica. Sin embargo, existe un formato similar en versión estática, conocido como subasta de sobre cerrado de segundo precio o subasta de Vickrey. En este tipo de subasta los participantes remiten al organizador un sobre sellado con su oferta. El ganador nuevamente es aquél que hizo la oferta más alta y paga lo que ofreció su competidor más cercano. Cabe indicar que este segundo formato es utilizado con muy poca frecuencia en la práctica.

Otro ejemplo de subasta dinámica es la descendente u holandesa. En ella el subastador propone un precio inicial alto, el cual posiblemente no capte interesados. Luego, el vendedor propone precios sucesivamente más bajos, hasta que algún participante manifieste su interés. El ganador es el primer participante dispuesto a pagar el precio propuesto, y recibe el objeto por dicho monto. Este formato se utiliza en algunos países para vender flores y pescado, y si bien es menos utilizado que la subasta inglesa, existe una versión estática similar que goza de mayor popularidad: la subasta de sobre cerrado de primer precio. La equivalencia entre ambos tipos de subasta se preserva aún en el caso de valores comunes. En la subasta de primer precio, el ganador es quien hace la oferta más alta, pero a diferencia de la subasta de segundo precio, el ganador paga su propia oferta. En general, se dice que una subasta es estándar si gana quien hace la propuesta más elevada. Los cuatro formatos mencionados son subastas estándar.

Las funciones de utilidad representan las preferencias de cada jugador sobre los resultados

Universidad de San Andrés

de la subasta. La forma de esta función varía de acuerdo a las reglas de cada subasta. Por ejemplo, con $K = 1$, y si no hay costo de participar en la subasta, la utilidad del jugador i en una subasta de sobre cerrado de primer precio será:

$$U_i = \begin{cases} v_i - b_i(v_i), \text{ si } b_i(v_i) > c \\ 0 \text{ si } b_i(v_i) < c \end{cases}$$

donde c es la segunda mejor oferta. Es decir, tendrá una utilidad igual a la diferencia entre su valoración, v_i, y su oferta, $b_i(v_i)$, si gana, y cero si pierde. Por lo tanto, $T_i = b_i(v_i)$ si i gana y $T_i = 0$ si pierde.

En cambio, en una subasta de sobre cerrado de segundo precio las funciones de utilidad tienen la siguiente forma:

$$U_i = \begin{cases} v_i - c, \text{si } b_i(v_i) > c \\ 0 \text{ si } b_i(v_i) < c \end{cases}$$

porque si el agente i gana, deberá pagar $T_i = c$, es decir, la oferta más alta de los otros jugadores. Similarmente, si i pierde, pagará $T_i = 0$.

En ambos tipos de subasta, cuando dos o más participantes empatan con la propuesta más alta es usual definir al ganador por sorteo. Cuando los espacios de valoraciones son continuos, los empates son eventos con probabilidad nula, motivo por el cual no se considera esta posibilidad en la función de utilidad. La linealidad de las funciones de utilidad en las subastas de primer precio y segundo precio (en $v_i - b_i(v_i)$ y $v_i - c$, respectivamente) refleja neutralidad al riesgo por parte de los jugadores.

El principal resultado de la teoría de subastas es el Teorema de Equivalencia de Ingresos. Klemperer (2004) recoge la siguiente versión. Los supuestos son los siguientes: Se tiene un número dado de compradores potenciales neutrales al riesgo, interesados en un objeto por el cual tienen una señal privada obtenida independientemente de una distribución común, estrictamente creciente y que asigna probabilidad nula a cualquier punto.[14] Considerando estos supuestos, cualquier subasta que asigne el objeto al agente con la señal más alta y asegure una utilidad nula a los agentes con la señal más baja posible, resultará en el mismo ingreso esperado para el vendedor. Asimismo, cada participante tendrá el mismo pago esperado como función de su señal. Un predecesor de esta equivalencia fue observado por primera vez por Vickrey (1961) y generalizada posteriomente por Myerson (1981) y Riley y Samuelson (1981).

El Teorema de Equivalencia de Ingresos es importante porque muchos desarrollos en teoría de subastas se basan en desviaciones respecto a los supuestos de este resultado básico. Por

[14] Cualquier distribución continua satisface esta condición.

ejemplo, en el contexto de agentes asimétricos, con valoraciones privadas extraídas de diferentes distibuciones, Myerson (1981) establece las condiciones para que una subasta sea óptima. En el mismo contexto, Maskin y Riley (2000) comparan los ingresos esperados del vendedor en la subasta inglesa frente a la subasta de sobre cerrado de primer precio, en una amplia variedad de situaciones. Maskin y Riley (1984) analizan las subastas óptimas con agentes aversos al riesgo (en cuyo caso la subasta de sobre cerrado de primer precio es la que brinda mayor ingreso esperado). Milgrom y Weber (1982) estudian el caso de valores afiliados (si el agente i es optimista entonces existe mayor probabilidad de que j también sea optimista), en cuyo caso la subasta ascendente o inglesa maximiza el ingreso esperado. Asimismo, cuando se relaja el supuesto de número de participantes, N, fijo e independencia de ofertas, se encuentra que las subastas de sobre cerrado atraen a más postores y desalientan más la colusión que su equivalente ascendente.[15]

La eficiencia

El supuesto implícito en la literatura para el análisis de la eficiencia es que los jugadores eligen sus funciones de oferta de equilibrio y la eficiencia se juzga a partir del resultado previsto como equilibrio del juego.

Este criterio se utiliza para medir el desempeño de las subastas con respecto a un concepto ideal de asignación eficiente de recursos, el óptimo paretiano. Una asignación representa una forma de repartir los objetos entre los participantes y se puede escribir como un arreglo $(N \times K)$-dimensional, $x = (x_i)_{i=1,\ldots,N}$, con $x_i \in \{0,1\}^K$. Una asignación indica qué objetos se lleva cada comprador, de la siguiente manera:

$$x_i^k = \begin{cases} 1, \text{ si } i \text{ obtiene el objeto } k \\ 0, \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Es decir, el k-ésimo componente de x_i será igual a 1 si el agente i gana el objeto k, y 0 en caso contrario. Por ejemplo, supóngase que se subastan tres objetos ($K = 3$): A, B, y C entre cuatro agentes ($N = 4$). Si el primer agente gana el primer objeto y el tercer agente gana los dos objetos restantes, entonces la asignación se puede escribir como $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, con $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,0,0)$, $x_3 = (0,1,1)$, y $x_4 = (0,0,0)$. Una asignación es factible si no se asignan más objetos de los que están disponibles para la venta; es decir, si $\sum_{i=1}^{N} x_i^k \leq 1$, para todo $k = 1, \ldots, K$. Cuando el objeto k se vende, esta expresión se cumple con igualdad. Sin embargo, cabe la posibilidad de que no se venda y quede en poder del subastador, en tal caso se

[15] Klemperer (2004) revisa los principales resultados al respecto.

tiene $\sum_{i=1}^{N} x_i^k = 0$. En el ejemplo dado, la asignación es factible y representa la venta de todos los objetos.[16]

Una asignación es el resultado final de una subasta, y depende de la realización de las valoraciones de los participantes y de las reglas que definen a los ganadores. Se puede, por tanto, establecer una relación entre las valoraciones y las asignaciones resultantes de una subasta. Utilizando este criterio se denotará mediante $u_i(x_i)$ a la utilidad del agente i cuando las valoraciones de todos los jugadores son $\left\{v_i^k\right\}$, $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, K$, y las reglas de la subasta llevan a la asignación $x = (x_i)_{i=1,\ldots,N}$, en la cual el jugador i gana los objetos indicados por el vector x_i. Por ejemplo, si el jugador i no obtiene nada en la asignación x, entonces $u_i(x_i)$ será nula; en caso contrario, el agente i tendrá una utilidad positiva, la cual dependerá del formato específico de la subasta. En el ejemplo del párrafo anterior, con $x = [(1,0,0),(0,0,0),(0,1,1),(0,0,0)]$, se tiene $u_2(x_2) = u_4(x_4) = 0$. Si bien cabe esperar que $u_1(x_1)$ y $u_3(x_3)$ sean positivos, los valores exactos dependerán de la valoración del agente 1 por el objeto A y la valoración del agente 3 por los objetos B y C.[17]

Respecto a esta notación para las funciones de utilidad, obsérvese que: (*i*) están definidas en términos *ex-post*; es decir, una vez que se conocen los resultados de la subasta, (*ii*) no hay externalidades: cada participante recibe utilidad únicamente por las unidades que ganó,[18] y (*iii*) si no hay sinergias o complementaridades entre los objetos, $u_i(x_i)$ puede representarse mediante una función lineal separable en cada uno de sus argumentos.[19] La utilidad del agente i cuando recibe x_i en la asignación x se puede escribir como:[20]

$$u_i(x_i) = v_i^1 x_i^1 + v_i^2 x_i^2 + \ldots + v_i^K x_i^K = \sum_{k=1}^{K} v_i^k$$

Se supone que para todo agente i, la función $u_i(\cdot)$ es no decreciente en cada uno de sus argumentos, lo cual implica que cada objeto ganado aporta utilidad, la cual es proporcional a la valoración por el mismo. Obsérvese que si los objetos exhiben complementaridades entre sí,

[16] Sea X el conjunto de asignaciones posibles. La elección de una asignación $x \in X$ puede incorporar un elemento aleatorio. En esta situación se puede definir una distribución de probabilidad δ sobre X, con $\delta : X \to [0,1]$ y $\sum_{x \in X} \delta(x) = 1$. Sea D el conjunto de estas distribuciones de probabilidad sobre X. Si el conjunto D es finito y tiene $\#D$ elementos, entonces D será un simplex en $\mathbb{R}^{\#D}$.

[17] Cuando se utiliza la formulación aleatoria para las asignaciones, las funciones de utilidad (von Neumann-Morgenstern) de cada agente se definen sobre el espacio de distribuciones de probabilidad D, en lugar de definirse directamente sobre el espacio de asignaciones X.

[18] En caso contrario, en lugar de escribir $u_i(x_i)$, se tendría $u_i(x)$.

[19] Como se indica más adelante, el mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves es eficiente si las valoraciones son privadas e independientes, pero esta conclusión descansa en la separabilidad aditiva de la función de utilidad.

[20] En esta utilidad no se descuentan los pagos monetarios. Es decir, se trata de una utilidad bruta.

$u_i(x_i) \geq \sum_{k=1}^{K} v_i^k$. En cambio, si los objetos son sustitutos, entonces $u_i(x_i) \leq \sum_{k=1}^{K} v_i^k$. Si se define un paquete P_i como un subconjunto P_i de $\bar{K}$, que contiene exactamente todos los objetos que gana el jugador i en la asignación x ($k \in P_i$ sí y sólo si $x_i^k = 1$), entonces $u_i(x_i)$ coincide con $\tilde{v}_i^{P_i} = \tilde{v}_i(P_i)$.

