

**Teoría de Valores Extremos (EVT) y grandes  
crisis financieras**

**Mercados emergentes vs. desarrollados**

**Víctor Adrián Álvarez y Adrián Fernando Rossignolo**

**D.T.: N° 62**

**Departamento Académico de Administración de Empresas**

**DICIEMBRE 2010**

## ÍNDICE

<b>Prefacio</b>	3
<b>Resumen</b>	4
<b>1 Introducción</b>	5
<b>2 Marco Teórico</b>	
2.1. Definición y Concepto de Valor en Riesgo (VaR)	9
2.2.1. Aproximación no-paramétrica: Simulación Histórica (HS)	12
2.2.2. Algunos modelos paramétricos de volatilidad condicionada	12
2.2.3. Un modelo híbrido: Teoría de Valores Extremos	13
2.2.3.1. Síntesis de sus Fundamentos Teóricos	13
2.2.3.2. Identificación del umbral “u” y ajuste del modelo GPD a los excesos	16
2.2.3.3. EVT Condicionado o Dinámico	21
<b>3 Metodología</b>	22
<b>4. Contrastación empírica</b>	
4.1. Datos	26
4.2. Parámetros del modelo	28
4.3. Pronósticos del VaR	34
4.4. Efectos en la Regulación del Capital	37
4.5. Niveles del VaR	42
<b>5. Conclusiones</b>	45
<b>Bibliografía</b>	47
<b>Extreme Value Theory performance in the event of major financial crises</b>	50

## Prefacio

Este trabajo es una extensión con fines pedagógicos de un *paper* actualmente en desarrollo y se realizó a efectos de ser utilizado en el curso de Mercado de Capitales y Selección de Inversiones del Departamento de Administración de Empresas de UdeSA. También será útil en el curso de Bases Actuariales de Inversiones y Financiaciones de la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA.

Los avances de la investigación han sido expuestos por el Actuario Adrián Rossignolo en dos ediciones anteriores del curso y este documento da cuenta de esas exposiciones y agrega algunos elementos técnicos que se estima facilitarán la mejor interpretación del contenido sustancial por parte de los alumnos de grado como así también de todos aquellos interesados que cuenten con conocimientos básicos de finanzas.

El presente documento es uno de los resultados del trabajo realizado en el ámbito de los estudios financieros que lleva a cabo el equipo de investigación coordinado por el Actuario Víctor A. Álvarez, conformado conjuntamente por docentes-investigadores de las universidades de San Andrés (UdeSA) y de Bs. As., Facultad de Ciencias Económicas (FCE-UBA).

Se ofrece al final una versión abreviada en inglés que, mediante la comparación con la escrita en idioma español, facilite al lector el conocimiento bilingüe de los numerosos términos y conceptos técnicos utilizados en el documento.

Diciembre de 2010.

## **Teoría de Valores Extremos (EVT) y grandes crisis financieras Mercados emergentes vs. desarrollados**

### **Resumen**

*Las directivas emitidas por el Comité de Basilea han establecido el Valor en Riesgo (VaR) como la medida oficial para cuantificar el riesgo de mercado. Teniendo en cuenta su amplia gama de aplicaciones a la gestión del riesgo, evaluación de la performance o a la implementación de requisitos regulatorios, y considerando que las instituciones que regula el citado Comité son libres de utilizar sus propias metodologías para el cálculo de esta medida, el desarrollo de técnicas precisas para la estimación del VaR adquiere particular relevancia.*

*La precisión en la estimación del VaR contribuirá a proteger a los participantes del mercado contra las inesperadas alzas y bajas de los mercados financieros, al permitir establecer con mayor exactitud el valor de los activos necesarios para hacer frente a esos eventos. Mientras que la mayoría de las técnicas de estimación pueden lograr ese objetivo para los movimientos financieros habituales, en general son incapaces de responder frente a los movimientos bruscos que tienen lugar durante las crisis. La Teoría de Valores Extremos (EVT) provee un método de estimación del VaR para cuantiles extremos de la distribución de resultados (P&L), focalizándose en circunstancias extraordinarias e inusuales.*

*El objetivo del trabajo es explorar la posibilidad de evaluar empíricamente, en escenarios de crisis financieras, tanto la aptitud del método EVT en comparación con otros métodos de estimación del VaR, como la aplicabilidad de sus conclusiones en relación con los mercados desarrollados y emergentes.*

*Este artículo utiliza EVT para estimar el VaR para diez índices bursátiles (seis de mercados desarrollados y cuatro de emergentes) de dos maneras distintas: EVT incondicionado usando retornos puros brutos y EVT condicionado, que combina el ajuste mediante Cuasi-Máxima-Verosimilitud de los modelos GARCH para estimar la volatilidad dinámica y EVT para aproximar las “colas” de la distribución de los residuos del GARCH (ambas “colas” independientemente). A continuación se evalúa la performance del EVT utilizando datos del período de alta inestabilidad registrada a partir de 2008 comparando, en primer lugar, su desempeño con el de aquellas metodologías más usuales y, en segundo lugar, analizando su aptitud en mercados desarrollados en comparación con sus contrapartes emergentes. Se determina que los métodos basados en EVT pueden ayudar a las instituciones a evitar grandes pérdidas provenientes de desastres del mercado. Un simple ejemplo en la constitución del “Capital Mínimo Regulatorio” exigido por las normas de Basilea ilustra las ventajas del EVT. Por otra parte, en oposición a lo que podría esperarse, no se aprecian diferencias significativas entre mercados desarrollados y emergentes.*

**Palabras clave:** *Valor en Riesgo, Teoría de Valores Extremos, GARCH, Simulación Histórica, Crisis financiera.*

## 1. Introducción

La crisis financiera de 2007-2008 originó serias críticas a los modelos matemáticos y estadísticos usados por las empresas para administrar sus riesgos. Parece evidente que hubo fallas en las prácticas de gerenciamiento de riesgos, pero no está claro que ellas se originen en defectos de los modelos que pretendieron aplicarse. Así, por ejemplo, en un artículo premonitorio de Danielsson, et al (2001) se afirma entre otras cosas que el Comité de Supervisión Bancaria, en su propuesta de lo que luego se denominó Basilea II, se habría equivocado al considerar la endogeneidad del riesgo, concluyendo que el Valor en Riesgo (VaR) puede desestabilizar una economía e inducir *crashes* que de otra forma no ocurrirían. De este modo, habida cuenta de la inconsistencia y el sesgo que los modelos financieros utilizados para pronosticar el riesgo han mostrado en varios casos, el riesgo conjunto a la baja ha resultado claramente subestimado. Donnelly y Embrechts (2010), por su parte, aportan más críticas a la regulación financiera, calificándola de procíclica al postular la factibilidad de exacerbar los potenciales movimientos del mercado.

A mediados de 2004 el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea publicó el documento “Convergencia internacional de medidas y normas de capital. Marco revisado” (“Basilea II”), disponiendo nuevos criterios para la determinación del capital regulatorio de las entidades financieras. Un tiempo después, para la industria del seguro, el Acuerdo Solvencia II, con raíces en el modelo de Basilea II, buscó mejorar la seguridad en el sistema financiero al enfatizar los controles internos de las instituciones así como los modelos y procesos de administración de riesgos, utilizando principalmente modelos estadísticos elaborados con bases de datos históricas de las empresas, a efectos que cada entidad realice una cobertura de sus posibles pérdidas considerando la calidad histórica de su cartera. En síntesis, Solvencia II representa para las entidades aseguradoras lo que Basilea II representa para los bancos.

Basilea II está organizado sobre la base de tres “pilares”, el primero referido a los requisitos mínimos de capital; el segundo respecto del proceso de revisión del supervisor y el tercero sobre disciplina de mercado. A diferencia de su antecesor, el Acuerdo de 1988 (Basilea I), Basilea II tiene una visión más abarcativa del tratamiento de los riesgos que toman las entidades y a la vez brinda mayor flexibilidad al permitir una variedad de enfoques para la medición del capital regulatorio.

Con relación a los requisitos mínimos de capital contenidos en el pilar I, en el año 2007 el Banco Central de la República Argentina (BCRA) dispuso la adopción del Enfoque Estandarizado Simplificado para riesgo crediticio, cuya implementación efectiva debería regir a partir de enero del año 2010, por lo que es de mucho y actual interés el estudio de las mejores prácticas para su exitosa puesta en funcionamiento.

En el mes de septiembre de 2010 el Banco de Pagos Internacionales (BIS) adoptó nuevas reglas para fortalecer la solidez de los bancos en caso de crisis. El plan aprobado, a ser incluido en el futuro Acuerdo de Basilea III, establece entre otras cosas que los bancos deberán elevar el ratio mínimo de los fondos propios ‘duros’ -la parte más sólida de los fondos propios compuesta de acciones y utilidades retenidas-, del 2% actual al 4,5% de los activos. A esto se añade un amortiguador financiero adicional del 2,5%, que lleva el total de capital ‘duro’ al 7%. Adicionalmente, el coeficiente de fondos propios ‘Tier 1’ será incrementado de 4% a 6%. Este paquete de reformas fue avalado en la reunión de

líderes del G20 en noviembre de 2010 en Seúl y entrarán en vigor progresivamente a partir del 1 enero de 2013 para su aplicación en 2015 y su instalación definitiva en 2019. Estas modificaciones, destinadas a evitar un derrumbe del sistema bancario como el ocurrido después de la caída del banco estadounidense Lehman Brothers en 2008, provocaron reacciones en el sector bancario por temor a que estas nuevas directivas le obliguen a constituir sumas muy importantes de capitales suplementarios, evidenciándose una aparente oposición entre el valor para los interesados en la empresa (*stakeholders*) y el del dueño o accionista. Muestra de ello, en el sector del seguro, son las manifestaciones de preocupación por la posibilidad que la futura directiva Basilea III penalice la inversión de la banca en el sector asegurador. En este sentido, una corriente de pensamiento entiende que la banca y el seguro son proclives a evitar un doble uso del capital invertido en los dos sectores, es decir, que un mismo capital sirva para cubrir los dos requerimientos legales, bancarios y aseguradores. Sin embargo el excedente de capital, una vez computadas las coberturas legales, aparentemente debería tener la misma consideración que cualquier otra inversión, como en renta fija o variable, y no penalizar la inversión en entidades aseguradoras.

En ese marco, surge como valiosa la tarea del desarrollo de modelos que faciliten la interpretación de la dinámica de los riesgos en Argentina comparada con otros países, la proyección de variables y la estimación del impacto de políticas y regulaciones así como la elaboración de documentos de investigación empírica y teórica sobre esos temas vinculando la problemática local con la internacional.

Las directivas emitidas por el Comité de Basilea establecieron el Valor en Riesgo (Value-at-Risk, o simplemente VaR) como la medida estándar para cuantificar el riesgo de mercado y, al parecer, la que se establecerá para otros tipos de riesgos como el asegurador y el establecimiento de requerimientos de capital en el negocio del seguro. Teniendo en cuenta la amplia gama de aplicaciones del VaR a la administración de riesgos en general y a la implementación de requisitos regulatorios de las instituciones financieras, y considerando que las instituciones que regula el citado Comité son libres de desarrollar sus propios métodos de estimación, el desarrollo de técnicas adecuadas para la estimación del VaR se transforma en un tema de suma relevancia. Así es que, dado que se han desarrollado múltiples métodos de estimación, está aún en discusión la eficacia práctica de los mismos; como ejemplo puede mencionarse que los métodos que podrían ser aptos para un escenario normal, probablemente no lo sean en un escenario de crisis. Vinculado a esta problemática está el desarrollo de mediciones precisas y pronósticos consistentes de la volatilidad futura del valor de los activos reales o financieros, dado que la volatilidad constituye un factor determinante en la administración del riesgo y el posterior proceso de decisión.