Una asignación es eficiente en el sentido de Pareto (u óptima en el sentido de Pareto) si no existe una manera de aumentar la utilidad de algún agente sin disminuir la de otro. Nótese que ésta es una definición *ex-post* de eficiencia porque se juzga a partir de los resultados finales de la subasta y en tal sentido ya no son importantes las probabilidades de ganar ni la distribución de probabilidades de cada tipo. La eficiencia *ex post* es importante porque es una condición necesaria para la maximización del bienestar social. En el contexto actual, el bienestar social es una función $W : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada vector de utilidades individuales $(u_1, \ldots, u_N)$ le asigna un nivel de utilidad agregado, que usualmente será $\sum_{i=1}^{N} u_i(x_i)$.[21] Se considera que la asignación $x^* = (x_i^*)_{i=1\ldots N}$, resultante del equilibrio de una subasta, maximiza el bienestar social $W = \sum_{i=1}^{N} u_i(\tilde{x}_i)$, si cada paquete de objetos se asigna al agente que más lo valora. En decir, cuando la utilidad de cada agente es aditiva, $u_i(x_i) = \sum_{k=1}^{K} v_i^k$, una subasta es eficiente cuando para todo k,

$$\left[v_i^k \geq v_j^k, \forall j \neq i\right] \Longrightarrow \left(x_i^{k*} = 1\right) \wedge \left[(x_j^{k*} = 0) \forall j \neq i\right]$$

con lo cual, para toda asignación factible $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N]$, se tiene $u_i(x_i^*) \geq u_i(\tilde{x}_i)$, por ser las $u_i(\cdot)$ funciones no decrecientes en todos sus argumentos, requiriéndose que todos los agentes tengan la misma función de utilidad. En consecuencia, $\sum_{i=1}^{N} u_i(x_i^*) \geq \sum_{i=1}^{N} u_i(\tilde{x}_i)$.

Formalmente, una subasta será eficiente *ex post* si la asignación resultante en equilibrio, $x^* = (x_i^*)_{i=1,\ldots,N}$, genera una utilidad social que no podría incrementarse modificando la asignación, para toda realización de las valoraciones: $\forall v_i^k$, $\forall \tilde{x}_i$ factible, $\sum_{i=1}^{N} u_i(x_n^*) \geq \sum_{i=1}^{N} u_i(\tilde{x}_i)$. En términos de Armstrong (2000), ésta es la denominada "*eficiencia fuerte*", y se logra cuando se asigna el objeto al participante con la valoración realizada más alta y el objeto se vende siempre que haya un participante que valore el objeto más que el organizador.[22]

[21] Esta representación asume que todos los agentes tienen el mismo peso en la función de bienestar social. En términos más generales se podría utilizar una función $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i(x_i)$, donde α_i representa el peso de cada agente en la función de bienestar social.

[22] Existen, por supuesto, versiones más débiles de eficiencia. Sea μ una medida de probabilidad. Siguiendo a Dubra, Echenique y Manelli (2009), una subasta es μ-*eficiente* si con probabilidad μ asigna el objeto al agente que más lo valora. Armstrong (2000) señala otras dos formas de eficiencia: (*i*) *Eficiencia débil:* si se vende el objeto, éste se asigna al participante con la valoración realizada más alta. Sin embargo, no siempre se vende el objeto, por ejemplo si el vendedor lo retiene ante la presencia únicamente jugadores con baja valoración. (*ii*) *Eficiencia*

Holmström y Myerson (1983) extienden el concepto de eficiencia a los casos con información incompleta, diferenciando diversas situaciones de acuerdo al grado de información disponible o revelada. Cuando los agentes no tienen aún ninguna información privada, se utiliza el concepto de eficiencia *ex ante*, en la cual la utilidad de cada agente se evalúa en términos esperados. Una vez que cada agente ha recibido su información privada, pero desconoce la información privada de los demás, se utiliza el concepto de eficiencia intermedia o provisional (*interim efficiency*), donde se calcula la utilidad esperada de cada agente, condicional a la información disponible en ese momento. Finalmente, la eficiencia *ex post* corresponde al caso en que toda la información se ha hecho pública. La expresión (4.7) de Holmström y Myerson (1983), reproducida a continuación, muestra las relaciones entre estos tres conceptos de eficiencia:

$$\Delta_A \subseteq \Delta_I \subseteq \Delta_P$$

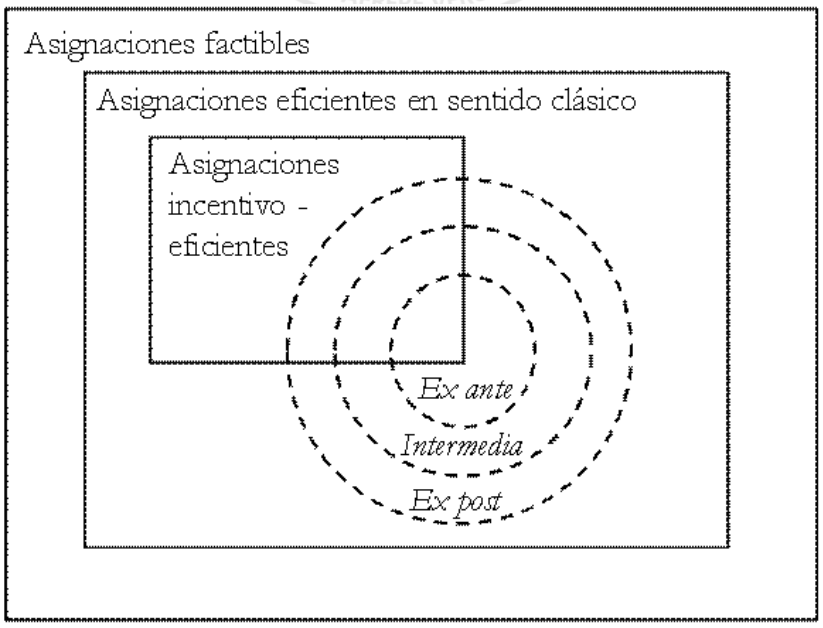
donde Δ_A, Δ_I y Δ_P son los conjuntos de asignaciones eficientes en sentido *ex ante*, intermedio y *ex post*, respectivamente. De acuerdo a esta expresión, la eficiencia *ex post* es el concepto más débil, y la eficiencia *ex ante* es el concepto más fuerte o restrictivo. Intuitivamente, si se parte de una asignación eficiente *ex ante*, cuando se revela la información privada a cada agente, se reduce la incertidumbre. No obstante, toda ventaja que pueda obtener un agente a partir de su información privada encontraría oposición en algún otro agente. Esto se debe a que la asignación eficiente *ex ante* contiene implícitamente el mejor seguro posible para todos los agentes. Si un agente, conocedor de su información privada, quisiera proponer otra asignación, es decir, inclinar la balanza a su favor, otro se opondría, manteniendo la asignación inicial. En términos de Milgrom y Stokey (1982), la recepción de información privada no puede generar oportunidades de intercambio que sean beneficiosas para todos. En consecuencia, las asignaciones eficientes *ex ante* son también eficientes en la etapa intermedia, y éstas son a su vez eficientes *ex post*. La primera inclusión, $\Delta_A \subseteq \Delta_I$, surge del Teorema 1 (p. 21) de Milgrom y Stokey (1982), en tanto que la segunda, $\Delta_I \subseteq \Delta_P$, es estudiada en Wilson (1978, p. 811).

En general, en contextos de información incompleta los agentes ocultan su información privada. Holmström y Myerson (1983) distinguen también entre la noción de *eficiencia clásica*,

en lo más alto: cuando se asigna el objeto al participante con la valoración más alta posible -no realizada- si él está presente en la subasta. La eficiencia fuerte implica maximizar la suma del bienestar de los compradores y del vendedor, en tanto la eficiencia débil implica maximizar sólo la suma del bienestar de los compradores. La eficiencia en lo más alto es una condición necesaria para la eficiencia débil. La eficiencia débil es una condición necesaria para la eficiencia fuerte, y ambas coinciden si el vendedor asigna un valor nulo al objeto y no hay precio de reserva. Por su parte, Swinkels (1999) estudia la *eficiencia asintótica*, la cual requiere que cuando el número de potenciales compradores sea suficientemente grande, el bienestar social se aproxime al bienestar social máximo.

en la cual no hay problemas de incentivos para extraer la información privada de cada agente, y la *eficiencia incentivo - compatible*, en la cual, ante el deseo natural de los agentes de ocultar su información privada, se deben imponer restricciones de incentivos que aseguren que todos revelen su verdadera valoración. Las asignaciones incentivo - eficientes son un subconjunto de las asignaciones eficientes en sentido clásico.

Se pueden combinar los criterios de eficiencia de acuerdo a la difusión de la información con las nociones de eficiencia clásica y eficiencia incentivo - compatible. El siguiente gráfico muestra las relaciones entre estos conceptos. El concepto más utilizado en la literatura es el de eficiencia *ex post*, el cual, habiendo sido diseñado para una situación en la cual se conoce la información privada de todos los agentes, no requiere utilizar restricciones de incentivos. Por lo tanto, el uso que se le da al término *eficiencia ex post* en la literatura se refiere a la *eficiencia ex post en sentido clásico*. Los otros dos conceptos de eficiencia más utilizados son la *eficiencia intermedia incentivo - compatible* y la *eficiencia ex ante incentivo - compatible*. Cuando no es posible alcanzar una asignación que cumpla con la definición de *eficiencia ex post en sentido clásico*, se recurre al concepto restringido, la *eficiencia intermedia - incentivo compatible*, como en Dasgupta y Maskin (2000).



Si las valoraciones v_i^k fuesen observables por el vendedor, la búsqueda de la subasta eficiente tendría una solución automática: otorgar el bien k al participante con la valoración realizada más alta. Sin embargo, en la práctica el vector de valoraciones $\left(v_i^k\right)_{k=1,\ldots,K}$ es observado únicamente por el agente i. Lo que observa el vendedor es el vector de propuestas $\left(b_i^k\right)_{k=1,\ldots,K}$ enviado por

cada postor i. En el caso de valores privados sin complementaridades, siguiendo a Krishna (2002), una subasta estándar es eficiente sí y sólo si las ofertas permiten identificar las valoraciones.

Sea la función de ofertas de equilibrio Λ, la cual a cada combinación posible de valoraciones $\left(v_i^k\right)_{i=1,\ldots,N}^{k=1,\ldots,K}$ le asigna una matriz $N \times K$ de ofertas o propuestas $\left[b_i^k\left(v_i^k\right)\right]_{i=1,\ldots,N}^{k=1,\ldots,K}$. Es decir:

$$\Lambda : \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & \ldots & v_1^K \\ v_2^1 & v_2^1 & \ldots & v_2^K \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_N^1 & v_N^2 & \ldots & v_N^K \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} b_1^1(v_1^1) & b_1^2(v_1^2) & \ldots & b_1^K(v_1^K) \\ b_2^1(v_2^1) & b_2^2(v_2^1) & \ldots & b_2^2(v_2^K) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_N^1(v_N^1) & b_N^2(v_N^2) & \ldots & b_N^K(v_N^K) \end{bmatrix}$$

Teorema 1 (Krishna 2002) *: Una subasta estándar es eficiente si y sólo si la función de ofertas de equilibrio Λ es no decreciente en las valoraciones.*

Caso particular: En la subasta de sobre cerrado de segundo precio y su extensión multi-objeto (la subasta múltiple de Vickrey, que se describe más adelante), la función de oferta de equilibrio es la función identidad, de manera que $b_i^k\left(v_i^k\right) = v_i^k$ para todo $i = 1, \ldots, N$ y para todo $k = 1, \ldots, K$. Por lo tanto, ambas subastas son eficientes.

Este resultado particular establece que con valoraciones privadas una subasta es eficiente si (i) sus reglas establecen que el ganador es quien hace la oferta más elevada (subasta estándar), y (ii) la función de oferta de equilibrio Λ es no decreciente (valoraciones más altas se reflejan en ofertas más altas). Esto se cumple si todos los jugadores utilizan la misma función de oferta $b_i^k\left(v_i^k\right) = b\left(v_i^k\right)$ para todo $k = 1, \ldots, K$. De este modo, el ranking de las $N \times K$ ofertas (las K más altas ganan) corresponderá al ranking de las $N \times K$ valoraciones. Esto permite inferir las valoraciones a partir de las ofertas. En este caso:

$$\Lambda : \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & \ldots & v_1^K \\ v_2^1 & v_2^1 & \ldots & v_2^K \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_N^1 & v_N^2 & \ldots & v_N^K \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} b(v_1^1) & b(v_1^2) & \ldots & b(v_1^K) \\ b(v_2^1) & b(v_2^1) & \ldots & b(v_2^K) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b(v_N^1) & b(v_N^2) & \ldots & b(v_N^K) \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, si $N = 3$ y $K = 2$, podemos definir la siguiente función:

$$\Lambda : v \longrightarrow b(v) = v - 1$$

$$\Lambda : \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Si esta fuese la función Λ de ofertas de equilibrio de una subasta estándar, el participante 3 se llevaría los objetos 1 y 3 por haber realizado las ofertas más altas (6 por el objeto 1 y 5 por el objeto 3), y el participante 1 se llevaría el objeto 2 (al ofrecer 1 frente a sus oponentes que ofrecieron 0). Con ello, la asignación resultante sería $x = [(0,1,0),(0,0,0),(1,0,1)]$. La equivalencia entre el ranking resultante de $b(v)$ y el resultante de v se cumple para cualquier matriz de valoraciones v, porque $b(v) = v - 1$ es una función no decreciente.

Vickrey (1961) demuestra que, para agentes con valoraciones distribuidas idénticamente, la subasta inglesa es eficiente cuando se subasta un solo objeto, así como la subasta simultánea ascendente lo es cuando se venden varios objetos, pues en equilibrio permiten alcanzar el óptimo de Pareto. Por extensión, su correspondiente versión estática, la subasta de sobre cerrado de segundo precio también es eficiente. La eficiencia radica en que el mecanismo de determinación del precio toma en cuenta la oferta perdedora más alta, que es la clave de la subasta inglesa y de la subasta de sobre cerrado de segundo precio. La eficiencia de la subasta inglesa y de la subasta de sobre cerrado de segundo precio no depende de si la distribución de valoraciones es simétrica o no. Por el contrario, aún dentro del contexto de valores privados, la subasta holandesa sólo es eficiente si la distribución es simétrica. Como demuestra el autor en el apéndice II del trabajo citado, cuando los participantes presentan asimetrías en la distribución de valoraciones (por ejemplo, por diferencias en el soporte de la distribución), en el equilibrio de la subasta holandesa los objetos pueden no resultar en manos del participante que más los valora, por lo que con esta subasta no se garantiza la eficiencia. Lo mismo se aplica para la versión estática de esta subasta. Es decir, el equilibrio de la subasta de sobre cerrado de primer precio es eficiente si la distribución de señales es simétrica, pero con una distribución asimétrica, el equilibrio ya no es eficiente.[23]

La subasta de sobre cerrado de segundo precio deja de ser eficiente cuando se abandona el contexto de valores privados (salvo cuando $N = 2$). En general, Maskin (1992) indica que cuando las valoraciones son interdependientes las subastas estándar no alcanzan eficiencia. Esto se debe a que las valoraciones de cualquier par de postores pueden depender de la información privada de un tercer jugador, pero las ofertas no muestran esta dependencia. Por lo tanto, las ofertas no permiten identificar las valoraciones. No obstante, es conveniente aclarar que en el caso de valores comunes puros, en cual el objeto o los objetos tienen el mismo valor para todos los compradores, el problema de encontrar la asignación eficiente es trivial. Bastará entregar los objetos a cualquier participante.

[23] Ver Maskin (1992) y Dasgupta y Maskin (2000).

En general, cuando se vende un único bien, cualquier mecanismo que determine el precio a pagar en función a la oferta perdedora más alta, será eficiente. Cuando se vende más de un objeto, la eficiencia dependerá de si las valoraciones de los participantes corresponden al supuesto de valores privados o de valores comunes. La literatura indica que se puede alcanzar la eficiencia en subastas con valores privados independientes y en subastas con valores interdependientes con señales unidimensionales (Dasgupta y Maskin, 2000). El supuesto clave para este resultado es que la valoración de i por el objeto k sea más sensible a las señales recibidas por i que a las señales recibidas por j. Esta condición, conocida como *single crossing*, significa que los efectos propios deben ser más grandes que los efectos cruzados, y se presenta en versiones más fuertes o más débiles en toda la literatura sobre eficiencia de subastas.[24]

Para el caso de valoraciones interdependientes y señales multidimensionales, Maskin (1992), Dasgupta y Maskin (2000) y Jehiel y Moldovanu (2001) muestran que en general no existe una subasta *ex post* eficiente. El sustento se basa en el concepto de *equilibrio regular*. En un equilibrio regular, el comportamiento de los agentes no se altera ante cambios en las señales dentro de cierto espacio. Por ejemplo, supóngase que para un agente existe un conjunto de señales multidimensionales que le conduce a estimar las mismas valoraciones y le proporciona la misma utilidad esperada, independientemente de las señales de los demás. Esto implica que ante dos señales diferentes dentro de este conjunto, este agente no ve alterado su problema de optimización ni sus decisiones óptimas en equilibrio. No obstante, con valores interdependientes, estas señales diferentes sí pueden modificar las valoraciones y la utilidad esperada de los demás jugadores. En consecuencia, el cambio en las señales podría hacer que cambie el comprador con la valoración más alta. Dado que en un equilibrio regular el comportamiento de los agentes no cambia ante distintas señales, la asignación de objetos también se mantiene, aún cuando la eficiencia requeriría modificar la asginación en función a las nuevas valoraciones de cada agente. Es decir, en un equilibrio regular, para cierto espacio de señales, la asignación no cambia a pesar de que sí cambia el ranking de valoraciones, lo cual vuelve imposible mantener la asociación entre asignaciones y valoraciones para *todo* tipo o señal de cada jugador. Por lo tanto, dicha asignación no cumple con la definición de eficiencia *ex post*. Jehiel y Moldovanu (2001) generalizan el argumento de imposibilidad de eficiencia *ex post* con señales multidimensionales, permitiendo que cada jugador incorpore en su función de utilidad los bienes ganados por otros agentes.

Intuitivamente, este resultado se puede interpretar de la siguiente manera. En una subasta,

[24] Dubra, Echenique y Manelli (2006) muestran que esta condición de sensibilidad relativa es importante también en otros contextos, tales como el teorema de Stolper - Samuelson, que relaciona los precios de los bienes con los precios de los factores según su intensidad de uso.

cada jugador $i \in \bar{I}$ sólo puede expresar sus preferencias mediante un indicador unidimensional, que es el monto que está dispuesto a pagar. Sin embargo, si las preferencias de i se basan en señales multidimensionales independientes, no sólo recibidas por él, sino también por sus competidores, entonces le es imposible comunicar sus preferencias mediante un indicador unidimensional. Por consiguiente, la asignación de los objetos en función a la disponibilidad a pagar no necesariamente reflejará de manera completa las preferencias o valoraciones de los agentes. Por lo tanto, la asignación de equilibrio puede ser ineficiente.

En vista de la imposibilidad de alcanzar el *first best* (eficiencia *ex post* o eficiencia completa) con valoraciones interdependientes y señales multidimensionales, Dasgupta y Maskin (2000) proponen la búsqueda de subastas que permitan alcanzar el *second best* (eficiencia con incentivos, o eficiencia restringida). En esta noción de eficiencia se busca la maximización del bienestar social sujeta a restricciones de incentivos que aseguran ofertas acordes con las valoraciones. En este caso, la eficiencia no se juzga a partir de las funciones de valoración originales, que dependen de señales multidimensionales, sino a partir de funciones de valoración derivadas, que dependen de señales resumidas (unidimensionales). Para construir adecuadamente las señales resumidas, se requiere que los agentes reporten sus verdaderas señales, de ahí el requerimiento de restricciones de incentivos. Los autores proponen una generalización multiobjeto de la subasta de sobre cerrado de segundo precio, la cual alcanza la eficiencia restringida. Esta subasta se describe en la sección 4 del presente documento.

Universidad de SanAndrés

Las subastas de varios objetos

En general, cuando $K \geq 2$, la utilidad de un agente i dependerá de cuantos objetos gane en la subasta, su valoración por dichos objetos, y el pago total, T_i, que deba hacer al vendedor.[25] Por ejemplo, si el postor i obtiene k^i objetos,[26] tendrá una utilidad,

$$U_i(P_i, T_i) = U_i(v_i^1, \ldots, v_i^{k_i}, T_i). \tag{I.7}$$

En las siguientes subsecciones se supone que no hay menos agentes que objetos, $2 \leq K \leq N$, y se describen brevemente los tipos de subastas más importantes, comenzando por un caso simple donde cada agente demanda a lo más una unidad del bien. En la literatura es usual diferenciar las subastas de varias unidades del mismo bien (caso de bienes homogéneos o sustitutos perfectos)

[25] Obsérvese que la utilidad de un agente se ha expresado en términos ex-post, con la finalidad de enfatizar su dependencia respecto a los resultados de la subasta. Una alternativa sería modelar la utilidad esperada ex-ante, como una función de todos los objetos disponibles y de las probabilidades de ganar cada objeto, menos el pago esperado por todos los objetos ganados.

[26] Obsérvese que $k^i = \#(P_i)$.

de las subastas de varias unidades de distintos bienes (caso de bienes heterogéneos), por lo que se seguirá esta clasificación.[27]

3. Subastas de múltiples objetos cuando cada agente demanda una unidad

En este caso, para el agente i, $v_i^1(s_1, \ldots, s_N) > 0$ para la primera unidad que consume, y $v_i^2(s_1, \ldots, s_N) = \ldots = v_i^K(s_1, \ldots, s_N) = 0$ para todas las demás unidades. Maskin y Riley (1984) demuestran que con valores privados distribuidos idéntica e independientemente entre participantes que demandan a lo más un objeto, los cuatro formatos mencionados de subastas estándar son eficientes y dan el mismo ingreso esperado. Además son óptimos si se incorporan precios de reserva adecuados.