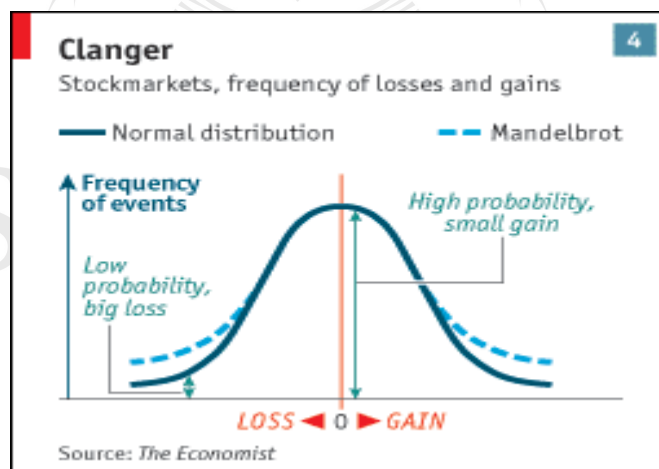
La gestión del riesgo financiero surgió como una disciplina autónoma hacia el final de la década del '60 debido, principalmente, a la extraordinaria expansión de los mercados financieros. Como señala Dowd (2005), el contexto devino en uno de alta volatilidad, exponiendo a los participantes del mercado a altos niveles de riesgo financiero e incentivando a las instituciones a buscar métodos precisos para lidiar con el riesgo de mercado. Luego de la sucesión de desastres de administración del riesgo ocurridos en los '90, los organismos reguladores se abocaron al tema e impusieron a las instituciones financieras el cálculo del VaR para cuantificar los riesgos del mercado.

A pesar de los defectos teóricos señalados por Acerbi and Tasche (2002), el VaR posee una serie de características prácticas útiles (Dowd (2005)) -. Adicionalmente, aún

siendo de uso obligatorio, cada entidad tiene la libre elección del esquema a utilizar para su cálculo, resultando entonces que la estimación adecuada del VaR es materia de mucha importancia por una variedad de razones, que abarcan desde el establecimiento de los requerimientos del capital mínimo hasta su influencia en las decisiones de toma de riesgos.

La mayoría de las técnicas concebidas para la cuantificación del VaR se basan en el supuesto que los retornos financieros siguen una distribución normal. The Economist (2009) menciona que las distribuciones normales ajustan casi perfectamente a los datos empíricos en el medio de la curva (dando cuenta de la mayoría de las ganancias y pérdidas), pero no se desempeñan adecuadamente en las “colas” donde ocurren los eventos extremos: el problema reside en que existe una amplia evidencia que las series temporales financieras son de colas “anchas” y posiblemente “asimétricas” (Rachev, Menn y Fabozzi (2005:1)), confirmando así los hallazgos de Mandelbrot (1963) y Fama (1965). Los eventos extremos son escasos por definición, de allí que sea imposible estimar su frecuencia considerando toda la distribución. En tal sentido, Neftci (2000) afirma que los eventos extremos que producen las colas anchas de la distribución de los retornos tienen, posiblemente, una estructura diferente a la de los asociados a los retornos generados en las condiciones diarias habituales del mercado. Adicionalmente, The Economist (2009) muestra que las fallas en la cuantificación precisa de las colas a un nivel de confianza del 99% o más, darían como resultado desconocer la posibilidad de grandes pérdidas que, sin embargo, deberían ser tenidas en cuenta para una correcta evaluación del riesgo.

La siguiente ilustración, tomada de The Economist (2009) muestra que el principal problema es ignorar el riesgo de las colas:



Manganelli y Engle (2004) clasifican las distintas metodologías que existen para la estimación del VaR en tres grandes categorías: Paramétrica, No-Paramétrica e Híbrida. Cada una abarca distintas técnicas, así por ejemplo *General Autoregressive Conditional Heteroskedastic* (GARCH) pertenece a los modelos paramétricos, mientras que la Simulación Histórica (HS) a los no-paramétricos y la Teoría de Valores Extremos (EVT) a los modelos híbridos. La aplicación de las distintas técnicas para estimar el VaR es un tema muy controversial: así por ejemplo Jackson, Maude y Perraudin (1997) se inclinaron por HS, Bollerslev, Engle y Nelson (1994) recomendaron los modelos GARCH, mientras que Danielsson y de Vries (1997) y McNeil y Frey (1999) avalaron EVT. Sin embargo Beder (1995), aunque no considera EVT, señala que las estimaciones del VaR producidas por distintos métodos pueden presentar enormes diferencias.

El presente documento lleva a cabo una comparación de algunas de las metodologías más difundidas basadas en las diferentes categorías antes mencionadas. El desempeño predictivo de cada modelo está evaluado en diez mercados de capitales (algunos desarrollados y el resto emergentes) y el período de predicción incluye el año 2008 en que comienza la última gran crisis financiera. Las estimaciones del VaR son testeadas siguiendo la metodología de “*backtesting*” recomendada por los Acuerdos de Capital de Basilea así como con el procedimiento “*Unconditional Coverage*” (Christoffersen (2003)), empleando ambas colas de la distribución. El resultado del estudio es cierta evidencia del mejor desempeño de los modelos EVT en este tipo de circunstancias que, en las situaciones de crisis, generalmente se traduce en la suficiencia del capital de las instituciones que emplean este método para calcular el VaR. Surge también que, en oposición a lo que podría esperarse, no aparecen claras diferencias entre mercados desarrollados y emergentes. Sin embargo este trabajo sólo debería ser considerado como exploratorio en lo concerniente al desarrollo del EVT para gestión del riesgo financiero en economías emergentes, ya que la compleja estructura estocástica de los mercados financieros parece justificar una advertencia contra la excesiva confianza en las técnicas de valores extremos (Coles (2001)).



Universidad de  
**San Andrés**



## 2. Marco Teórico

### 2.1. Definición de Valor en Riesgo (VaR)

En el contexto de este trabajo el término “riesgo” puede interpretarse como la pérdida potencial que puede sufrir el valor de un activo, mientras que la medida del riesgo está vinculada a la probabilidad de sufrir esa pérdida.

La “administración del riesgo” hace referencia a un conjunto de métodos y procedimientos destinados a (i) identificar (y clasificar cualitativamente) los riesgos, (ii) medirlos (cuantificar) y (iii) controlarlos (eliminándolos o disminuyéndolos).

Una posible y breve clasificación de los riesgos puede ser la siguiente:

**DE MERCADO:** Pérdida de valor que puede sufrir un activo ante cambios en los valores de las variables que lo determinan (tasas de interés, tipos de cambio, precios de commodities, etc.)

**DE CRÉDITO:** Posible pérdida de valor originada por incumplimiento de las obligaciones de la contraparte.

**OPERATIVO:** Posibles pérdidas debidas a fallas en los sistemas y/o procedimientos, o errores o fraudes de los funcionarios involucrados.

**DE LIQUIDEZ:** Se refiere a la posible pérdida de valor originada por la imposibilidad (o excesivo costo) de transformar un activo en dinero efectivo, generalmente por la falta de suficientes compradores en el mercado.

**LEGAL:** Potenciales pérdidas de valor originadas por la imposibilidad o grave dificultad para exigir por vía legal el cumplimiento de obligaciones de la contraparte.

El “*Value at Risk*” o Valor en Riesgo,  $VaR(\alpha; \Delta t)$ , es una medida probabilística del riesgo de mercado que estima la pérdida máxima que puede sufrir el valor de un activo, en un intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , especificado y con un nivel de confianza (probabilidad),  $1 - \alpha$ , dado. (J. P. Morgan (1994))

$$\Pr [\text{Pérdida durante } \Delta t > VaR(\alpha; \Delta t)] = \alpha \quad (a)$$

Así por ejemplo si el valor del portafolio de inversiones de un agente económico en la fecha “t” es  $P_t = \text{u}\$ 10.000.000$ , se fija un intervalo de tiempo  $\Delta t = 72\text{hs}$  (3 días) y el nivel de confianza es una probabilidad  $1 - \alpha = 95\%$ , entonces  $VaR(5\%; 72\text{hs}) = \text{u}\$ 600.000$  significa que ésa es la pérdida máxima esperada en un período de 3 días con una confianza del 95% (la probabilidad de que sufra una pérdida mayor se estima en 5%). En otras palabras, se pronostica que, en condiciones normales, en sólo un período de tres días de cada 20 períodos similares, la pérdida de valor del portafolio superará  $\text{u}\$ 600.000$ .

Es un hecho que Bank for International Settlements (BIS)<sup>1</sup>, recomienda  $1 - \alpha = 99\%$  y  $\Delta t = 10\text{días}$  para intermediarios financieros, mientras que JPMorgan recomienda  $1 - \alpha = 95\%$  y  $\Delta t = 1\text{ día}$  para operaciones en mercados líquidos (*DEAR: daily earnings at risk*)

Se define “tasa de rentabilidad de un activo en un período” como

$$R_{i,t+\Delta t} = (P_{i,t+\Delta t} + D_{i,t+\Delta t}) / P_{i,t} - 1 = \Delta P_{i,t+\Delta t} / P_{i,t} \quad (b)$$

$$\text{siendo } \Delta P_{i,t+\Delta t} = (P_{i,t+\Delta t} + D_{i,t+\Delta t}) - P_{i,t}$$

<sup>1</sup> <http://www.bis.org/>

donde  $P_{i,t+\Delta t}$  y  $P_{i,t}$  son los precios del activo “i” en los momentos “t+Δt” y “t” respectivamente, mientras que  $D_{i,t+\Delta t}$  es el valor, en el momento “t+Δt”, de los flujos de fondos producidos por el activo “i” durante el período que va de “t” a “t+Δt”.

Por razones teóricas y prácticas se utilizan habitualmente en el análisis financiero, y así se lo hará en este artículo en todo lo que sigue, los “retornos” (tasas de rentabilidad con capitalización continua en un periodo de tenencia “Δt”) definidos como

$$r_{i,t+\Delta t} = \ln [(P_{i,t+\Delta t} + D_{i,t+\Delta t}) / P_{i,t}] \quad (c)$$

Debe puntualizarse que, como muestra Dow (2005, pág. 55), cuando el período de tenencia, la tasa de rentabilidad y el retorno son pequeños, resulta

$$R_{i,t+\Delta t} \approx r_{i,t+\Delta t} \quad (d)$$

Dado que los administradores de riesgo, en el momento de tomar sus decisiones, no conocen la rentabilidad ex-post que tendrán sus activos, es que los retornos se modelizan como variables aleatorias que permiten un tratamiento técnico de la consiguiente incertidumbre. Luego, puede expresarse la anterior definición (a) de VaR en términos relativos o retornos<sup>2</sup> del activo:

$$\text{Prob.}(r_{t+\Delta t} < VaR_{t+\Delta t}) = \alpha \quad (e)$$

A los efectos de poder expresar el Valor en Riesgo en unidades monetarias, utilizando como datos los retornos históricos que no vienen dados en esas unidades, se realiza el correspondiente cambio de variables. En efecto, dado que de (b), (c) y (d) se deduce  $r_{t+\Delta t} \approx \Delta P_{t+\Delta t} / P_t$  y que  $r_{t+\Delta t}$  se modeliza como una variable aleatoria, resulta que el cambio en el precio del activo (representativo de las pérdidas y ganancias – P&L) puede expresarse como  $\Delta P_{t+\Delta t} \approx P_t * r_{t+\Delta t}$ , que es también una variable aleatoria con cierta función de distribución (de probabilidad acumulativa)  $G(x) = \text{Prob.}(\Delta P_{t+\Delta t} \leq x)$  que depende de la función de distribución de los retornos  $FD(x) = \text{Prob.}(r_{t+\Delta t} \leq x)$ . Entonces la expresión (e) anterior puede escribirse

$$FD(VaR_{t+\Delta t}) = \alpha \text{ o, lo que es equivalente, } VaR_{t+\Delta t} = FD^{-1}(\alpha) \quad (f)$$

es decir que el Valor en Riesgo de los retornos es el  $\alpha$ -cuantil de su distribución. Luego el Valor en Riesgo medido en unidades monetarias es  $VaR_{t+\Delta t} = P_t * VaR_{t+\Delta t}$ . Si, como es habitual en el análisis financiero, se supone  $E(r_{t+\Delta t}) = 0$ , entonces la variable aleatoria estandarizada correspondiente a  $\Delta P_{t+\Delta t} \approx P_t * r_{t+\Delta t}$  es  $y = \Delta P_{t+\Delta t} / \sigma(\Delta P_{t+\Delta t})$  donde la volatilidad es  $\sigma(\Delta P_{t+\Delta t}) = \sigma(P_t * r_{t+\Delta t}) = P_t * \sigma(r_{t+\Delta t})$ . Sea  $y_\alpha$  el valor de esta variable tal que  $\text{Prob.}(y \leq y_\alpha) = \alpha$ . Entonces resulta  $y_\alpha = VaR_{t+\Delta t} / \sigma(\Delta P_{t+\Delta t})$ , ver Fig. 1, de donde se deduce

$$VaR_{t+\Delta t}(\alpha; \Delta t) = y_\alpha * \sigma(\Delta P_{t+\Delta t}) = y_\alpha * P_t * \sigma(r_{t+\Delta t})$$

<sup>2</sup> En estas circunstancias  $VaR_{t+\Delta t}$  se expresa en porcentaje como una tasa de rentabilidad y no en unidades monetarias como en la definición (a).