Vickrey (1961) introduce el análisis de subastas de $K \geq 2$ bienes idénticos entre $N \geq 2$ participantes que demandan cada uno a lo más una unidad del bien. En particular, analiza la subasta simultánea ascendente y la subasta sucesiva. En la primera se ponen a la venta todas las unidades a la vez y los participantes van subiendo sus ofertas hasta que no quede nadie que desee ofertar más. Los ganadores serán los K participantes que hicieron las K ofertas más altas. Con incrementos infinitesimales en las ofertas, el precio será igual a la oferta perdedora más alta. Este esquema es similar al de la subasta inglesa para el caso de un único bien. En la subasta sucesiva se ponen los objetos a la venta uno a la vez, por medio de una subasta inglesa. El problema de este tipo de subasta es que se introduce un elemento de especulación, ya que los participantes podrían esperar que los objetos que se vendan al final tengan precios diferentes a los que se venda al comienzo, lo cual podría generar mayor dispersión en los precios. El autor encuentra que la subasta simultánea ascendente es eficiente, en tanto que una subasta sucesiva no lo es.

La subasta simultánea ascendente es la más utilizada en su categoría. Permite vender objetos heterogéneos a consumidores que demandan a lo más un objeto cada uno. En este formato se realizan varias rondas donde cada postor envía su oferta en un sobre cerrado. Al final de cada ronda se establecen los precios máximos de cada bien, en base a las ofertas más altas.

[27] Una clasificación equivalente, que enfatiza las valoraciones, es la propuesta por Weber (1983), la misma que diferencia los casos donde cada comprador tiene (i) una valoración idéntica por cada objeto, pero su capacidad de consumo se limita a una unidad, y (ii) una valoración diferente por cada objeto. En este último caso, las diferencias en valoraciones pueden deberse a que los objetos sean diferentes, pero también a que los objetos sean idénticos y cada ítem adicional genere una valoración marginal diferente.

Cada ronda implica precios sucesivamente más altos para al menos un objeto. Progresivamente, algunos participantes dejan de enviar ofertas por ciertos bienes, al considerarlos demasiado caros respecto a sus valoraciones. La subasta termina cuando nadie envía nuevas ofertas. En la práctica, utilizar la subasta simultánea ascendente es similar a vender cada objeto mediante subastas inglesas o ascendentes individuales.

4. Subastas de múltiples bienes homogéneos cuando cada agente demanda más de una unidad

Cuando los bienes son homogéneos o sustitutos perfectos, usualmente se asume que la valoración es débilmente decreciente en el número de unidades consumidas. Es decir, el participante i valora más las primeras unidades que las últimas:

$$v_i^1 \geq v_i^2 \geq \ldots \geq v_i^K$$

La interpretación económica de esta propiedad es que, para un comprador dado, cada unidad adicional que reciba le aporta menos utilidad que la unidad previa; es decir, la utilidad marginal es decreciente, y en algunos casos, constante.[28] Obsérvese que a cada comprador potencial se le permite adquirir más de una unidad del bien.

Las funciones de oferta de los compradores, de acuerdo al supuesto de utilidad marginal no creciente, representan curvas inversas de demanda, también no crecientes. Es decir, como es habitual en economía: $b_i^{k+1} \leq b_i^k$, para todo $i \in \bar{I}$ y para todo $k \in \bar{K}$. En general, cuando $K \geq 1$ la utilidad de un agente dependerá de cuántos objetos gane en la subasta, de su valoración por dichos objetos, y del pago total T_i que deba hacer al vendedor. Por ejemplo, si el agente i recibe los primeros k^i objetos, tendrá una utilidad $U_i(v_i^1, \ldots, v_i^{k_i}, T_i)$. Obsérvese que la utilidad de un agente se ha definido en términos *ex-post* debido a que depende de los objetos ganados en la subasta. Una alternativa sería modelar la utilidad esperada *ex-ante*, como una función de todos los objetos disponibles y de las probabilidades de ganar cada objeto, menos el pago esperado que se deba hacer por todos los objetos ganados.

Los tipos de subastas más utilizados cuando los bienes son homogéneos son los siguientes:

Formatos estáticos:

En los formatos estáticos, cada uno de los N postores realiza una oferta b_i^k por cada uno de los K objetos, colocando su vector de ofertas $b_i \in \mathbb{R}^K$ en un sobre cerrado. Luego se ordenan

[28] En algunas aplicaciones se utiliza el supuesto de valoración marginal constante: $v_i^1 = v_i^2 = \ldots = v_i^K$.

de mayor a menor las $N \times K$ propuestas recibidas. Las K ofertas más altas son declaradas ganadoras. Si el agente i tiene k^i ofertas dentro de las K ofertas más altas, entonces gana el derecho a recibir exactamente k^i objetos. No importa la identidad de los objetos debido a que son homogéneos.

Los tres tipos más importantes son los siguientes:

- Subasta discriminatoria de sobre cerrado. El pago que debe hacer el agente i es la suma de sus ofertas ganadoras. Si logró adjudicarse k^i bienes pagará:

  $$\sum_{k=1}^{k^i} b_i^k$$

  La subasta discriminatoria es la generalización de la subasta de sobre cerrado de primer precio. El uso del término discriminatorio se explica porque distintas unidades del mismo bien son compradas a diferentes precios.

- Subasta de sobre cerrado de precio uniforme. El precio a pagar, p, es el mismo para todas las unidades compradas por los participantes ganadores de la subasta. Dicho precio se ubica entre la oferta ganadora más baja y la oferta perdedora más alta. Si el comprador i logra adjudicarse k^i bienes, entonces paga pk^i. Esta subasta también se utiliza cuando cada postor demanda como máximo una unidad de las K disponibles.

  La subasta de precio uniforme generaliza la subasta de sobre cerrado de segundo precio sólo cuando los postores tienen demanda unitaria; es decir, demandan a lo más una unidad de los bienes en venta. Como bien señalan Ausubel y Cramtom (2002), durante un buen tiempo fue común el error de considerar que la eficiencia de la subasta de sobre cerrado de segundo precio siempre se preserva en la subasta de precio uniforme. Dichos autores tipifican a este error como la "falacia de la subasta de precio uniforme".

  La subasta de precio uniforme no preserva la eficiencia de la subasta de sobre cerrado de segundo precio cuando los postores demandan más de una unidad. Por ejemplo, si un participante desea dos unidades de un bien, es posible que su oferta por la segunda unidad determine el precio que deberá pagar tanto por la primera como por la segunda unidad, dado que se trata de una subasta de precio uniforme. Por lo tanto, dicho participante tendrá incentivo a ofrecer por la segunda unidad un precio menor a su valoración, con la finalidad de reducir el precio que paga por la primera unidad. Este es el fenómeno de reducción de demanda y, como se explica más adelante, puede llevar a asignaciones ineficientes.

Universidad de San Andrés

- Subasta múltiple de Vickrey. El monto que pagan los ganadores equivale al costo de oportunidad de su presencia en la subasta. Para ello, los pagos se establecen de la siguiente manera: el agente que hizo la oferta más alta paga la oferta perdedora más alta; el agente que hizo la segunda oferta más alta paga la segunda oferta perdedora más alta, y así sucesivamente.

  La subasta múltiple de Vickrey es la generalización multiobjeto de la subasta de sobre cerrado de segundo precio, independientemente de cuántas unidades demanden los participantes. Perry y Reny (2002) encuentran que cuando $N = 2$, la subasta múltiple de Vickrey es eficiente para cualquier $K \geq 1$, aún con valoraciones interdependientes.

Cuando se permite que cada participante compre más de un objeto, las propiedades varían. Por ejemplo, Ausubel y Cramton (2002) señalan que tanto en la subasta discriminatoria como en la subasta de precio uniforme, si los participantes son idénticos y sus valoraciones marginales son constantes e independientes para toda unidad del bien, existe un equilibrio bayesiano de Nash eficiente. Si los participantes no son indénticos, y si algunos postores pueden ejercer poder de mercado (es decir, pueden influir en el precio con probabilidad positiva), existe incentivo para que reduzcan su demanda proponiendo precios muy por debajo de su valoración para un gran número de unidades. Bajo estas condiciones, no existe ningún equilibrio *ex post* eficiente en la subasta de precio uniforme. Por su parte, Vickrey (1961) demuestra que en la subasta de sobre cerrado de segundo precio, si los participantes son idénticos con valoraciones marginales no crecientes, entonces proponer ofertas iguales a la valoración es una estrategia débilmente dominante. Esto a su vez resulta en un equilibrio eficiente.

En la subasta de precio uniforme con demandas no unitarias, cada agente presenta como propuesta una curva de demanda; es decir, una relación entre cantidades demandadas y precios. Cada agente tiene total libertad para presentar como propuestas curvas de demanda con pendiente muy alta, lo cual indica una alta disposición a pagar por las primeras unidades, pero baja por las últimas. En la medida en que la propuesta por las primeras unidades no determina el precio final, presentar este tipo de propuestas no implica costo alguno para el agente. Más aún, todos los participantes tiene incentivos para presentar este tipo de propuestas, con el objetivo de que el precio final sea más bajo. En un contexto donde el bien subastado es perfectamente divisible, y cada participante puede demandar múltiples subdivisiones del mismo (situación equivalente a la analizada en esta sección), Wilson (1979) concluye que esta situación puede ocurrir tanto con valores comunes como con valores privados. Cuando los agentes manipulan

Universidad de San Andrés

el precio de este modo, se reduce el ingreso esperado del vendedor.[29] En un contexto similar, Back y Zender (1993) encuentran un equilibrio bayesiano de Nash donde todos los participantes utilizan el tipo de estrategias mencionado, lo cual se puede intepretar como una colusión implícita entre los participantes. No obstante, no prueban si en esta subasta hay equilibrios con propiedades diferentes.

Dicho análisis es realizado en Ausubel y Cramtom (2002). En general, en una subasta de precio uniforme, todo participante que demande más de una unidad tiene incentivos a presentar ofertas por debajo de su valoración (*bid shading*). Para un agente dado, la magnitud de esta discrepancia es mayor para las últimas unidades que para las primeras. Esto se debe a que a medida que la cantidad es mayor, aumenta la probabilidad de que la propuesta de este participante determine el precio de cierre del mercado, el cual se aplicará a todas las unidades vendidas. Por lo tanto, un postor tiene incentivos para ofrecer un precio bajo por las últimas unidades, las mismas que podrían determinar el precio de las primeras. Este fenómeno de reducción de demanda está presente tanto en entornos con valores privados como con valores interdependientes. Debido a que los postores grandes pueden perder las últimas unidades frente a postores pequeños, cuando son los postores grandes quienes las valoran más, este fenómeno genera ineficiencia. En general, como indican Ausubel y Cramtom (2002), en una subasta de precio uniforme existe incentivo para que, con probabilidad positiva, para todo postor i, $b_i = v_i$ sólo para la primera unidad, en tanto que $b_i < v_i$ para las unidades subsiguientes. Por lo tanto, todo equilibrio de la subasta de precio uniforme será ineficiente *ex-post* con probabilidad positiva. Demuestran además que la subasta de precio uniforme no tiene ningún equilibrio eficiente cuando los participantes tienen valoraciones marginales constantes (ya sea privadas o interdependientes). Asimismo, encuentran el mismo problema de reducción de demanda en subastas con valoraciones privadas y curvas de demanda con pendiente negativa. En este caso, la diferencia entre la oferta y la valoración es creciente en la participación de mercado de los agentes. Es decir, los incentivos a subreportar la demanda serán mayores para los participantes con mayor poder de mercado.