En general el *VaR* de los retornos, pronosticado en el momento “t” para el momento “t+1”, se calcula mediante la fórmula:

$$VaR_{t+1}(\alpha; \Delta t) = \sigma_{t+1} * F^{-1}(\alpha) \quad [1]$$

donde:

$\sigma_{t+1}$ : predicción de volatilidad derivada de algún modelo, ajustada al período  $\Delta t$ .

$F^{-1}(\alpha)$ : inversa de la función de probabilidad acumulativa (función de distribución) de la variable aleatoria retorno estandarizada ( $\alpha$ -cuantil de F)

La correspondiente fórmula general en unidades monetarias es:

$$VaR_{t+1}(\alpha; \Delta t) = P_t * \sigma_{t+1} * F^{-1}(\alpha) \quad [1-bis]$$

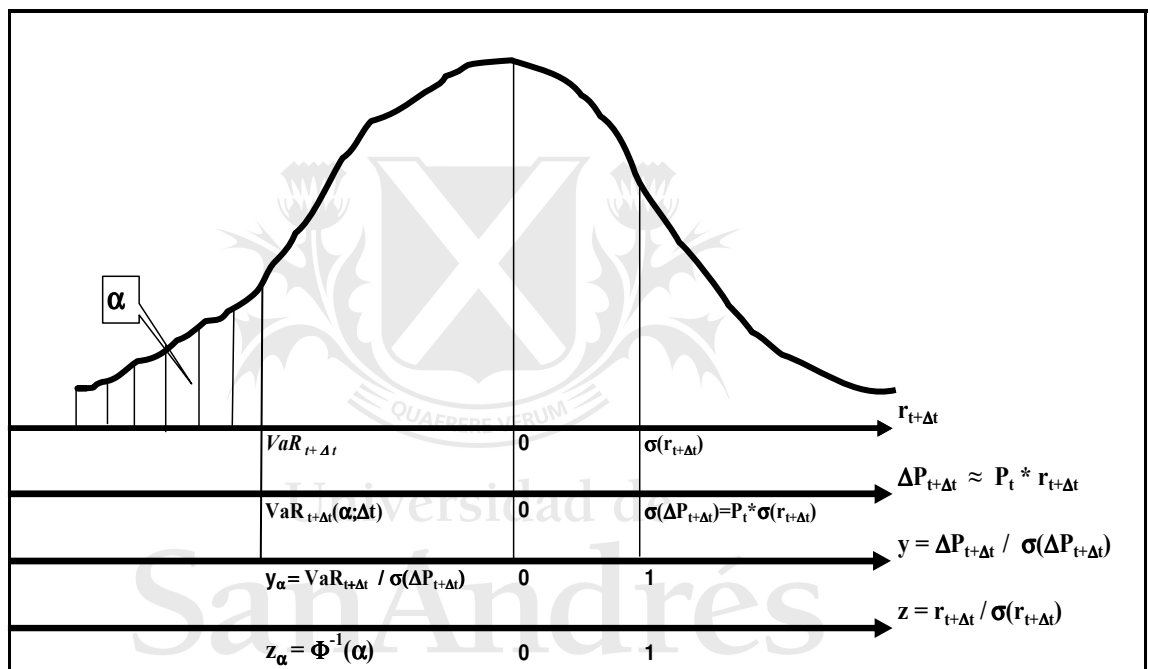


Figura 1

Puede apreciarse que, supuesto que el agente económico tiene una posición larga en un activo, el VaR es un cambio negativo en el precio tal que  $\alpha$  es la probabilidad de una caída mayor a dicha cuantía.

Si  $r_{t+\Delta t}$  es una va iid  $D(m;s)$  cuya distribución se supone conocida, entonces el valor esperado, la varianza y el desvío estándar de la variable  $r_{t+\Delta t}$  (supuesta normal) para un período cualquiera de amplitud  $\Delta t$  son :

$$E(r_{t+\Delta t}) = m\Delta t \quad \sigma^2(r_{t+\Delta t}) = s^2\Delta t \quad \sigma(r_{t+\Delta t}) = s(\Delta t)^{1/2}$$

Estas fórmulas se usan para adaptar al período del VaR, en el supuesto arriba indicado, los datos expresados en otra periodicidad. Por ej. si  $r_{t+\Delta t}$  es el retorno diario ex-ante de un activo ( $\Delta t = 1$ ) y se supone que en el mes hay 21 días hábiles, entonces el retorno esperado, varianza y desvío típico mensuales serán:

$$E(r_{t+21}) = m*21 \quad \sigma^2(r_{t+21}) = s^2*21 \quad \sigma(r_{t+21}) = s*(21)^{1/2}$$

Si al supuesto (que se verifica empíricamente con bastante aproximación para datos diarios)  $E(r_{t+\Delta t}) = 0$ , se agrega el de normalidad de los retornos  $r_{t+\Delta t}$ , resulta entonces la siguiente fórmula para la estimación del VaR, cuando  $z$  es la correspondiente variable aleatoria estandarizada, el nivel de confianza es  $1 - \alpha$  ( $y_\alpha = z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ ) y el período de tiempo es  $\Delta t$ :

$$\text{VaR}_{t+1}(\alpha; \Delta t) = z_\alpha * P_t * \sigma_{t+1} * \sqrt{\Delta t} \quad [2]$$

### 2.2.1. Aproximación no-paramétrica: Simulación Histórica (HS)

La simulación histórica constituye la manera más simple de estimar el cuantil de la distribución de pérdidas, ya que sólo requiere la distribución empírica de los datos. Es un método incondicionado que sólo supone que la serie temporal de los retornos es estacionaria<sup>3</sup> con una función de distribución  $F_x$ , haciendo que la función de distribución empírica de los datos sea consistente con el estimador de  $F_x$ .<sup>4</sup> En términos formales, la estimación del VaR para  $t+1$ , con un período muestral de longitud  $n$  hasta el momento  $t$ , está dada por el  $\alpha$ -cuantil empírico:

$$\text{VaR}(\alpha)_{t+1} = -Q(\alpha)(r_t; r_{t-1}; \dots; r_{t-n+1}) \quad [3]$$

Aún considerando la reducción de dimensionalidad a series temporales univariadas y la facilidad de su implementación al no hacer supuestos acerca de la dependencia de la estructura de los factores de riesgo, este esquema es inherentemente inconsistente (Manganelli y Engle (2004)). Sus defectos son originados principalmente por la ignorancia de la ligera dependencia entre los retornos y por el tamaño de la muestra: no existe una solución sencilla para la dicotomía originada por la necesidad de muestras grandes que permitan una mejor inferencia estadística y muestras más reducidas requeridas para las observaciones dentro y fuera del presente *cluster* de volatilidad. Además, Dowd (2005) y Penza y Bansal (2001) resaltan que es (más que) probable la presencia de efectos *ghost* o *shadow* (fantasma o sombra).

### 2.2.2. Algunos modelos paramétricos de volatilidad condicionada

Por las razones prácticas que se indican más adelante, esta investigación se desarrolla dentro de los límites de la representación GARCH, definida mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{GARCH}(1;1): \quad r_{t+1} &= \sigma_{t+1} z_{t+1} \\ \sigma_{t+1}^2 &= w + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2 \end{aligned} \quad [4]$$

Con shocks aleatorios o innovaciones  $z_{t+1} \sim \text{iid } D(0;1)$  y  $w > 0; \alpha, \beta \geq 0$ .<sup>5</sup>

<sup>3</sup> Una serie temporal es **estacionaria** si su valor medio y desvío estándar son constantes (no dependen del tiempo). Informalmente puede decirse que sus propiedades fundamentales no varían a lo largo del tiempo.

<sup>4</sup> Ignorando en consecuencia eventos que son plausibles pero que no han ocurrido en el período muestral.

<sup>5</sup> El coeficiente  $\alpha$  de la fórmula [4] es distinto y no tiene relación con el nivel de significación  $\alpha$  en las fórmulas [1], [2] y [3].

Este tipo de modelo fue introducido por Bollerslev (1986) y Taylor (1986), y desde entonces se ha convertido en uno de los más empleados en los estudios financieros<sup>6</sup>, dado que su estructura se adecúa a dos de las características más usuales exhibidas por las series de retornos: el agrupamiento de la volatilidad en “clusters” y la leptokurtosis<sup>7</sup>. Concordantemente, Dowd (2005:131-132), destaca que los modelos GARCH se han adaptado al agrupamiento de la volatilidad y este agrupamiento produce retornos con colas más anchas que las que predice la distribución normal, aun cuando las innovaciones -los shocks aleatorios- se encuentren normalmente distribuidos.

Las motivaciones estrictamente pragmáticas por las que el estudio se restringirá a la aplicación del modelo GARCH de primer orden obedecen a que la mayor precisión obtenida extendiéndolo a órdenes superiores es marginalmente insignificante según documentan McNeil, Frey y Embrechts (2005), quienes además fundamentan en razones de parsimonia la utilización del menor orden posible<sup>8</sup>.

### 2.2.3. Un modelo híbrido: Teoría de Valores Extremos

#### 2.2.3.1. Síntesis de sus Fundamentos Teóricos

Los modelos antes mencionados trabajan sobre los cuantiles de las variables aleatorias utilizando información de todo el conjunto de datos. Sin embargo, debido al hecho que los cuantiles al 1% o 5% son valores extremos de la distribución, resulta natural modelar las colas directamente en lugar de considerar la estructura completa de la distribución. La Teoría de Valores Extremos (EVT) provee una justificación teórica para tales procedimientos, ya que desempeña un rol similar al del Teorema Central del Límite en la modelización de variables aleatorias.

Esta sección aporta algunas nociones básicas indispensables para el resto del artículo.<sup>9</sup> En términos generales, los valores extremos pueden ser modelados siguiendo dos procedimientos básicos: a) Los modelos Block Máxima (BMM - *Block Maxima Models*), que emplean las distribuciones generalizadas de valores extremos (GEV) para ajustar una distribución a partir de los máximos o mínimos de un conjunto de datos muestrales iid agrupados en bloques de similar tamaño, o b) Los modelos *Peaks over Thresholds* (POT), que utilizan las distribuciones generalizadas de Pareto (GPD) para ajustar una distribución a los valores muestrales iid que exceden un umbral especificado.

El primero tiene el inconveniente de retener para el análisis solamente el valor máximo (o el mínimo) de un gran bloque de datos. En consecuencia, evitar el proceso de agrupamiento en bloques muy grandes deriva en una mejor utilización de los datos. Además, en mercados emergentes con series de datos de extensión relativamente corta, es crucial el no tomar en cuenta algunos datos intermedios contenidos en el bloque, ya que podrían llegar a ser extremos si los bloques fueran de diferente tamaño. En consecuencia, por las razones antes enunciadas, en este trabajo se utilizan modelos del tipo POT.

Sea una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  que tienen la función de distribución  $F(y) = \Pr(X < y)$  desconocida; en esas condiciones los eventos extremos serán definidos como aquellos

---

<sup>6</sup> Una explicación más detallada de los modelos GARCH puede encontrarse en Bollerslev (1986), o en Bollerslev, Engle and Nelson (1994), entre otros.

<sup>7</sup> Ver Penza and Bansal (2001), Christoffersen (2003) o RiskMetrics Technical Document (1996) para un análisis de las características empíricas de las series temporales de retornos financieros.

<sup>8</sup> Ver también Gujarati (1997).

<sup>9</sup> Para un tratamiento detallado y/o algunos refinamientos teóricos el lector interesado puede consultar a Embrechts, Klüppelberg y Mikosch (1997), McNeil, Frey y Embrechts (2005), o Reiss y Thomas (2007).

valores de  $X_t$  que exceden algún valor  $u$ , alto y predeterminado. La variable  $X - u$  representa los POT (Excesos Sobre el Umbral  $u$ ). Sólo se hará referencia a umbrales positivos ( $u > 0$ ), pues los resultados para  $u < 0$  emplean un razonamiento similar.