Existe una analogía entre el monopolio y el efecto negativo de la reducción de demanda sobre la eficiencia. Cuando la cantidad es cero, la curva de demanda coincide con la curva de ingreso marginal (análoga a la curva de propuesta de precio u oferta en la subasta). En el monopolio, a medida que la cantidad aumenta, cuando hay poder de mercado, la curva de ingreso marginal se ubica por debajo de la curva de demanda. En una subasta de precio uniforme, cuando sube la cantidad, la oferta se ubica por debajo de la valoración, en magnitudes crecientes. Como

[29] Wilson (1979) indica que este resultado también puede esperarse en una subasta discriminatoria cuando el bien es perfectamente divisible.

destacan Ausubel y Cramton (2002), esta discrepancia subsiste aún con valoraciones marginales constantes.

Si bien la subasta de precio uniforme es ineficiente, debido al problema de reducción de demanda, cabe preguntar si su alternativa más popular, la subasta discriminatoria, es eficiente, o en caso contrario, si genera menos ineficiencia.[30] En términos de la analogía con el monopolio, se podría pensar que si cada postor paga un precio diferente por cada unidad, dicho precio podría ser igual a su valoración, como en un monopolio con discriminación perfecta de precios, alcanzándose un resultado eficiente. Ausubel y Cramton (2002) comparan ambas subastas y advierten que ese podría ser o no el caso. Es decir, el ranking en términos de eficiencia, entre la subasta discriminatoria y la subasta de precio uniforme, es ambiguo. En una situación en que los participantes tienen valoraciones distribuidas idéntica e independientemente, y su cantidad demandada máxima es idéntica, entonces existe un equilibrio *ex post* eficiente en la subasta discriminatoria. Si las valoraciones son independientes pero no idénticamente distribuidas (o si la cantidad demandada máxima difiere entre postores), entonces no existe ningún equilibrio *ex post* eficiente en la subasta discriminatoria.[31]

Formatos dinámicos:

- Subasta holandesa múltiple. El organizador de esta subasta propone un precio inicial elevado y lo va reduciendo progresivamente. El primer postor que acepta el precio gana la primera unidad, y luego se continúa reduciendo el precio hasta que aparezca otro postor interesado. El proceso de reducción de precios y elección de ganadores se repite hasta agotar las K unidades en venta.

  Es una generalización de la subasta descendente u holandesa, y su versión estática es la subasta discriminatoria.

- Subasta inglesa múltiple. En ese caso el organizador propone un precio inicial bajo y lo va elevando progresivamente. A medida que el precio se eleve algunos postores se retirarán. La subasta termina cuando quedan exactamente K postores dispuestos a pagar un precio igual o mayor al propuesto. A ellos se les asignarán los K objetos, todos por el mismo precio. En este sentido este formato guarda relación con la subasta de precio uniforme.

[30] Una breve revisión del debate en torno a la subasta de precio uniforme y la subasta discriminatoria puede encontrarse en Bower y Bunn (2001).

[31] De acuerdo al Teorema 4 de Ausubel y Cramton (2002), esta es una propiedad genérica. Es decir, se cumple para funciones de distribución de valoraciones que difieren entre sí excepto en conjuntos de probabilidad cero.

En consecuencia, como señala Ausubel (2004), está sujeto a los mismos problemas de reducción de demanda e ineficiencia mencionados previamente. Por ello, se utiliza principalmente cuando se permite que cada participante compre a lo más un objeto y los bienes son homogéneos.

- Subasta de Perry y Reny (2002). En el contexto de bienes homogéneos y valores interdependientes, estos autores proponen la siguiente modificación de la subasta múltiple de Vickrey. El mecanismo consiste en un conjunto de subastas de sobre cerrado de segundo precio, una para cada unidad, llevadas a cabo en a lo más dos rondas. En la primera etapa cada participante envía una oferta contra cada uno de sus competidores. Una oferta en este contexto es un vector $K-$dimensional, que consiste de una propuesta de precio por cada objeto. Se pide una oferta contra cada participante con la finalidad de comparar las valoraciones por cada objeto entre todos los pares de participantes. Al final de la primera etapa, todas las ofertas son reveladas. En la segunda etapa, cada postor emite una nueva oferta, que reemplaza a la anterior, pero esta nueva oferta es condicional a la información revelada en la etapa previa, con lo cual cada postor toma en cuenta la información privada de los demás. Los autores muestran que el equilibrio de esta subasta es eficiente, pero anotan que sería difícil observar lo mismo en la práctica, considerando que la subasta requiere que se revele la información privada.

- Subasta de Ausubel. También se conoce como subasta dinámica de Vickrey. Esta subasta fue propuesta por Ausubel (2004) en el contexto de bienes homogéneos y valoraciones privadas para participantes con valoraciones marginales decrecientes. En este tipo de subasta, el vendedor propone un precio inicial bajo, $p > 0$, y cada postor i $(i = 1, \ldots, N)$ anuncia el número de unidades que desea a ese precio, $x_i(p)$. Si la cantidad total demandada, $X(p) = \sum_{i=1}^{N} x_i(p)$ es mayor al número de objetos en venta, K, un mecanismo automatizado se encarga de elevar el precio continuamente. Para cada precio, cada postor indicará el número de unidades que demanda. A medida que el precio aumenta, algunos postores reducen su demanda.

  El precio aumentará hasta que la cantidad total demandada no exceda al número de objetos en venta, es decir, hasta que $X(p) \leq K$. La regla para la asignación de los bienes es la siguiente: para cada precio p y para todo participante i, se calcula la demanda residual, $X_{-i}(p)$, como la demanda de todos los participantes sin considerar la demanda de i, $X_{-i}(p) = X(p) - x_i(p)$. Si el mecanismo automatizado marca el precio p, y para algún participante i, $X_{-i}(p) < K$, entonces la diferencia $K - X_{-i}(p)$ se asigna al postor

i al precio p. La subasta de Ausubel es la generalización de la subasta inglesa y en su versión estática se reduce a la subasta múltiple de Vickrey.

Ausubel (2004) señala que en esta subasta:

- Todos los participantes revelan su verdadera valoración en equilibrio.
- No se presenta el problema de reducción de demanda.
- El resultado es eficiente, tal como en la subasta de Vickrey.
- Con valoraciones interpendientes, la subasta es eficiente sólo en algunas circunstancias. En particular, si cada participante demanda la misma cantidad $\bar{k}$ de unidades, las valoraciones marginales de cada agente son constantes ($v_i^k = v_i$ para todo $k \leq \bar{k}$ y $v_i^k = 0$ para todo $k > \bar{k}$), y la suma de demandas es exactamente igual a K (es decir, $K = \bar{k}N$), entonces existen equilibrios eficientes en la subasta propuesta. Intuitivamente, este caso es análogo a analizado en la sección 2, donde cada agente demanda una unidad definida como K/N, y en donde es posible alcanzar la eficiencia.

- Perry y Reny (2005) generalizan la subasta de Ausubel (2005) para el caso de bienes homogéneos, valoraciones interdependientes y señales unidimensionales. Señalan que en algunas circunstancias (por ejemplo, cuando sólo hay dos postores) esta generalización conduce a un resultado eficiente. La diferencia con la subasta de Perry y Reny (2002) es que se reemplaza el conjunto de subastas de sobre cerrado de segundo precio en dos rondas, por una modificación de la subasta ascendente. Esta modificación tiene dos características:

  - La primera es que en todo momento, cada postor anuncia una cantidad demandada contra cada uno de sus competidores. En términos de los autores, estos anuncios se conocen como "demandas dirigidas". De este modo, si un postor j reduce en una unidad su demanda contra i, entonces i puede ganar dicha unidad si su demanda dirigida a j aumenta en una unidad. De manera análoga a Ausubel (2004), un postor gana una unidad cuando las demandas dirigidas contra él son suficientemente pequeñas.
  - La segunda modificación permite que los participantes incrementen su demanda conforme transcurre la subasta, si bien el precio sube, a medida que adquieren más información sobre sus oponentes. Perry y Reny demuestran que esta segunda característica es necesaria para alcanzar eficiencia cuando existe asimetría entre participantes. Tomando ambas características en conjunto, el equilibrio de la subasta propuesta es eficiente.

Universidad de SanAndrés

5. Subastas de múltiples bienes heterogéneos cuando cada agente demanda más de una unidad

Cuando los objetos son heterogéneos es usual formar listas o paquetes de bienes. Sea $\bar{P}$ el conjunto de todos los paquetes posibles que se pueden formar. Este conjunto incluye todas las combinaciones posibles de objetos. Por tanto, si se tienen K objetos, habrán 2^K paquetes posibles. Cada postor tiene una valoración por cada uno de estos paquetes, $P \subseteq \bar{P}$, que se denotará como v_i^P, y representa cuánto valen los objetos en total para cada individuo. Esto deja abierta la posibilidad de que, cuando hay complementaridad entre los objetos de un paquete, el valor total supere a la suma de valores individuales. A cada postor se le solicitan ofertas por cada uno de los paquetes dentro de $\bar{P}$.[32]

El formato de subasta más estudiado con valores privados y bienes heterogéneos es la versión diseñada por Clarke (1971) y Groves (1973) y que normalmente se conoce "Subasta VCG". (Vickrey - Clarke -Groves). Esta es una subasta muy general que mantiene las propiedades de la subasta de sobre cerrado de segundo precio. A cada postor se le solicita ofertas por cada una de las posibles particiones del conjunto de objetos a subastar. El proceso de búsqueda de ganadores requiere buscar una asignación (repartición de objetos entre los N postores) $x = (x_i)_{i=1,\ldots,N}$ eficiente tal que

$$x = \arg\max \sum_{\bar{P}} v^P$$

de manera que los paquetes se asignen a los postores con la suma más alta de valoraciones por los objetos que los componen. Cada postor ganador paga un monto igual a la externalidad que impone sobre los demás participantes, es decir, el precio que paga un postor ganador es el que hubiera pagado aquel postor perdedor que le seguía en el ranking de ofertas si el primero no estuviese presente en la subasta. El mecanismo VCG puede ser utilizado tanto con bienes homogéneos como con bienes heterogéneos, y con agentes con demanda unitaria o no unitaria. Con valoraciones privadas, presentar ofertas iguales a la valoración es una estrategia débilmente dominante para cada participante. Esto resulta en un equilibrio eficiente. Sin embargo, la eficiencia se pierde cuando se pasa al contexto de valoraciones interdependientes.