La relación entre la función de distribución  $F_u$  de los citados POT y  $F$ , la de la variable aleatoria subyacente, está determinada por la probabilidad condicional:

$$F_u(y) = \Pr\{X - u \leq y \mid X > u\} = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad [5]$$

$F_u(y)$  puede interpretarse como la probabilidad de que una pérdida exceda el umbral  $u$  por un monto igual o menor a  $y$ , supuesto que el umbral  $u$  ha sido excedido. La fórmula [5] muestra que si fuera conocida la distribución original  $F$ , sería también conocida la distribución de los excedentes  $F_u$ ; sin embargo, en las aplicaciones reales sucede lo contrario, obligando entonces a estimar en base a los datos muestrales, la distribución desconocida  $F$  para valores altos por encima del umbral. A continuación se realiza una brevísima descripción de los fundamentos teóricos básicos que permiten tal estimación.

Si se interpreta “valor extremo” como la máxima pérdida en un cierto intervalo de tiempo, entonces puede definírselo como el máximo (o mínimo) de una muestra  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Se trata entonces de determinar la función de distribución  $H$  de esos valores extremos. Suponiendo que éstos son valores de una secuencia:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de variables aleatorias iid con función de distribución común  $F$ , se designa  $M_n = \max\{X_1; X_2; \dots; X_n\}$ , y si  $F$  cumple con el teorema de Fisher y Tippet (1928), puede probarse que, para valores grandes de  $n$ ,  $\Pr\{M_n \leq z\} \approx H(z)$  con

$$H_\xi(z) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\} & \text{si } \xi \neq 0 \text{ y } 1 + \xi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right) > 0 \\ \exp\left[-e^{-\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)}\right] & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

La expresión anterior es la fórmula de la función de distribución límite de  $M_n$ , conocida como “Distribución Generalizada de Valores Extremos” (GEV).  $H_\xi$  depende de tres parámetros:  $\mu$  (locación),  $\sigma > 0$  (escala) y  $\xi$  (índice de cola o de forma). El dominio de  $z$  está restringido por la condición  $1 + \xi[(z - \mu) / \sigma] > 0$ .

Dado que a los efectos de este trabajo interesa estimar  $F_u$ , la función de distribución de los excesos sobre el umbral  $u$ , se enuncia a grandes rasgos un teorema que vincula las distribuciones  $H_\xi$  y  $F_u$  [Balkema y de Haan (1974) – Pickands (1975)]:

*Para un amplio conjunto de funciones de distribución subyacentes  $F$ , existe un valor  $\sigma$  que depende de  $u$ ,<sup>10</sup> tal que  $F_u(y) \approx G_{\xi,\sigma}(y)$ , si y sólo si  $F$  pertenece al máximo dominio de atracción de la distribución generalizada de valores extremos*

<sup>10</sup> No es necesariamente el desvío estándar.

(GEV)  $H_\xi$ , donde  $G_{\xi,\sigma}$  representa la “Distribución Generalizada de Pareto” (GPD) dependiente de los parámetros  $\xi$  y  $\sigma$ , cuya expresión es

$$G_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} 1-(1+\xi y/\sigma)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1-\exp(-y/\sigma) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Al igual que para las distribuciones GEV, mayores valores del índice de cola  $\xi$  implican un incremento en el tamaño de las colas.

Existen tres tipos de distribuciones pertenecientes a la familia GPD, de acuerdo con el valor del índice de cola  $\xi$ :

- Si  $\xi > 0$  entonces  $G_{\xi,\sigma}$  es la distribución de Pareto clásica.
- Si  $\xi = 0$  entonces  $G_{\xi,\sigma}$  es la distribución exponencial.
- Si  $\xi < 0$  entonces  $G_{\xi,\sigma}$  es la distribución de Pareto de tipo II de colas cortas.

Elas se corresponden con las distribuciones de valores extremos GEV de Fréchet, Gumbel y Weibull respectivamente. La precisión de la familia GPD puede ser mejorada si se le agrega un parámetro de localización  $\mu$ ,<sup>11</sup> convirtiéndose entonces en  $G_{\xi,\sigma}(y - \mu)$ . En sentido amplio, los teoremas anteriores significan que si la distribución de los máximos  $M_n$  de los bloques de datos es aproximadamente descripta por  $H$ , entonces la distribución aproximada de los excesos sobre el umbral está dada por  $G_{\xi,\sigma}$ , y en consecuencia pertenece a la familia Generalizada de Pareto (GPD). Adicionalmente, los parámetros de la fórmula del modelo GPD están unívocamente determinados por los de la correspondiente distribución GEV asociada de los máximos de los bloques muestrales (Coles (2001)).

Una vez que se ha realizado la elección del umbral  $u$  y se han estimado los parámetros del modelo GPD<sup>12</sup>, es necesario obtener la expresión para determinar el cuantil relevante que permitirá calcular el VaR. Así, de la ecuación [5] y teniendo presente que  $x = y + u$ , una estimación de  $F(x)$ , para  $x > u$  podría ser:

$$F(x) = [1 - F(u)] G_{\xi,\sigma}(y) + F(u) \quad [6]$$

Considerando  $k$  como el número de observaciones mayores al umbral  $u$ ,  $F(u)$  puede ser fácilmente aproximada de manera no-paramétrica por medio del simple estimador empírico:

$$\hat{F}(u) = \frac{n-k}{n} \quad [7]$$

Introduciendo [7] y la fórmula de  $G_{\xi,\sigma}$  en [6] es posible encontrar una estimación de  $F(x)$ :

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{k}{n} \left[ 1 + \frac{\hat{\xi}(x-u)}{\hat{\sigma}} \right]^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \quad \text{si } \xi \neq 0 \quad [8.1]$$

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{k}{n} e^{-\left(\frac{x-u}{\hat{\sigma}}\right)} \quad \text{si } \xi = 0 \quad [8.2]$$

<sup>11</sup> No es necesariamente el valor medio.

<sup>12</sup> Ver la siguiente sección 2.2.3.2

donde  $\hat{\xi}$  y  $\hat{\sigma}$  son estimadores de  $\xi$  y  $\sigma$  respectivamente. Para un nivel de significación  $\alpha > F(u)$  o, lo que es igual, un nivel de confianza  $1-\alpha < 1-F(u)$ , la expresión del VaR se puede computar determinando la función inversa de  $\hat{F}(x)$  y resolviendo para  $x$  en las fórmulas [8]:

$$Var_{t+1}(\alpha) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ \left( \frac{1-\alpha}{k/n} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] \quad si \ \xi \neq 0 \quad [9.1]$$

$$VaR_{t+1}(\alpha) = u - \sigma \ln \left[ \frac{n}{k} (1-\alpha) \right] \quad si \ \xi = 0 \quad [9.2]$$

### 2.2.3.2. Identificación del umbral $u$ y ajuste del modelo GPD a los excesos

De acuerdo a Christoffersen (2003), la selección del umbral es el punto débil del método POT. Aún cuando hay numerosas maneras basadas en fórmulas para escoger el umbral  $u$ <sup>13</sup>, no existe un fundamento teórico que sustente un procedimiento satisfactorio para este objetivo. Es por ello que el profesional o consultor de finanzas se ve obligado a utilizar una serie de procedimientos ad-hoc para poder determinar  $u$  como el punto de partida para la estimación de los parámetros del modelo GPD que ajuste razonablemente a los datos y permita un adecuado pronóstico del VaR. En ese sentido debe tener en cuenta la necesidad de lograr un delicado equilibrio entre la varianza y el sesgo. En efecto, si el umbral es muy bajo resultará afectada la naturaleza asintótica del modelo, dado que  $\xi$  fluctuará considerablemente para diferentes valores del estadístico de alto orden  $k$ , originando un mayor sesgo. Por el contrario, cuanto más elevado sea umbral  $u$ , habrá menos valores excedentes, lo que originará alta varianza. Consecuentemente, distintos autores han desarrollado sus propias técnicas para identificar el umbral. Christoffersen (2003) sugiere una regla práctica consistente en considerar valores extremos sólo aquellas observaciones situadas en el decil superior o en el inferior de la distribución. Más formalmente, Nefci (2000) seguido por Bekiros y Georgoutsos (2003), estimaron  $u = 1,176\sigma_n$ , donde  $\sigma_n$  es el desvío estándar de la muestra y  $1,176 = F^{-1}(0,10) = 1,44\sqrt{(d-2)/d}$  si se supone que  $F \sim \text{Student-t}(d)$  y que  $d = 6$  es el número de grados de libertad. En el presente estudio se utiliza una técnica basada en el análisis de un conjunto de elementos tales como el valor muestral de la Función de la Media de los Excesos (MEF), gráficos QQ (Quantile-Quantile ; QQ plots), la función de densidad kernel y la función muestral de cuantiles. La utilización conjunta de las mencionadas técnicas permitiría, en principio, un análisis más profundo de las características relevantes de la serie temporal de los datos a los efectos de tomar una decisión acerca del umbral más adecuado para el ajuste del modelo GPD. Por consiguiente, la idea es llevar a cabo un análisis de los extremos superior e inferior de las series sobre una base individual, en lugar

<sup>13</sup> El lector interesado puede recurrir a Reiss and Thomas (2007) o Beirlant, Vynckier and Teugels (1996). Estas fórmulas aparentan funcionar razonablemente bien, pero deben utilizarse con cuidado pues originan frecuentemente la selección de un número demasiado elevado de estadísticos de alto orden. Danielsson and de Vries (1999) y Coronel-Brizio y Fernández Montoya (2004) presentan interesantes análisis vinculados a este problema.



de emplear el conjunto habitual de recetas intentando ganar precisión en la estimación del comportamiento de los extremos.

El estadístico  $u$  será aproximado usando la representación gráfica de los valores muestrales de la función MEF, definida como el estimador empírico de la verdadera MEF, expresadas formalmente por:

$$e(u) = E(X - u / X > u) \quad [10 - a]$$

$$\hat{e}(u) = e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u) I_{\{X_i > u\}}}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}} \quad [10 - b]$$

que representa el promedio de los valores que exceden el límite superior  $u$  para una muestra de  $n$  observaciones. El método gráfico para escoger un umbral adecuado se basa en el hecho que si los excedentes tienen una distribución GPD, entonces la Función de la Media de los Excesos (MEF) es lineal en  $u$ . En efecto, se demuestra que

$$e(u) = \frac{\sigma + \xi \cdot u}{1 - \xi} \quad [10 - c]$$

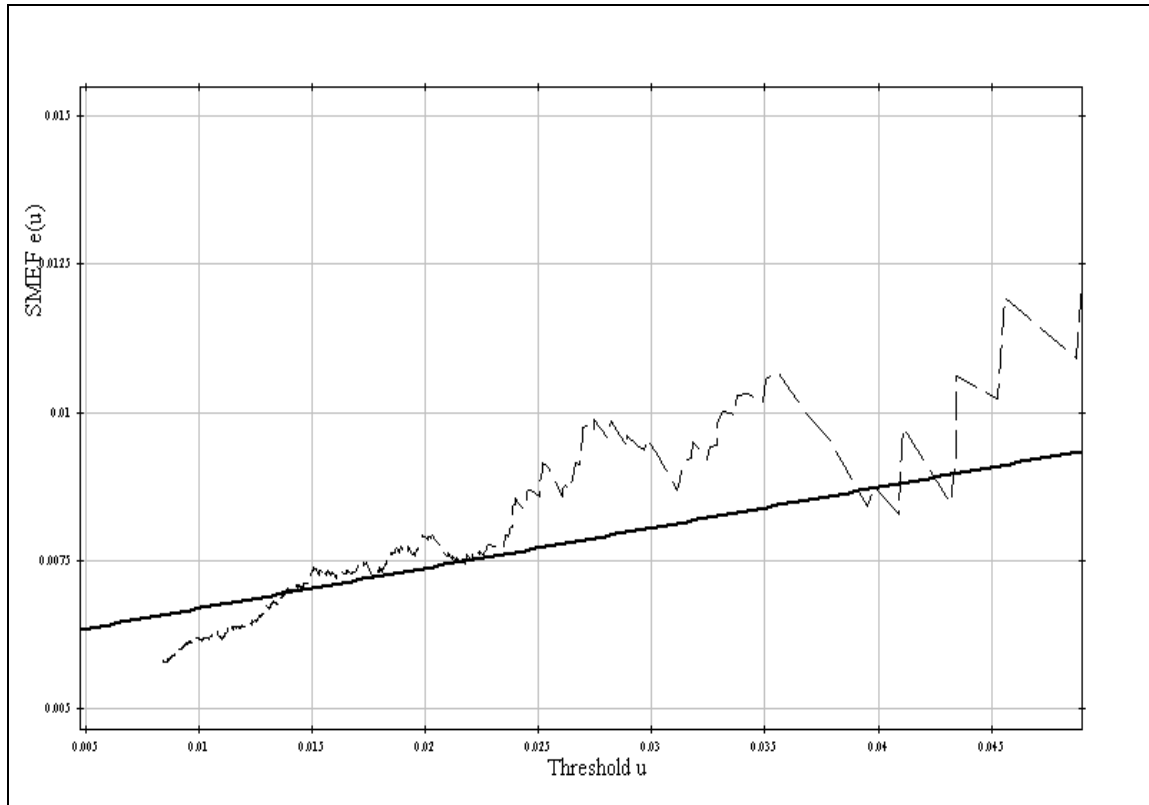
Es así que, de acuerdo a la tendencia observada en el gráfico, pueden ser deducidas las siguientes conclusiones:

- Tendencia creciente: distribución de cola pesada
- Tendencia decreciente: distribución de cola corta
- Sin tendencia: distribución exponencial

Como señalan McNeil y Saladin (1997), la distribución de los excedentes será del tipo GPD con  $\xi > 0$  en el sector de la cola que supera a  $u$ , si la representación empírica de la función MEF muestra aproximadamente una línea recta con pendiente positiva: el umbral  $u$  puede ser identificado como el valor de la abscisa correspondiente a la parte del gráfico desde donde comienza a verificarse la pendiente positiva.

Las ideas básicas para la selección del umbral pueden ilustrarse modelando la cola superior de los retornos del índice FTSE100 con datos diarios que van desde el 03/04/84 al 29/12/06 inclusive. En el gráfico de la función MEF muestral puede observarse alguna evidencia del comienzo de una sección con gradiente linealmente positivo en la zona entre 1.50% y 2%, por lo que el umbral  $u$  puede ser estimado aproximadamente, por ejemplo, en 1.76%, para intentar encontrar un modelo GPD que provea un ajuste razonable a las pérdidas más grandes.<sup>14</sup> (Gráfico 2.1).

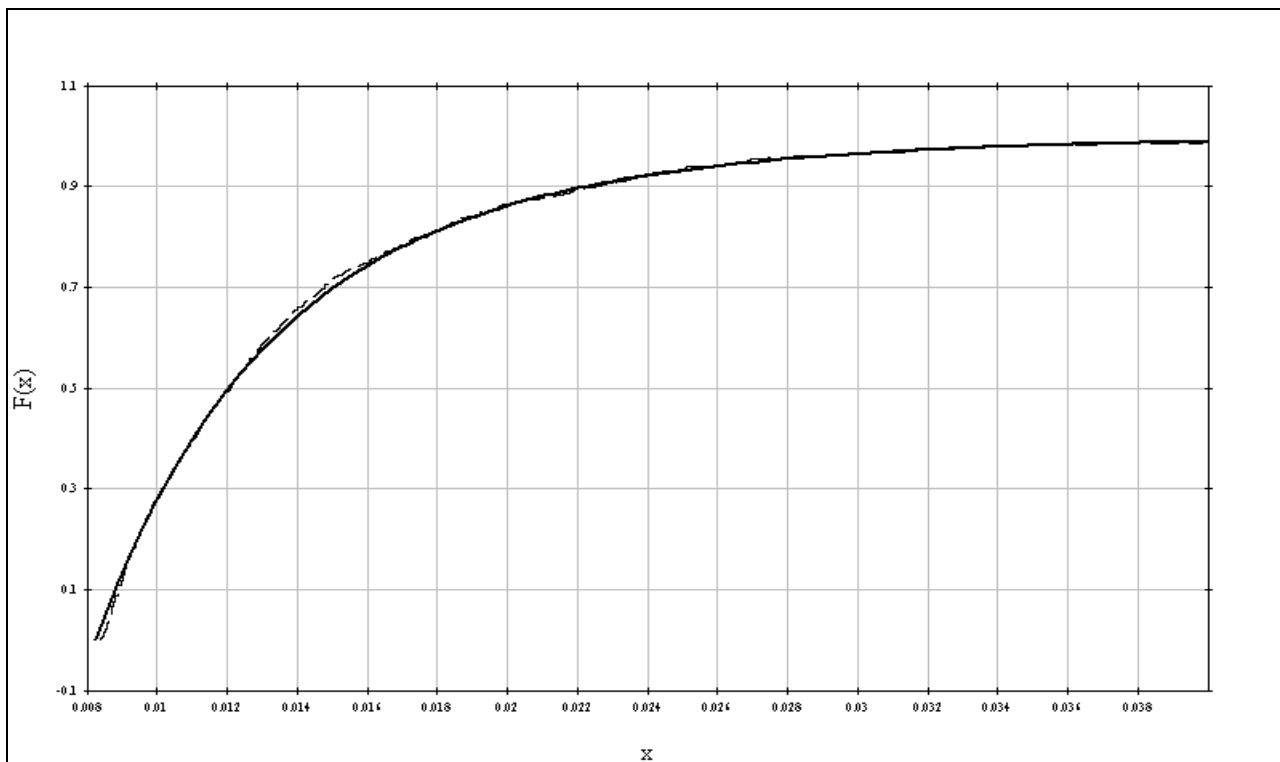
<sup>14</sup> Un procedimiento análogo se utilizó tanto para las colas positivas como negativas de cada índice.



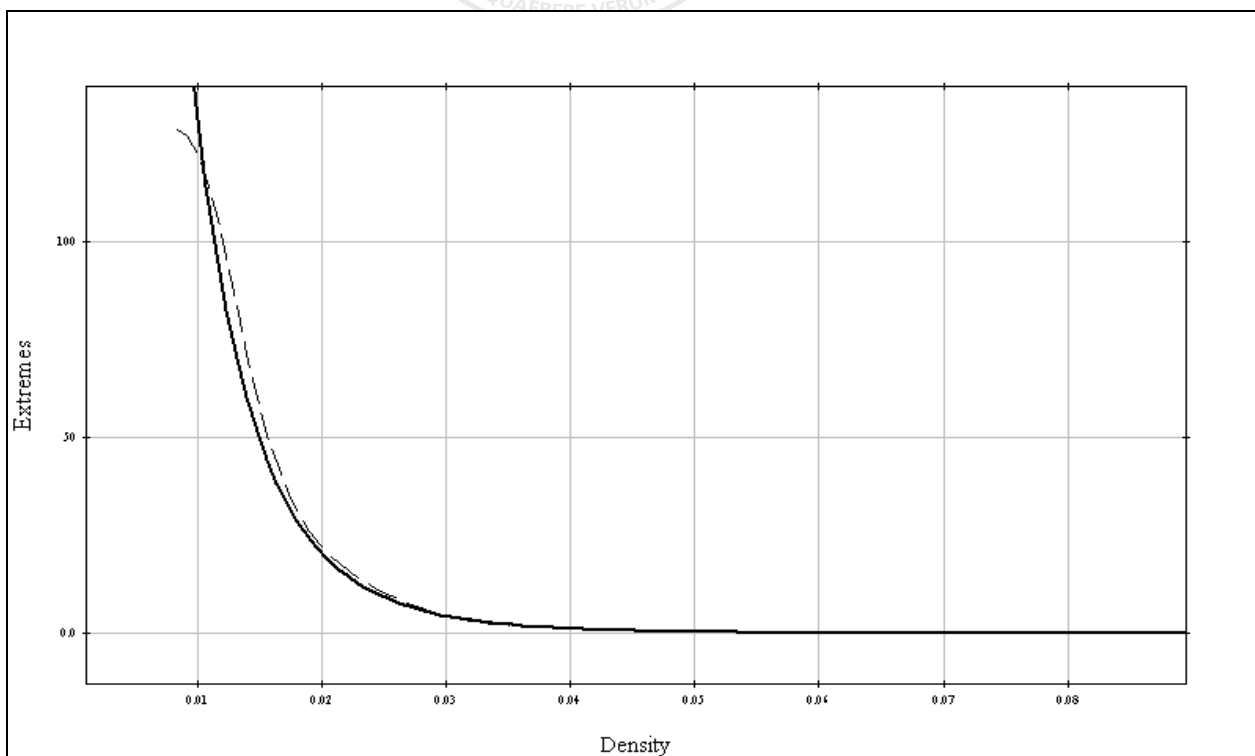
**Gráfico 2.1.** Representación de los valores muestrales de la Función de la Media de los Excesos (MEF) de los retornos logarítmicos del índice FTSE100 en función del umbral. La línea continua oscura muestra pendiente positiva.

El ajuste por el método de máxima verosimilitud (ML) origina las siguientes estimaciones de los parámetros: índice de cola  $\xi = 0.1222$ , locación  $\mu = -0.0349$  y dispersión  $\sigma = 0.0431$ . La razonable adecuación del modelo GPD puede evaluarse por medio de varias herramientas gráficas. Así es que en el Gráfico 2.2 puede verse la función de distribución muestral (línea punteada) con la GPD superpuesta (línea continua): es posible apreciar que sobre el umbral  $u = 1.76\%$  ambas líneas se encuentran casi superpuestas. En realidad, existen algunos valores anormales (outliers) más allá del 10%, que pueden convenientemente ser eliminados de la muestra para evitar distorsiones<sup>15</sup>. La evidencia que respalda el modelo GPD es reforzada por los Gráficos 2.3 y 2.4, en los que se muestran los valores empíricos con línea punteada mientras que la línea continua representa el modelo GPD ajustado.

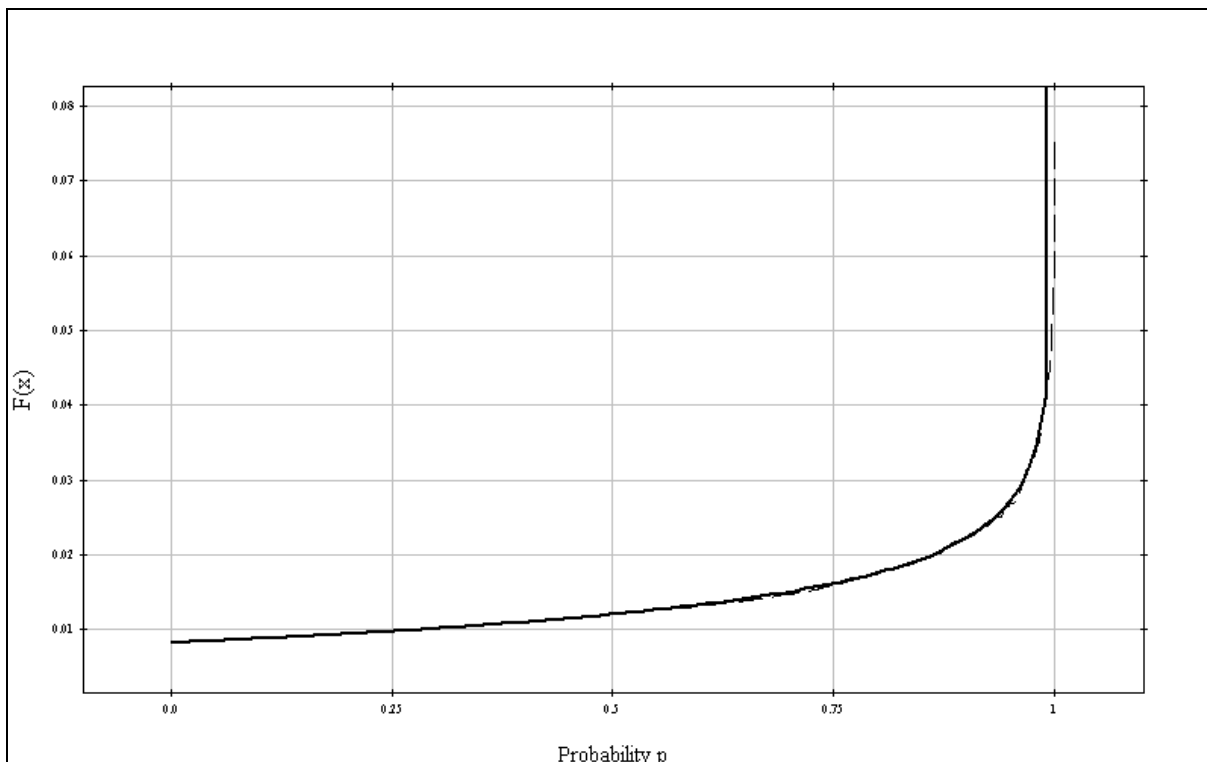
<sup>15</sup> Véase McNEIL, A. J., FREY, R., and EMBRECHTS, P., (2005)