Milgrom (2004) advierte dos desventajas de este formato. La primera es que realizar ofertas en este tipo de subastas puede ser extremadamente complejo debido al altísimo número de

[32] Requerir que los agentes expresen sus preferencias sobre todos los paquetes de objetos puede ser muy exigente y en la práctica se deben implementar alternativas más sencillas. Para un análisis más profundo de las subastas que permiten la presentación de propuestas por combinaciones de objetos, también conocidas como subastas combinatorias, se sugiere la lectura de Cramton, Shoham y Steinberg (2006).

combinaciones de objetos sobre las cuales se deben presentar ofertas. La segunda es que existe cierto sesgo en favor de postores que adquieren paquetes grandes, lo cual a su vez aumenta los incentivos para colusión entre postores. Propone el uso de la subasta simultánea ascendente, cuyos resultados son eficientes cuando los bienes son similares y cada participante sólo demanda una unidad. Cabe señalar, sin embargo, que si los bienes son diferentes y hay complementaridad o sinergias, el resultado de esta subasta es ineficiente.[33]

La subasta ascendente de Ausubel para bienes heterogéneos fue propuesta por Ausubel (2006) para el caso de *valoraciones privadas*. En esta subasta se tiene L diferentes tipos de objetos. La oferta total del vendedor consiste en una determinada cantidad, $\hat{q}^l$, de cada objeto $l = 1, \ldots, L$. Se tiene, por tanto, en total $K = \sum_{l=1}^{L} \hat{q}^l$ unidades en venta. El vendedor inicia la subasta anunciando un vector de precios $p = (p^1, \ldots, p^L) \in \mathbb{R}_+^L$. Cada participante $i \in \bar{I}$ observa este vector de precios y anuncia su vector de demandas $x_i(p) \in \mathbb{R}_+^L$. Con esta información, el vendedor calcula los excesos de demanda de cada bien, $\sum_{i=1}^{N} x_i^l(p) - \hat{q}^l$. Si hay un exceso de demanda para el bien l, entonces en la siguiente ronda se eleva el precio de dicho bien. En cada ronda y para cada agente, se calcula el vector de demandas de sus competidores, $X_{-i}(p) = [x_{-i}^1(p), \ldots, x_{-i}^L(p)] = \sum_{j \neq i} x_j(p) \in \mathbb{R}_+^L$. Este vector indica cuál es la suma de cantidades demandadas de cada bien por todos los participantes excepto i. Los objetos son asignados de la siguiente manera. Al pasar de una etapa a otra, el jugador i recibe un número de unidades del bien l igual al cambio en la demanda de sus competidores por ese bien. Es decir, si se denota el vector de precios de la etapa $t-1$ como p_{t-1} y el vector de precios de la etapa t como p_t, el agente i gana $x_{-i}^l(p_t) - x_{-i}^l(p_{t-1})$ unidades del bien l.[34] El proceso de ajuste de precios, similar al mecanismo que utilizaría un subastador walrasiano, se repite hasta que el exceso de demanda de cada bien sea nulo. Cada participante paga por cada unidad de cada tipo de bien el precio vigente en el momento en que la ganó. Por lo tanto, los precios pagados no son necesariamente iguales a los precios de cierre. Ausubel (2006) demuestra que cuando las valoraciones son privadas, esta subasta no presenta problemas de reducción de demanda y es eficiente.

[33] La subasta Clock-Proxy propuesta por Ausubel, Cramton y Milgrom (2006) es similar al mecanismo VGC salvo por el hecho que se realiza en rondas. Es eficiente y reduce los incentivos a la colusión, aunque mantiene la complejidad en la elaboración de ofertas. Otra subasta alternativa es la subasta ascendente con oferta por paquetes (combinatoria), cuya eficiencia es estudiada en Ausubel y Milgrom (2002).

[34] A diferencia de Ausubel (2004), en la subasta de Ausubel (2006) se permite que un participante pierda las unidades previamente ganadas. En particular, si para el postor i, al pasar del vector de precios p_{t-1} a p_t, existe algún bien l para el cual $x_{-i}^l(p_t) - x_{-i}^l(p_{t-1}) < 0$, entonces se debita en la cuenta de dicho participante el número de unidades correspondiente a la reducción de la demanda de sus oponentes.

El siguiente ejemplo ilustra el funcionamiento de la subasta. Supóngase que el vendedor tiene $L = 2$ tipos de objetos en venta y que la cantidad disponible de cada tipo de bien es $\hat{q}^1 = \hat{q}^2 = 6$ unidades. El número de postores es $N = 3$. El siguiente cuadro muestra los precios, la cantidad demandada de cada bien por cada participante, y la demanda total. Los precios iniciales de la subasta son $p_0 = (p_0^1, p_0^2) = (1, 2)$. A esos precios, hay un exceso de demanda por ambos bienes. Por lo tanto, en la siguiente etapa el vendedor eleva los precios a $p_1 = (p_1^1, p_1^2) = (2, 3)$ y los agentes reportan sus cantidades demandadas correspondientes. El proceso continúa hasta que la cantidad demandada de cada bien sea igual a la cantidad disponible para venta.

Etapa	**Precios**		**Demandas individuales**						**Demanda agregada**	
t	p_t^1	p_t^2	$x_1^1(p_t)$	$x_1^2(p_t)$	$x_2^1(p_t)$	$x_2^2(p_t)$	$x_3^1(p_t)$	$x_3^2(p_t)$	$\sum_{i=1}^3 x_i^1(p)$	$\sum_{i=1}^3 x_i^2(p)$
0	1	2	3	4	4	2	2	3	9	9
1	2	3	2	4	4	2	2	2	8	8
2	3	4	1	3	3	2	2	2	6	8
3	3	5	1	2	3	2	2	2	6	7

El siguiente cuadro muestra, para cada participante y para cada etapa, las cantidades demandadas por sus competidores. Estas cifras se utilizan para la determinación del número de unidades ganadas por cada agente en cada etapa. Por ejemplo, en la etapa 1, la demanda por el bien 1 de los oponentes del agente 1 no varía respecto a la etapa previa. Por lo tanto, en $t = 1$ este agente no gana ninguna unidad del bien 1. Sin embargo, para el bien 2, la cantidad demandada por los competidores del agente 1 pasa de $x_{-1}^2(p_0) = 5$ a $x_{-1}^2(p_1) = 4$, con lo que se "libera" una unidad, la misma que es asignada al agente 1 al precio vigente en ese momento, $p_1^2 = 3$. Este cálculo se repite para todos los participantes en todas las etapas.

	Demanda de competidores					
Etapa	**Del Agente 1**		**Del Agente 2**		**Del Agente 3**	
t	$x_{-1}^1(p_t)$	$x_{-1}^2(p_t)$	$x_{-2}^1(p_t)$	$x_{-2}^2(p_t)$	$x_{-3}^1(p_t)$	$x_{-3}^2(p_t)$
0	6	5	5	7	7	6
1	6	4	4	6	6	6
2	5	4	3	5	4	5
3	5	4	3	4	4	4

A continuación se muestra el resultado final de la subasta. El agente 1 obtiene una unidad de cada bien, el agente 2 obtiene 2 unidades del bien 1 y 3 unidades del bien 2, y el agente 3

obtiene 3 unidades del bien 1 y 2 unidades del bien 2. El monto que cada participante paga por cada bien es la suma de lo que paga en cada etapa.

	Unidades asignadas						**Monto pagado**					
Etapa	**Agente 1**		**Agente 2**		**Agente 3**		**Agente 1**		**Agente 2**		**Agente 3**	
t	$l=1$	$l=2$	$l=1$	$l=2$	$l=1$	$l=2$	$l=1$	$l=2$	$l=1$	$l=2$	$l=1$	$l=2$
1	0	1	1	1	1	0	0	3	2	3	2	0
2	1	0	1	1	2	1	3	0	3	4	6	4
3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	5	0	5
Total	**1**	**1**	**2**	**3**	**3**	**2**	**3**	**3**	**5**	**12**	**8**	**9**

Dasgupta y Maskin (2000) presentan una generalización de la subasta de Vickrey para K objetos (homogéneos o heterogéneos) en el contexto de *valoraciones interdependientes*. En la subasta propuesta, se solicita a cada comprador una oferta contingente en las valoraciones de los demás. Por ejemplo, si N=2, sea $V_i \subseteq \mathbb{R}^K$ el espacio de valoraciones del jugador i, para $i = 1, 2$. A cada agente se le solicita una función. $b_i : V_j \longrightarrow \mathbb{R}^K$. Este tipo de oferta permite brindar a los participantes una oportunidad para anunciar sus interdependencias y utilizar esta información estratégicamente. El ganador paga la oferta más baja para la cual aún ganaría la subasta, dada la función de oferta contigente de su oponente. En equilibro, si las señales son unidimensionales, cada agente presenta ofertas contingentes tales que, para cualquier señal, se cumple $b_i^k = v_i^k$, para todo bien k. Por lo tanto, cuando la señal es propiamente unidimesional, o cuando el componente de información privada de cada jugador puede resumirse en una señal unidimensional,[35] la subasta propuesta es eficiente. Como se indicó previamente, en general no es posible que una subasta sea eficiente con valores interdependientes y señales multidimensionales. En este caso, la subasta de Dasgupta y Maskin (2002) es eficiente en sentido restringido; es decir, la subasta propuesta alcanza el segundo mejor, en lugar del primer mejor.[36]

El siguiente cuadro organiza los principales aportes para el caso de agentes con demanda múltiple. Para valores privados, Lawrence Ausubel presenta subastas dinámicas eficientes, para bienes homogénos (Ausubel, 2004) y para bienes heterogéneos (Ausubel, 2006). Para el vaso de valores comunes, las propuestas de Perry y Reny (2002 y 2005) y Dasgupta y Maskin (2000) conducen a asignaciones eficientes en el caso de bienes homogéneos. Asimismo, Dasgupta y Maskin

[35] Es posible que cada comprador reciba una señal multidimensional, pero mientras esta señal no esté correlacionada con las señales que reciben otros agentes, la situación se puede modelar con señales unidimensionales. Formalmente, Dasgupta y Maskin (2002) requieren independencia condicional de las señales multidimensionales.

[36] Es decir, "incentivo-eficiente", en términos de Holmstrom y Myerson (1983).

(2000) presentan una subasta estática para valores comunes y bienes heterogéneos. Como se ha mencionado, cuando las señales son multidimensionales, en general no es posible alcanzar resultados eficientes (Jehiel y Moldovanu, 2001). Se desconoce aún una subasta dinámica eficiente para bienes heterogéneos en el contexto de valores interdependientes.

	Valores Privados	Valores Interdependientes
Bienes Homogéneos	Ausubel (2004), ascendente	Dasgupta y Maskin (2000), estática
		Perry y Reny (2002), dos etapas
		Perry y Reny (2002), ascendente
Bienes Heterogéneos	Ausubel (2004), ascendente	Dasgupta y Maskin (2000), estática
		Resultados de imposibilidad
		Dasgupta y Maskin (2000)
		Jehiel y Moldovanu (2001)

6. Eficiencia en la práctica.

Una lectura atenta de la literatura indicaría que se conocen los límites en cuanto a la eficiencia que se puede alcanzar si se utilizan subastas para asignar múltiples bienes, al menos en teoría. Teniendo esto en cuenta, recientemente se han comenzado a observar estudios, que con un propósito netamente empírico, intentan explorar el dominio de validez de los avances teóricos. De acuerdo al enfoque metodológico utilizado, esta literatura se puede dividir en experimental y econométrica.[37]

Resultados experimentales

Cuando se realizan experimentos, se definen los jugadores, los espacios de valoraciones posibles y las reglas de la subasta. A continuación se calcula el equilibrio y la asignación resultante. Luego se evalúa el bienestar teórico utilizando una función de bienestar social evaluada en la asignación de equilibrio. Los experimentos involucran múltiples repeticiones, y en cada una se observa un resultado. Cada resultado se evalúa con la misma función de bienestar social. La medida de eficiencia se define usualmente como el número de veces que se alcanza en la práctica la asignación teóricamente eficiente, dividida entre el total de repeticiones realizadas.

[37] Como toda producción científica en sus primeros años, una proporción significativa de los resultados empíricos para subastas múltiples son considerados como preliminares.

Los primeros resultados experimentales que comparan subastas estáticas con subastas dinámicas que llevan a las mismas asignaciones tienden a mostrar mejores resultados en términos de eficiencia para las subastas dinámicas. Esto se puede explicar por la mayor claridad con la que los agentes identifican su estrategia dominante en la versión dinámica. Kagel y Levin (2001) presentan resultados experimentales en los que comparan la subasta de precio uniforme con la subasta de Ausubel (2004).[38] Encuentran que esta última supera a la primera en términos de eficiencia en un contexto de valores privados, bienes homogéneos y postores que demandan más de una unidad, lo cual es consistente con los resultados teóricos, en vista de que la subasta de Ausubel es la versión dinámica (ascendente) de la subasta múltiple de Vickrey. Los experimentos consisten en subastas de $K = 2$ objetos entre $N \in \{4, 6\}$ agentes, entre los que se incluye una persona que demanda dos unidades (con un valor marginal constante para ambas) y 3 o 5 computadoras que hacen las veces de sus competidores y demandan una unidad del bien. Los resultados evidencian reducción de demanda en la subasta de precio uniforme. La eficiencia empírica de la subasta de Ausubel alcanza el 99 por ciento, en relación a la eficiencia teórica de 100 por ciento. Otros estudios experimentales como Kagel, Kinross y Levin (2001) y Engelmann y Grimm (2004) llegan a conclusiones similares.

Manelli, Sefton y Wilner (2006) comparan experimentalmente la subasta múltiple de Vickrey con la subasta de Ausubel (2004) en el contexto de bienes homogéneos, tanto para el caso de valoraciones privadas como para valoraciones comunes. En ambos casos, se consideran señales discretas en el espacio $\{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$. En cada experimento se subastan $K = 3$ objetos idénticos entre $N = 3$ agentes. A cada participante se le entrega una señal que le sirve para calcular su valoración marginal por cada objeto. La distribución de valoraciones es tal que las dos primeras unidades ganadas por un agente tienen el mismo valor positivo (el cual varía según el contexto de valores privados o valores comunes) y la tercera unidad tiene un valor marginal de cero. Por lo tanto, se espera que cada agente demande a lo más dos objetos. Cada grupo de tres participantes juega ya sea en una subasta de Vickrey o en una subasta de Ausubel.

Un resultado interesante es que los participantes presentan ofertas mucho mayores a su valoración (*overbidding*). Este fenómeno ocurre tanto con valores privados como con valores comunes, y es de mayor magnitud en la subasta de Vickrey que en la subasta de Ausubel. Por este motivo, la subasta de Vickrey tiende a generar un ingreso esperado más alto para el vendedor. La eficiencia se mide como la proporción de ganancias del intercambio realizadas con respecto a las ganancias potenciales, las mismas que se calculan de acuerdo al equilibrio teórico

[38] Los autores citan una versión previa del artículo de L. Ausubel publicada en 1997.

de la subasta. Ambas subastas muestran altos niveles de eficiencia (superiores al 85 por ciento), tanto para valores comunes como para valores privados. Otro resultado de interés es que en ambas subastas se encontraron casos de participantes que obtuvieron tres unidades en lugar de su demanda teórica máxima de dos. Este fenómeno resultó más frecuente en la subasta de Ausubel.

Sin embargo, los resultados son sensibles a cambios en el soporte de la distribución de valoraciones y las reglas para resolver empates. Por ejemplo, cuando se cambia el espacio de señales de $\{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$ a $\{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$ y se permite resolver empates mediante sorteo, se obtiene menos sobreoferta en ambas subastas (y consecuentemente, menos ingreso esperado para el vendedor). En esta variante, la subasta de Vickrey muestra mayor eficiencia que la subasta de Ausubel (y menor ingreso esperado), sugiriendo un *trade off* entre ingreso esperado y eficiencia.

Estimaciones Econométricas

Hendricks y Porter (1988) presentan uno de los primeros análisis empíricos de subastas, enfocándose en una aplicación de la subasta de sobre cerrado de primer precio. Encuentran evidencia de comportamiento estratégico en los compradores, acorde con lo predicho por el equilibrio bayesiano de Nash de esta subasta. Recientemente han surgido varios estudios econométricos relacionados con la estimación de las valoraciones en subastas, las mismas que son variables no observables. En general esta literatura está relacionada con la formación de precios hedónicos y la mayor parte de los estudios se ubican dentro del contexto de valores privados. Haile y Tamer (2003) analizan la distribución de valoraciones basándose en los precios observados y un conjunto de restricciones de consistencia resultantes de un modelo de elección racional. En Rezende (2005) las valoraciones se estiman mediante una regresión de los precios de las transacciones contra un vector de variables explicativas, entre las que se incluye el número de postores. La eficiencia se juzga a partir de la diferencia entre los precios de venta observados en la subasta real y las valoraciones estimadas.

Otros estudios han explorado el caso de valores comunes. Hendricks, Pinkse y Porter (2003) estiman la magnitud de la maldición del ganador en un modelo con valoraciones comunes. Haile, Hong y Shum (2003) presentan pruebas no paramétricas diseñadas con la finalidad de distinguir, en un contexto de valores afiliados, si las ofertas presentadas en subastas de sobre cerrado de primer precio corresponden a valores privados o valores comunes. El elemento que distingue ambas situaciones es la maldición del ganador, que sólo ocurre con valores comunes. Cabe indicar que los tests realizados requieren suponer que los jugadores adoptan sus estrategias de equilibrio. Athey y Haile (2006) ofrecen una revisión de la literatura reciente sobre el tema.

Universidad de San Andrés

Para subastas de múltiples bienes homogéneos y agentes que demanda más de una unidad, algunos estudios econométricos han analizado las colocaciones de bonos del gobierno. En algunos países se utiliza las subasta discriminatoria, en tanto que en otros se utiliza la subasta de precio uniforme. Hortaçsu (2002) estudia las ventas de bonos del Tesoro en Turquía, realizadas mediante subastas discriminatorias de sobre cerrado. Según las normas de estas subastas, la cantidad de bonos en venta es incierta, y cada agente puede presentar un número ilimitado de propuestas, consistentes en pares de precio y cantidad demandada. Dado que se dispone de datos de varias propuestas por agente en cada subasta, los datos permiten identificar evidencia de que las curvas de demanda individuales son lineales, del tipo $p_{itj} = \alpha_{it} + \beta_{itj} q_{itj}$, con $\beta_{itj} < 0$, donde (p_{itj}, q_{itj}) es el $j-$ésimo par (precio,cantidad) demandado por el agente i en la subasta t. El trabajo presenta dos modelos teóricos para un bien perfectamente divisible, con el fin de explicar estos resultados: uno con valores privados y agentes aversos al riesgo, y otro con valores afiliados y agentes neutrales al riesgo. No obstante, ninguno de los modelos explica el alto grado de heterogeneidad de las pendientes de las curvas de demanda individuales, β_{itj}, que se observa en los datos. Respecto a la eficiencia, ambos modelos predicen que el fenómeno de reducción de demanda es mayor cuanto mayor sea la incertidumbre respecto al monto de bonos en venta. Esta conclusión es respaldada por los datos. Se puede considerar como una tarea pendiente la evaluación en otros contextos del efecto que tienen sobre la eficiencia: *(i)* la incertidumbre sobre la cantidad vendida y *(ii)* los límites al número de propuestas por participante.

Como se ha mencionado, en teoría, cuando los bienes son divisibles y los agentes tienen demanda multi-unidad, las subastas discriminatoria y de precio uniforme son ineficientes, pero no se puede establecer un ranking entre ambas. En Corea las subastas de bonos del Tesoro se han realizado siguiendo ambos formatos, con los mismos participantes. Esta situación crea una oportunidad para comparar la eficiencia entre ambas. Para ello, Kang y Puller (2008) extienden el modelo teórico de subastas discriminatorias con valores privados presentado por Hortaçsu (2002) para el caso de subastas de precio uniforme. Los autores estiman las valoraciones de los agentes en base a sus propuestas, y luego calculan si en el resultado de las subastas, los bonos se asignan a los postores con la mayor valoración. Los resultados indican que las pérdidas de eficiencia en ambos tipos de subasta son poco significativos, aunque la eficiencia es ligeramente mayor en la subasta discriminatoria.

Uno de los supuestos básicos para identificar las valoraciones a partir de las propuestas observadas es que los agentes utilizan estrategias de mejor respuesta resultantes de un problema de optimización. Este supuesto es evaluado por Champman, McAdamns y Paarsch (2005), utilizando las subastas de instrumentos de control de liquidez del Banco Central de Canadá. A

Universidad de San Andrés

diferencia de las subastas estudiadas por Hortaçsu (2002), el marco institucional en este caso sólo permite hasta cuatro propuestas de precio y cantidad por agente. Los autores utilizan un modelo de subastas discriminatorias de sobre cerrado, con objetos homogéneos, y agentes neutrales al riesgo, con demandas multi-unidad y valores privados. La metodología empírica está inspirada en Haile y Tamer (2003), e incorpora, además, cotas en la distribución de valoraciones. Los autores encuentran que las desviaciones de las propuestas observadas respecto a las predicciones teóricas, basadas en un comportamiento optimizador, si bien existen, representan sólo un pequeño costo económico para los agentes.

Para objetos heterogéneos, son muy pocos los estudios econométricos. Por ejemplo, Brendstrup y Paarsch (2007) estudian una subasta inglesa con $K = 2$ objetos heterogéneos en el contexto de valores privados, en una aplicación a subastas de pescado en Dinamarca. el estudio requiere estimar la distribución conjunta por las valoraciones de ambos objetos. Si bien los autores no analizan la eficiencia, la distribución empirica de las valoreaciones sugiere que en el contexto analizado, los ingresos esperados del vendedor son mayores cuando se venden los objetos por separado

7. Comentarios finales

En el presente documento se ha revisado la literatura teórica sobre eficiencia de subastas de varios objetos. Este es un campo que está recibiendo creciente interés, tanto por los desafíos teóricos que implica, como por sus aplicaciones prácticas. El objetivo de los estudios teóricos es identificar las mejores formas de subastar varios objetos, de manera tal que se alcancen asignaciones eficientes. Cuando existen pocos compradores potenciales, cada uno puede ejercer poder de mercado. La eficiencia requiere dar incentivos para que los agentes se comporten competitivamente y actúen como precio aceptantes. La manera de hacerlo varía dependiendo del supuesto acerca de las valoraciones de los compradores. Cuando las valoraciones son privadas, es decir, cuando cada agente define su valoración únicamente en función a las señales que recibe, el mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves induce a todos los agentes a revelar su verdadera valoración. Esto se logra con una regla que establece que cada agente pague un monto equivalente a la externalidad que su presencia en la subasta genera sobre los demás. Con ello, en equilibrio se alcanza una asignación eficiente. Sin embargo, cuando las valoraciones son interdependientes, este mecanismo no asegura que los agentes revelen su información privada, con lo cual no se garantiza un equilibrio con una asignación eficiente. En tal caso, se puede recurrir a la subasta estática de Dasgupta y Maskin (2000), o las subastas de Perry y Reny (2002 y 2005).