*Gráfico 2.2 Funciones de distribución muestrales*

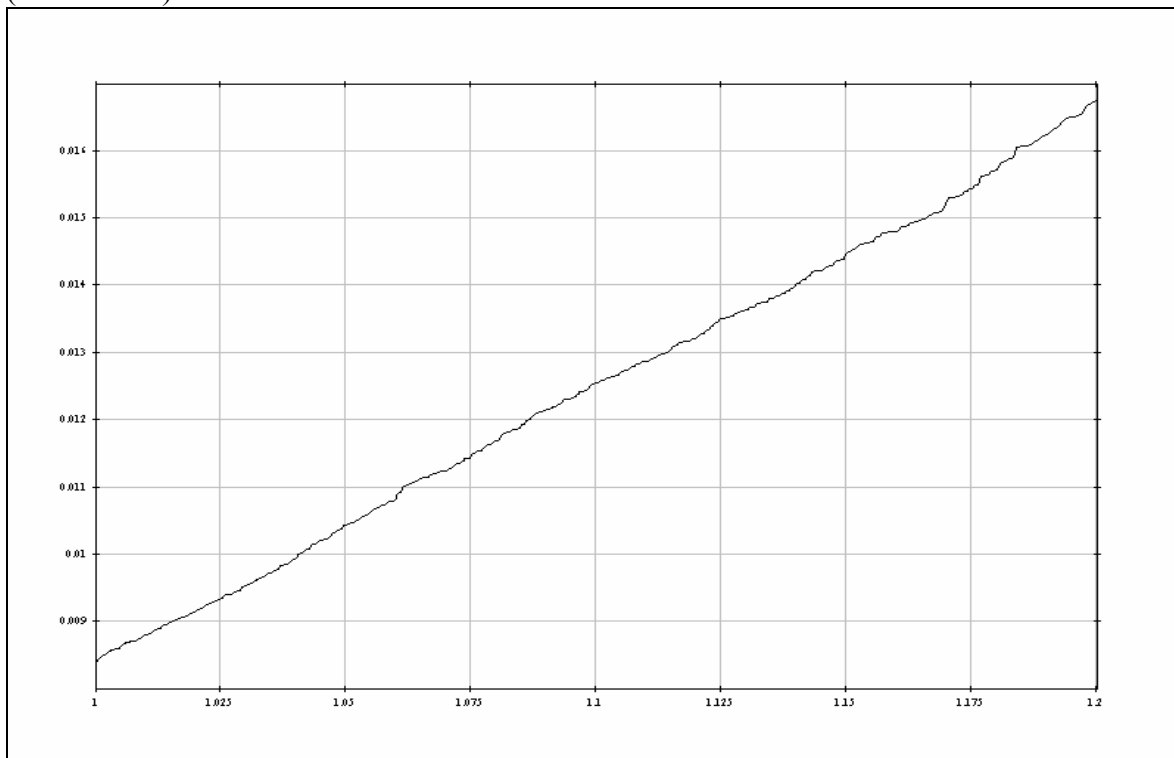


*Gráfico 2.3 Densidades Kernel*



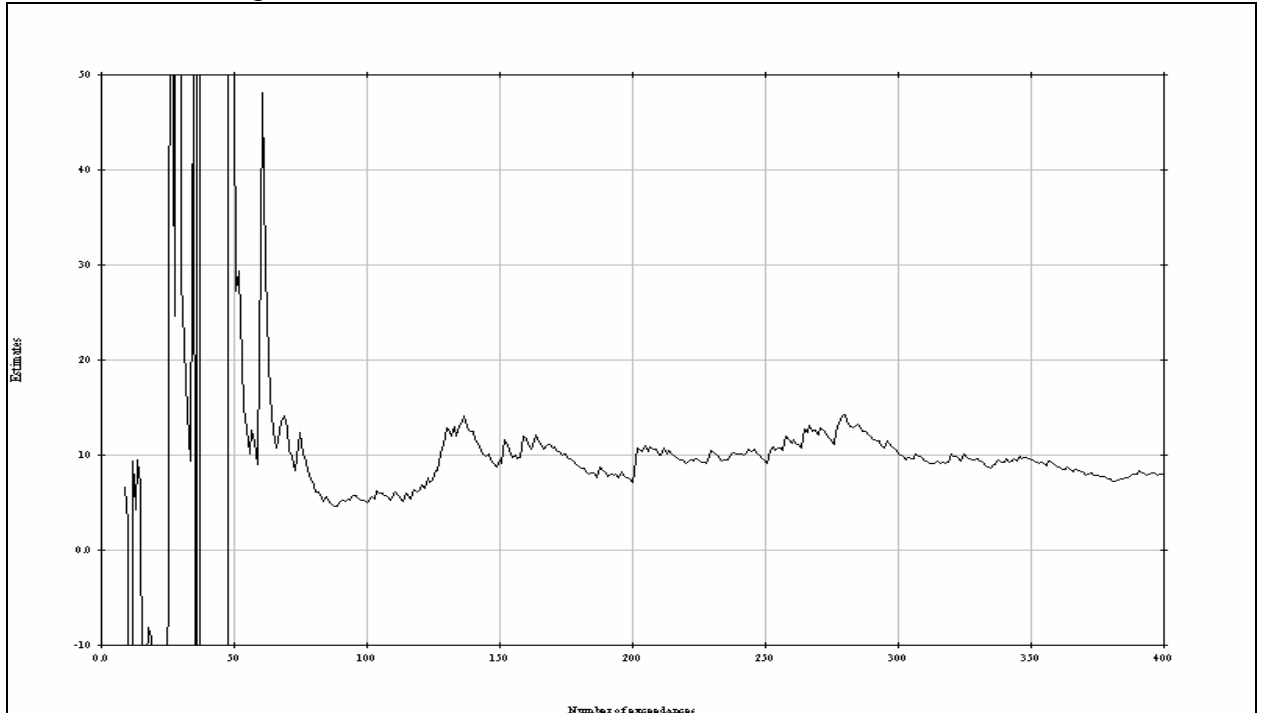
**Gráfico 2.4** Funciones de cuantiles

También es útil representar gráficamente los cuantiles empíricos (ordenadas) en función de los cuantiles de la Distribución Generalizada de Pareto (GPD) estimada (abscisas) para controlar que el gráfico resultante es aproximadamente una línea recta. (Gráfico 2.5).



**Gráfico 2.5** Gráfico Cuantil-Cuantil (QQ)

Coles (2001) argumenta que una segunda posibilidad para la selección del umbral en el método POT es el análisis de la estabilidad de los parámetros estimados dentro de un rango del estadístico ordinal  $u$ . Sin embargo, idealmente, ambos esquemas deberían ser complementarios: estimadores provenientes del primero necesariamente deben conformar los requerimientos del segundo y viceversa. En este sentido, representar gráficamente las estimaciones de máxima verosimilitud (ML) en función del número de excedentes (Gráfico 2.6) revela que los valores de  $\xi$  tienden a estabilizarse aproximadamente desde 200 en adelante, sugiriendo de esta manera  $u = 201$ .



**Gráfico 2.6.** La estabilidad del parámetro  $\xi$

### 2.2.3.2. EVT Condicionado o Dinámico

También puede emplearse un refinamiento del EVT incondicionado o estático (aplicación expuesta en 2.2.3.1.). Como afirman McNeil y Frey (1999) y Dowd (2005), el modelo EVT está vinculado a alguna estructura dinámica que gobierna el comportamiento del proceso original de retornos. En consecuencia, luego de considerar el modelo principal, el EVT es aplicado a los shocks aleatorios o innovaciones que originan el proceso de retornos original. Este ejemplo particular requiere idéntico análisis para la selección del umbral (Sección 2.2.3.2.), pero considerando que las series de datos evaluadas están constituidas por los residuos estandarizados, luego de ajustar el esquema que controla la dinámica básica. Como resultado, la distinción entre los retornos y los factores aleatorios que operan sobre ellos, significa que el modelo EVT es ahora condicionado o dinámico (Dowd 2005).

### 3. Metodología

En esta Sección se tratan aspectos más específicos referidos a los supuestos, provisiones y características del proceso de estimación con el objetivo de realizar la comparación entre diferentes métodos para calcular el VaR a partir de las pérdidas históricas. Adicionalmente, se indaga el efecto que dichos esquemas pueden producir en la constitución del capital regulatorio, entendiéndolo éste en el sentido que le asigna el Comité de Basilea para la Supervisión de Bancos.

Se ha seleccionado una muestra de diez índices de mercados de capitales: seis pertenecen a mercados maduros o desarrollados (Suiza, Reino Unido, Alemania, Francia, Singapur y España) y el resto a mercados emergentes (Indonesia, Israel, México y Turquía). Como en Hansen y Lunde (2005) y Mapa (s/d), las series temporales de los retornos fueron separadas en dos períodos: el primero para la estimación de los parámetros de los modelos y el segundo para la evaluación de los pronósticos realizados en base a ellos:

$$t = -T ; -T + 1 ; \dots ; 0 \qquad t = 1 ; 2 ; \dots ; n$$

Período de estimación                      Período de predicción

Aunque Christoffersen (2003) sugiere como una buena regla empírica aproximada la utilización de al menos los últimos 1.000 datos para la modelización, es conveniente que las series de tiempo sean lo más extensas posible (Dowd 2005). Para los índices antes mencionados se han utilizado las cantidades de datos que figuran en la siguiente tabla:

Índice bursátil Bolsa (País)	Período de estimación	Cantidad de observaciones	Período de pronóstico	Cantidad de observaciones
SMI (Suiza)	09/11/1990 31/12/2006	4060	01/01/2007 31/12/2008	501
DAX (Alemania)	27/11/1990 31/12/2006	4059	01/01/2007 31/12/2008	507
FTSE100 (Reino Unido)	02/04/1984 31/12/2006	5746	01/01/2007 31/12/2008	506
CAC40 (Francia)	10/07/1987 31/12/2006	5082	01/01/2007 31/12/2008	523
IGBM (España)	04/02/1984 31/12/2006	5934	01/01/2007 31/12/2008	506
STRAIT (Singapur)	04/01/1988 31/12/2006	4749	01/01/2007 31/12/2008	493
JKSE (Indonesia)	02/07/1997 31/12/2006	2299	01/01/2007 31/12/2008	492
TAS100 (Israel)	01/07/1997 31/12/2006	1910	01/01/2007 31/12/2008	471
IPCC (Mexico)	08/11/1991 31/12/2006	3777	01/01/2007 31/12/2008	502
ISE (Turquía)	05/01/1988 31/12/2009	4954	01/01/2007 31/12/2008	524

Un rápido examen de los períodos seleccionados para el proceso de estimación revela que al menos un evento mundial importante está incluido en cada índice, sin considerar el efecto particular sobre el mismo. Algunos son:

- Derrumbe del Mercado de Capitales o “Lunes Negro” (Octubre 1987)
- “Efecto Tequila” (Diciembre 1994)
- Derrumbe del Mercado de capitales de Asia (Comienzos de Enero 1997)
- Ataques terroristas en Nueva York (Septiembre 2001), Madrid (Marzo 2004) y Londres (Julio 2005).

Por otro lado, el período de pronóstico contiene la crisis financiera mundial que comenzó en Septiembre-Octubre 2008. Este evento constituye una interesante instancia para un test de estrés<sup>16</sup> al evaluar el desempeño del modelo en tiempo real.

Los siguientes factores deben tenerse en cuenta atento a su importancia en la metodología empleada:

- VaR:

Se aplica para su estimación un horizonte temporal de un día, en concordancia con la frecuencia de negociación de los instrumentos analizados. Además, la adopción de un horizonte de tiempo mayor (por ejemplo un período de tenencia de 10 días) como es sugerido por el Comité de Basilea, se ha dejado de lado intencionalmente en vista de las inconsistencias de la ‘regla de la raíz cuadrada del tiempo’ detectadas por Danielsson (2004)<sup>17</sup> y Dowd (2005), entre otros.

Como afirman Rachev, Menn y Fabozzi (2005), las diferencias en las estimaciones del VaR son significativas para los cuantiles superiores; por lo que el nivel de confianza se ha fijado en el 99%, en sintonía con lo establecido por el Comité de Basilea.

Cualquier representación realista del riesgo debería tener en cuenta la asimetría relacionada con resultados negativos (Rachev, Menn y Fabozzi (2005)). Es por ello que las estimaciones son realizadas por separado para las colas superior e inferior de la distribución, representando así el VaR para posiciones cortas y largas.

- Especificaciones del VaR:

Modelos no-paramétricos – Simulación Histórica: los cuantiles empíricos superiores e inferiores son evaluados al 99% con una ventana variable de 1.000 días de negociación.

Modelos paramétricos – Modelos de volatilidad condicionada: los parámetros del GARCH son obtenidos, como es usual, vía ML (Máxima Verosimilitud), usando la distribución de los retornos estandarizados  $r_t/\sigma_t$  y aplicando el supuesto típico de normalidad condicionada. Adicionalmente, el estudio también hace uso de la flexibilidad de la técnica empleando la distribución de la t de Student(d) para “engrosar” las colas donde los grados de libertad son  $d > 2$  permitiendo controlar la forma de las mismas. Los cálculos del VaR son realizados empleando el factor

---

<sup>16</sup> Para detalles sobre los tests de estrés puede consultarse: Basel Committee on Banking Supervision (1996, 2004), Jorion (1995), Penza and Bansal (2001), Christoffersen (2003), Dowd (1998, 2005), RiskMetrics Technical Document (1996) y Osterreichische Nationalbank (1999), entre otros.

<sup>17</sup> En efecto, para lograr consistencia entre las tres etapas de recolección de datos, estimación de parámetros y estimación de cuantiles, la longitud de la serie temporal debería crecer en tal medida que la haría prácticamente imposible, en especial en los mercados emergentes.

$\sqrt{(d-2)/d}$  para expresar una distribución estandarizada  $t$  de Student. Las especificaciones precedentes son simétricas: los valores del VaR obtenidos coinciden para ambas colas (aunque con signos opuestos).

- Modelos Semi-paramétricos:

a) Teoría de Valores Extremos incondicionados vía POT: Reiss y Thomas (2007) describen numerosos métodos para obtener los parámetros (del) GDP, pero considerando las ventajas sobre sus contrapartes y la confiabilidad de sus resultados, se utilizan las estimaciones por el método de Máxima Verosimilitud (ML)<sup>18</sup>. Para una muestra  $\{x_t\}_{t=1}^n$  la función de probabilidad logarítmica  $L(\xi; \sigma; \mu/x)$  para GPD está provista por el logaritmo de la densidad conjunta de todas las observaciones.

Se asume que las series analizadas  $\{x_t\}_{t=1}^n$  son iid. Más allá del hecho que este supuesto no parezca ser típico para las series de tiempo financieras (Ver Sección 4.1), como señalan Bao, Lee y Saltoglu (2003), las representaciones EVT también pueden ser utilizadas para series débilmente dependientes<sup>19</sup>. Jondeau y Rockinger (2003) citando a Smith (1985), agregan que supuesto el índice de cola  $\xi > -1/2$ , los parámetros ML tienen una distribución normal condicionada. La Teoría asintótica sostiene que, si las submuestras son iid, el proceso subyacente de los retornos no necesita ser iid, implicando entonces que la estimación ML de la distribución GEV originará estimadores consistentes aunque los retornos originales no sean iid.

b) Teoría de Valores Extremos condicionados vía QML y POT: Dowd (2005), McNeil y Frey (1999) y McNeil, Frey y Embrechts (2005) describen el proceso de aplicación de EVT para obtener modelos EV condicionados. Puede ser descrito concisamente en tres pasos. En primer lugar, se estima algún proceso dinámico (por ejemplo, GARCH (1;1)) por el método Cuasi-Máxima Verosimilitud (QML)<sup>20</sup>, es decir evitando cualquier supuesto sobre la distribución de las innovaciones aleatorias. Este procedimiento es usualmente denominado “*pre-withening*” (de los datos). Luego se calculan los residuos estandarizados con lo que en esta etapa deben aparecer características de iid. El GARCH dinámico se emplea para predecir los futuros niveles de volatilidad. En segundo lugar, se aplica EVT a los residuos estandarizados (vía POT para este caso específico). Finalmente, se efectúa el cálculo de los valores del VaR considerando tanto la estructura dinámica del GARCH como el proceso de los residuos modelizado mediante EVT, como se menciona en 2.1, ecuación [2].

- Validación de las estimaciones del VaR:

*Backtesting* de la distribución de probabilidad modelada:

---

<sup>18</sup> Se ha realizado una comparación entre los diversos métodos. Los resultados obtenidos mediante los estimadores de Hill, M(GP1), Moment(GP), L-Moment(GP) y Drees-Pickands(GP), están disponibles para enviar a los interesados.

<sup>19</sup> Algunas soluciones alternativas para tener en cuenta la dependencia en los datos pueden ser el cálculo del índice extremo  $\theta$  o el filtrado de los datos originales mediante algún modelo de volatilidad condicional para aplicar EVT a la serie de residuos estandarizados e independientes. Véase por ejemplo a Danielsson (1997) y Brooks (2001).

<sup>20</sup> Pueden encontrarse detalles del método QML en McNeil, Frey and Embrechts (2005).



La idea subyacente consiste en verificar la consistencia entre el VaR estimado mediante una determinada distribución de probabilidad y las pérdidas reales. Por lo tanto, es necesario comparar la pérdida en un día determinado con el VaR estimado para ese mismo día, definiendo una excepción o violación como cada día en que la pérdida realmente ocurrida excede el VaR diario estimado. Este modelo fue generado por el Comité de Basilea en su Acuerdo de Capital de 1996 y mantenido hasta la fecha.

Sintéticamente, establece tres zonas ligadas a la cantidad de excepciones registradas en el período de evaluación, supuesto que el período muestral es estadísticamente representativo. Un valor del VaR pertenece a la Zona Verde y por lo tanto es aprobado si el número de violaciones del 1% VaR no excede el cuantil Bernoulli 95% (con  $p = 0.01$ ); corresponde a la Zona Amarilla y es sujeto a un estrecho control con un número de violaciones hasta el cuantil 99.99% de dicha distribución; y se caracteriza como poco confiable y sujeto a reestimación cuando ocurren más violaciones (Zona Roja). Expresando los conceptos previos en términos del tamaño de la muestra, un modelo aprueba estándares regulatorios cuando ocurre un máximo de 8 violaciones (1.67%) y permanece en duda cuando ocurren entre 9 y 14 excepciones (2.93%).

Test de cobertura incondicionada:

De acuerdo a Christoffersen (2003), su propósito reside en determinar si la diferencia entre la fracción  $\pi$  de violaciones producidas por un esquema de riesgo y la fracción esperada  $p$  es estadísticamente significativa. Esta prueba se lleva a cabo a partir de la razón de verosimilitud, que asintóticamente sigue una  $\chi_1^2$  cuando el número de observaciones  $T \rightarrow \infty$ :

$$LR_{uc} = -2 \ln \left\{ (1-p)^{T_0} p^{T_1} / \left[ (1-T_1/T)^{T_0} (T_1/T)^{T_1} \right] \right\} \approx \chi_1^2$$

donde  $T_1$  representa la cantidad de excepciones en la muestra (y  $T_0$  lo contrario).

No debe ser olvidada la existencia de otras numerosas pruebas. Sin embargo, este estudio se focaliza en el desempeño real de la estimación regulatoria, enfatizando la propiedad de cobertura incondicionada y dejando de lado connotaciones de eficiencia.<sup>21</sup>

<sup>21</sup> Véase Christoffersen (2003) para una referencia a los tests de independencia y de cobertura condicionada.

## 4. Contratación empírica

### 4.1. Datos

Se utilizarán retornos definidos como

$$r_{t+1} = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) = \ln P_{t+1} - \ln P_t$$

donde  $P_{t+1}$  es el precio ajustado por flujos de fondos producidos en el período del título en el momento  $t+1$  y el horizonte de tiempo  $\Delta t$  es un día.

Las Tablas N° 1 y N° 2 presentan varias estadísticas básicas concernientes a las series de retornos diarios. Pueden apreciarse hechos que son típicos de las series temporales financieras y que tienden a repetirse en distintos activos y mercados. En la Tabla N° 1 puede apreciarse que para cada mercado, tanto desarrollado como emergente, los p-valores determinados muestran que el promedio diario de retornos no es significativamente distinto a cero, de allí que las representaciones GARCH serán supuestas sin tendencia cuando sea considerada la ecuación de retornos (Ver Sección 2.2.2.). La asimetría constituye un indicador para calibrar el comportamiento de los retornos en las colas. Para todos los índices excepto para el JKSE toma valores negativos, indicando que las colas izquierdas son más prolongadas que las colas derechas. Consecuentemente los valores extremos aparentan estar mayormente concentrados en el lado negativo de la distribución, confirmando en principio la asimetría provocada por los cracks bursátiles. (Jondeau y Rockinger (1999)). El grado conjunto de altura de la curva de densidad y del ancho de la cola es medido por la kurtosis: para todos los índices considerados su valor excede ampliamente a 3 (FTSE100 (a) 11 y STRAIT (a) 12), evidenciando claramente la no normalidad. En la Tabla 2 los correspondientes tests de Jarque-Bera reafirman el rechazo intuitivo de la hipótesis nula de normalidad (p-valores = 0). Además, estandarizando las series de retornos para comparar los percentiles empíricos con los teóricos en el supuesto de normalidad, se determina que para cada serie existe una desviación sustancial de la distribución de Gauss: por ejemplo,  $q_5$  y  $q_{95}$  son menores en valor absoluto que los predichos por la distribución normal (1.6445), mientras que los  $q_1$  y  $q_{99}$  empíricos superan en valor absoluto los teóricos (2.326). Dichos hallazgos refuerzan la evidencia de distribuciones leptokúrticas, con colas más “gordas” y centros más estrechos que la distribución de Gauss.

Al estudiar las características de la autocorrelación, los valores del test de Box-Ljung portmanteau  $Q(k)$  para  $k = 20$  lags (retardos) (téngase presente que  $Q(k) \sim \chi^2_k$ ) indican que para el 95% y el 99% no es posible rechazar la hipótesis nula de independenciam serial de los retornos lineales. La evidencia probable de una autocorrelación leve (por lo menos) debería tomarse como una advertencia acerca de la utilización del modelo EVT adoptando el supuesto de iid, aunque (por supuesto) aplican las consideraciones mencionadas en la Sección 3. Resultados análogos se obtienen con retornos al cuadrado, aunque los valores grandes de  $Q(k)$  para estos tests sugirieren la presencia de un mayor grado de heterocedasticidad, respaldando en principio la utilización de los modelos de volatilidad condicionada.