En el plano teórico, las principales dificultades a futuro tienen que ver con la simetría en

QUAERERE VERUM Universidad de San Andrés

la distribución de valoraciones. Las eficiencia de las subastas propuestas asume que todos los participantes comparten la misma distribución de valoraciones. Para subastas de un solo objeto, cuando no se cumple este supuesto los equilibrios alcanzados no son eficientes. Para el caso de subastas de varios objetos, resta analizar si conceptos más restringidos de eficiencia pueden permitir alcanzar un *second best* con cierta probabilidad positiva.

La evaluación de la eficiencia de las subastas debe hacerse también teniendo en cuenta los resultados empíricos. La literatura sobre experimentos en subastas tiende a favorecer a los formatos dinámicos en cuanto a eficiencia se refiere. Incluso para el caso de valores privados, dado que el mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves es estático, se han buscado subastas dinámicas eficientes. Las subastas dinámicas propuestas por Ausubel (2004 y 2006) permiten alcanzar asignaciones eficientes cuando se trata de valores privados. Para el caso de valoraciones interdependientes, se cuenta con la subasta dinámica de Perry y Reny (2005), que alcanza asignaciones eficientes en equilibrio. Sin embargo, el desempeño en la práctica de las subastas propuestas por Dasgupta y Maskin (2000), y Perry y Reny (2002 y 2005) aún debe ser estudiado, complementando experimentos con estudios de casos.

Recientemente se han realizado algunos estudios econométricos que estiman las valoraciones a partir de las propuestas. Luego, a partir de las valoraciones estimadas, se evalúa la eficiencia de las subastas. Si bien los resultados de los estudios revisados no sugieren importantes pérdidas de eficiencia en las subastas discriminatoria y de precio uniforme, las estimaciones requieren algunos supuestos de identificación. La agenda pendiente en la literatura incluye estudiar la sensibilidad de los resultados a a dos supuestos en particular: un número exógeno de participantes (la endogeneidad de N podría sesgar los resultados), así como el supuesto de valoraciones privadas. Es posible que en los próximos años se vaya cerrando la brecha entre el avance teórico y los estudios empíricos de subastas.

Universidad de San Andrés

Referencias

[1] Armstrong, M. (2000), "Optimal Multi-Object Auctions", *Review of Economic Studies*, 67 (3), 455-481.

[2] Athey, S. y P. Haile (2006), "Empirical Models of Auctions", en R. Blundell, W. Newey y T. (eds.), Advances in Economics and Econometrics, Theory and Applications: Ninth World Congress, Vol. II, Cambridge University Press.

[3] Ausubel, L. (2004), "An Efficient Ascending-Bid Auction for Multiple Objects", *American Economic Review*, 94 (5), 1452-1475.

[4] Ausubel, L. (2006), "An Efficient Dynamic Auction for Heterogeneous Commodities", *American Economic Review*, 96 (3), 602-629.

[5] Ausubel, L. y P. Cramton (1999), "The Optimality of Being Efficient", mimeo, University of Maryland.

[6] Ausubel, L. y P. Cramton (2002), "Demand Reduction and Inefficiency in Multi-Unit Auctions", mimeo, University of Maryland.

[7] Ausubel, L., P. Cramton y P. Milgrom (2006), "The Clock-Proxy Auction: A Practical Combinatorial Auction Design", en P. Cramton, Y. Shoham, y R. Steinberg (eds.), Combinatorial Auctions, MIT Press, Cap. 5, 115-138.

[8] Ausubel, L. y P. Milgrom (2002), "Ascending Auctions with Package Bidding", *Frontiers of Theoretical Economics*, 1 (1), 42.

[9] Avery, C., y T. Hendershott (2000), "Bundling and Optimal Auctions of Multiple Products", *Review of Economic Studies*, 67 (3), 483-497.

[10] Back, K. y J.F. Zender (1993), "Auctions of Divisible Goods", *Review of Financial Studies*, 6, 733-764.

[11] Brendstrup, B. y H. J. Paarsch (2007), "Semiparametric identification and estimation in multi-object, English auctions", *Journal of Econometrics*, 141 (1), 84-108.

[12] Bower, J. y D. Bunn (2001), "Experimental analysis of the efficiency of uniform-price versus discriminatory auctions in the England and Wales electricity market", *Journal of Economic Dynamics & Control*, 25, 561-592.

[13] Chapman, J., D. McAdams y H. Paarsch (2005), "Multi-Unit, Sealed-Bid, Discriminatory-Price Auctions", mimeo, University of Iowa.

[14] Clarke, E. (1971), "Multipart Pricing of Public Goods", Public Choice, 11 (1), 17–33.

[15] Cramton, P., Y. Shoham, y R. Steinberg (2006), Combinatorial Auctions, MIT Press.

[16] Dasgupta y Maskin (2000), "Efficient auctions", *Quarterly Journal of Economics*, 115 (2), 341-388.

Universidad de San Andrés

[17] Dubra, J., Echenique, F. y Manelli, A. (2009), "English Auctions and the Stolper-Samuelson Theorem", *Journal of Economic Theory*, 144 (2), 825-849.

[18] Engelmann, D. y V. Grimm (2004), "Bidding Behavior In Multi-Unit Auctions - An Experimental Investigation And Some Theoretical Insights", Working Papers. Serie AD 2004-12, Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas.

[19] Groves, T. (1973), "Incentives in Teams", *Econometrica*, 41, 617-631.

[20] Haile, P. A., H, Hong y M. Shum (2003), "Nonparametric Tests for Common Values in First-Price Sealed-Bid Auctions", Cowles Foundation Discussion Papers 1445, Cowles Foundation, Yale University.

[21] Haile, P. y E. Tamer (2003), "Inference with an Incomplete Model of English Auctions", *Journal of Political Economy*, 111 (1), 1–51.

[22] Harsanyi, J. (1967), "Games with incomplete information played by Bayesian players". Management Science 14.

[23] Hendricks, K., J. Pinkse y R. H. Porter (2003), "Empirical Implications of Equilibrium Bidding in First–Price, Symmetric, Common Value Auctions", *Review of Economic Studies*, 70 (1), 115-145.

[24] Hendricks, K. y R.H. Porter (1988), "An Empirical Study of an Auction with Asymmetric Information", *American Economic Review*, 78 (5), 865-883.

[25] Holmström, B. y Myerson, R.(1983), "Efficient and Durable Decision Rules with Incomplete Information". *Econometrica*, 51 (6), 1799-1819.

[26] Hortaçsu, A. (2002), "Bidding Behavior in Divisible Good Auctions: Theory and Evidence from the Turkish Treasury Auction Market", mimeo, Stanford University.

[27] Jehiel, P., M. Meyer-ter-Vehn y B. Moldovanu (2007), "Mixed bundling auctions", *Journal of Economic Theory*, 134 (1), 494-512

[28] Jehiel, P. y B. Moldovanu (2001), "Efficient Design with Interdependent Valuations, *Econometrica*, 69 (5), 1237-1259.

[29] Kagel, J.H., S. Kinross, S. y D. Levin, (2004), "Implementing Efficient Multi-Object Auction Institutions: An Experimental Study of the Performance of Boundedly Rational Agents", Mimeo, Ohio State University.

Universidad de San Andrés

[30] Kagel, J.H., y D. Levin (2001), "Behavior in multi-unit demand auctions: experiments with uniform price and dynamic Vickrey auctions", *Econometrica,* 69 (2), 413-454.

[31] Kang, B. y S. Puller (2008), "The effect of auction format on efficiency and revenue in divisible goods auctions: a test using Korean treasury auctions", *Journal of Industrial Economics*, 56, 290-332.

[32] Klemperer, P. (2004), "Auctions: Theory and Practice", Princeton University Press.

[33] Krishna, V. (2002), "Auction Theory", Academic Press.

[34] Kumru, C. y H. Yektas (2008), "Optimal Multi-Object Auctions with Risk Averse Buyers", Australian School of Business Research Paper No. 2008 Econ 03.

[35] Li, T., I. Perrigne y Q. Vuong (2000), "Conditionally Independent Private Information in OCS Wildcat Auctions", *Journal of Econometrics*, 98 (1), 129-161.

[36] Manelli, A., M. Sefton y B. Wilner (2006), "Multi-unit auctions: A comparison of static and dynamic mechanisms", *Journal of Economic Behavior & Organization*, 61, 304–323.

[37] Manelli, A. y D. Vincent (2008), "Bayesian and Dominant Strategy Implementation in the Independent Private Values Model", Working Paper.

[38] Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green (1995), "Microeconomic Theory", Oxford University Press.

[39] Maskin, E.S. (1992), "Auctions and Privatization", en H. Siebert (ed), Privatization: Symposium in Honor of Herbert Giersch. Tubingen: Mohr (Siebek), 115-136.

[40] Maskin, E.S. y J.G. Riley (1984), "Optimal Auctions with Risk Averse Buyers", *Econometrica*, 52 (6), 1473-1518.

[41] Maskin, E.S. y J.G. Riley (2000), "Asymmetric Auctions", *Review of Economic Studies*, 67 (3), 413-438.

[42] Menicucci, D. (2003), "Optimal two-object auctions with synergies", *Review of Economic Design,* 8, 143–164.

[43] Milgrom, P.R. (2004), "Putting Auction Theory to Work", Cambridge, UK, Cambridge University Press.

[44] Milgrom, P.R y N. Stokey (1982), "Information, Trade, and Common Knowledge", *Journal of Economic Theory*, 26 (1), 17-27.

Universidad de San Andrés

[45] Milgrom, P. y R. J. Weber (1982), "A Theory of Auctions and Competitive Bidding", *Econometrica*, 50 (5), 1089-1122.

[46] Myerson, R.B. (1981), "Optimal Auction Design", Mathematics of Operations Research, 6, 58–73.

[47] Palfrey, T. (1983), "Bundling Decisions by a Multiproduct Monopolist with Incomplete Information", *Econometrica*, 51 (2), 463-483.

[48] Perry, M. y P. Reny (2002), "An Efficient Auction", *Econometrica*, Vol. 70 (3), 1199-1212.

[49] Perry, M. y P. Reny (2005), "An Efficient Multi-Unit Ascending Auction", *Review of Economic Studies*, 72 (2), 567-592.

[50] Swinkels, J. (1999), "Asymptotic Efficiency for Discriminatory Private Value Auctions", *Review of Economic Studies*, 66 (3), 509-528.

[51] Rezende, L. (2005), "Auction Econometrics by Least Squares", mimeo, University of Illinois.

[52] Riley, J.G. y W.F. Samuelson (1981), "Optimal Auctions", *American Economic Review*, 71 (3), 381-392.

[53] Vickrey, W. (1961), "Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders". *Journal of Finance*, 16 (1), 8-37.

[54] Vries, S. y Vohra, R. (2003), "Combinatorial Auctions: A Survey", *Journal on Computing*; 15 (3), 284-309.

[55] Weber, R. (1983), "Multiple-object auctions", en Engelbrecht-Wiggans R., Shubik, M. y Stark, R. (eds.): "Auctions, bidding and contracting: uses and theory", New York University Press, 165-191.

[56] Wilson, R. (1978), "Information, Efficiency and the Core of an Economy", *Econometrica*, 46 (4), 807-816.

[57] Wilson, R. (1979), "Auctions of shares", *Quarterly Journal of Economics*, 93 (4), 675–689.

QUAERERE VERUM
Universidad de SanAndrés