**Tabla N°1**  
***Estadísticas básicas – Mercados desarrollados***

<b>Parámetro/ Índice</b>	<b>SMI</b>	<b>DAX</b>	<b>FTSE100</b>	<b>CAC40</b>	<b>IGBM</b>	<b>STRAIT</b>
Observaciones	4060	4059	5746	5081	5934	4749
Media	0.00045	0.00037	0.00030	0.00026	0.00054	0.00027
Mediana	0.00085	0.00079	0.00062	0.00000	0.00018	0.00026
Máximo	0.07462	0.07553	0.07597	0.08225	0.06940	0.12874
Mínimo	-0.08383	-0.09871	-0.13029	-0.10138	-0.09734	-0.10545
Desvío std.	0.01124	0.01400	0.01019	0.01305	0.01135	0.01239
Asimetría	-0.21486	-0.20871	-0.54654	-0.28645	-0.34134	-0.04900
Curtosis	7.88219	6.76466	11.13992	7.78870	8.12294	12.96032

**Tabla N°1 (cont.)**  
***Estadísticas básicas – Mercados emergentes***

<b>Parámetro/ Índice</b>	<b>JKSE</b>	<b>TAS</b>	<b>IPCC</b>	<b>ISE</b>
Observaciones	2299	1910	3777	4954
Media	0.00039	0.00061	0.00077	0.00174
Mediana	0.00059	0.00031	0.00074	0.00014
Máximo	0.13128	0.07692	0.12154	0.17774
Mínimo	-0.12732	-0.10382	-0.14314	-0.19979
Desvío std.	0.01837	0.01453	0.01636	0.02904
Asimetría	0.01495	-0.35585	-0.01223	-0.05093
Curtosis	9.76440	6.91726	8.45403	6.52779

**Tabla N°2**  
***Comparación con la Distribución Normal – Mercados desarrollados***

<b>Parámetro</b>	<b>SMI</b>	<b>DAX</b>	<b>FTSE100</b>	<b>CAC40</b>	<b>IGBM</b>	<b>STRAIT</b>
Jarque-Bera	4051.08 (0.00)	2418.61 (0.00)	16117.6 (0.00)	4916.40 (0.00)	6596.20 (0.00)	20548.4 (0.00)
Q(20)	58.6 (0.00)	45.5 (0.00)	69.1 (0.00)	33.3 (0.03)	137.1 (0.00)	108.17 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	3000.1 (0.00)	3830.1 (0.00)	3345.9 (0.00)	3548.0 (0.00)	2706.9 (0.00)	1539.6 (0.00)
q(0.01)	-6.558	-6.143	-9.073	-7.386	-8.039	-7.998
q(1.00)	-2.955	-2.910	-2.811	-2.831	-2.839	-2.700
q(5.00)	-1.558	-1.639	-1.549	-1.598	-1.581	-1.477
q(10.00)	-1.100	-1.123	-1.134	-1.108	-1.109	-1.006
q(90.00)	+1.075	+1.071	+1.073	+1.091	+1.103	+1.032
q(95.00)	+1.489	+1.512	+1.438	+1.500	+1.562	+1.417
q(99.00)	+2.462	+2.623	+2.529	+2.626	+2.641	+2.716
q(99.99)	+6.246	+5.290	+6.472	+5.806	+5.766	+8.826

*Nota: p-valores entre paréntesis*

**Tabla N°2 (cont.)**  
***Comparación con la Distribución Normal – Mercados emergentes***

<b>Parámetro</b>	<b>JKSE</b>	<b>TAS</b>	<b>IPCC</b>	<b>ISE</b>
Jarque-Bera	4360.83 (0.00)	1253.11 (0.00)	4666.33 (0.00)	2566.52 (0.00)
Q(20)	104.7 (0.00)	30.7 (0.06)	82.8 (0.00)	90.6 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	667.37 (0.00)	198.3 (0.00)	934.2 (0.00)	1370.7 (0.00)
q(0.01)	-6.728	-6.854	-7.815	-6.289
q(1.00)	-2.726	-2.649	-2.559	-2.827
q(5.00)	-1.498	-1.545	-1.520	-1.574
q(10.00)	-1.027	-1.140	-1.096	-1.079
q(90.00)	+1.014	+1.155	+1.090	+1.145
q(95.00)	+1.498	+1.525	+1.520	+1.605
q(99.00)	+2.877	+2.384	+2.794	+2.787
q(99.99)	+6.921	+5.150	+7.076	+5.944

*Nota: p-valores entre paréntesis*

#### 4.2. Parámetros del modelo

La Tabla N° 3 -Paneles A y B- muestran los resultados del proceso de estimación, siendo significativos los estadísticos para el nivel de confianza habitual de acuerdo a lo indicado por sus p-valores. Las parametrizaciones del GARCH para todas las series, realizan un trabajo fundamental removiendo la alta dependencia temporal en la varianza. Existe una importante reducción en el estadístico  $Q^2_{20}$  para los residuos cuadráticos estandarizados  $\varepsilon_t^2 / \sigma_t^2$  comparados con los retornos cuadráticos puros o brutos, hecho verificado tanto para los mercados maduros como para los emergentes. Por ejemplo, el valor  $Q^2_{20}$  para DAX (serie con el mayor nivel de autocorrelación cuadrática) cae de 3830,1 a 2,23 para la especificación normal y a 2.17 para la de la t de Student(d); los mismos valores para STRAIT son 1539.6 contra 3.20 (Normal) y 0.02 (Student-t(d)). El comportamiento del resto de los índices es similar. A efectos de poder aseverar la adecuación de las representaciones GARCH, las series de residuos estandarizados deben conformar un proceso SWN<sup>22</sup>. Esto es habitualmente corroborado aplicando el test Ljung-Box portmanteau a los valores absolutos o cuadrados de las series: los p-valores para todos los índices sugieren la presencia de un proceso SWN.

Los coeficientes GARCH muestran una característica común observada en series de retornos de alta frecuencia: un alto grado de persistencia. Para todas las series en ambos grupos los valores de  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$  son claramente mayores que 0.90, alcanzando 0.99 para DAX, FTSE100 e IGBM (Student – t(d)), casi en el punto del modelo IGARCH ( $(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) = 1$ ) adecuado para series temporales no estacionarias. La consecuencia es que las varianzas condicionales son procesos con memoria de muy largo plazo dado que los efectos de los shocks sobre la volatilidad declinan suavemente con el tiempo. También surge claramente de los coeficientes del modelo GARCH que la volatilidad está principalmente explicada por los últimos períodos de los pronósticos de la varianza representados por el coeficiente  $\hat{\beta}$  que mide la extensión de la persistencia del shock: cuanto más cerca de 1 esté, las observaciones pasadas adquieren mayor peso relativo en detrimento de las más recientes, produciendo entonces series muy suaves. La Tabla N° 4 –Paneles A y B- muestra también una reducción sustancial de la kurtosis en los residuos estandarizados, no obstante lo cual puede ser verificada la presencia de kurtosis no capturada. Sin embargo, en los casos SMI, DAX, IGBM y STRAIT los modelos parecen haber fallado en reducir el exceso de kurtosis: podría hallarse una posible solución intentando ajustar un modelo GARCH con más retardos o bien alguna extensión a la clase del GARCH (McNeil, Frey and Embrechts (2005)).

Como fuera mencionado precedentemente, dada la evidencia razonable que los residuos estandarizados se comportan como SWN, la hipótesis SWN no es rechazada y la dinámica del proceso es capturada satisfactoriamente (McNeil, Frey y Embrechts (2005)). Por lo tanto, la adecuada elección de la distribución empleada para el ajuste por ML puede también ser evaluada por medio de los gráficos cuantil-cuantil (QQ plots). En este sentido, el Gráfico N° 4.1 revela que los modelos con las innovaciones distribuidas según la t(d) de Student claramente ajustan mejor a los datos siendo entonces preferidos a los modelos con términos aleatorios distribuidos normalmente, hecho que debería reflejarse en el momento de realizar el *Backtesting*. Sin embargo, pueden advertirse desviaciones de la distribución t(d) de Student para todas las series consideradas, particularmente en la cola inferior.

<sup>22</sup> Strict White Noise. El ruido blanco es un caso particular de proceso estocástico en el cual las variables aleatorias que lo forman no están correlacionadas y su valor esperado es cero.

**Tabla N°3**  
**Parámetros del Modelo**  
**Panel A: GARCH-Normal**

Parámetro/Índice	c	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$
SMI	0.00 (0.00)	0.12 (0.00)	0.83 (0.00)	0.95
DAX	0.00 (0.00)	0.08 (0.00)	0.90 (0.00)	0.98
FTSE100	0.00 (0.00)	0.09 (0.00)	0.89 (0.00)	0.98
CAC40	0.00 (0.00)	0.09 (0.00)	0.89 (0.00)	0.98
IGBM	0.00 (0.00)	0.09 (0.00)	0.88 (0.00)	0.97
JKSE	0.00 (0.00)	0.13 (0.00)	0.85 (0.00)	0.98
TAS	0.00 (0.00)	0.10 (0.00)	0.83 (0.00)	0.93
IPCC	0.00 (0.00)	0.11 (0.00)	0.87 (0.00)	0.98
ISE	0.00 (0.00)	0.13 (0.00)	0.84 (0.00)	0.97
STRAIT	0.00 (0.00)	0.15 (0.00)	0.81 (0.00)	0.96

*Nota: p-valores entre paréntesis*

**Panel B: GARCH t(d)**

Parámetro/Índice	c	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	dof (d)
SMI	0.00 (0.00)	0.10 (0.00)	0.88 (0.00)	0.98	9.01 (0.00)
DAX	0.00 (0.00)	0.08 (0.00)	0.91 (0.00)	0.99	9.05 (0.00)
FTSE100	0.00 (0.00)	0.08 (0.00)	0.91 (0.00)	0.99	14.99 (0.00)
CAC40	0.00 (0.00)	0.07 (0.00)	0.91 (0.00)	0.98	8.84 (0.00)
IGBM	0.00 (0.00)	0.11 (0.00)	0.88 (0.00)	0.99	6.24 (0.00)
JKSE	0.00 (0.00)	0.13 (0.00)	0.84 (0.00)	0.97	4.51 (0.00)
TAS	0.00 (0.00)	0.08 (0.00)	0.88 (0.00)	0.96	5.67 (0.00)
IPCC	0.00 (0.00)	0.10 (0.00)	0.88 (0.00)	0.98	6.94 (0.00)
ISE	0.00 (0.00)	0.18 (0.00)	0.80 (0.00)	0.98	5.59 (0.00)
STRAIT	0.00 (0.00)	0.14 (0.00)	0.83 (0.00)	0.97	5.58 (0.00)

*Nota: p-valores entre paréntesis*

**Tabla N°4**  
**Residuos estandarizados – Estadísticas básicas**

**Panel A: GARCH-Normal – Mercados desarrollados**

Parámetro/Índice	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM	STRAIT
Media	0.06647	0.05792	0.05010	-0.02541	-0.02275	-0.02297
Mediana	0.11276	0.08678	0.09134	-0.03689	-0.05247	-0.01958
Desvío standard	1.01700	1.00141	1.01157	0.99973	0.99975	1.00011
Máximo	6.14365	4.71254	6.05533	4.45662	5.68601	7.05121
Mínimo	-12.49220	-12.89926	-6.74117	-9.59223	-12.46625	-14.1326
Asimetría	-1.03194	-1.11132	-0.29912	-0.42514	-0.74225	-0.70066
Curtosis	13.94177	15.98199	4.92428	5.71614	11.80872	14.24543
Jarque-Bera	11969.4 (0.00)	16747.3 (0.00)	392.0 (0.00)	1715.2 (0.00)	19729.9 (0.00)	25417.1 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	3.25 (1.00)	2.23 (1.00)	65.30 (0.00)	13.60 (0.85)	3.60 (1.00)	3.20 (1.00)

*Nota: p-valores entre paréntesis*

**Panel A: GARCH-Normal – Mercados emergentes**

Parámetro/Índice	JKSE	TAS	IPCC	ISE
Media	0.02863	0.04123	0.02800	0.00178
Mediana	0.03936	0.02361	0.00572	-0.03684
Desvío standard	0.99958	0.99937	1.03673	1.00021
Máximo	5.27746	5.49027	4.54495	5.30486
Mínimo	-6.31898	-5.42487	-7.08672	-6.90307
Asimetría	-0.32284	-0.30480	-0.17958	-0.22602
Curtosis	6.28364	5.54905	4.86883	5.51778
Jarque-Bera	1072.8 (0.00)	546.7 (0.00)	349.6 (0.00)	1351.0 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	19.00 (0.52)	16.60 (0.68)	41.30 (0.00)	37.80 (0.01)

*Nota: p-valores entre paréntesis*

**Panel B: GARCH-t(d) – Mercados desarrollados**

Parámetro/Índice	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM	STRAIT
Media	0.06774	0.05807	0.04987	-0.03551	-0.01777	-0.02279
Mediana	0.11729	0.08851	0.09034	-0.04385	-0.04605	-0.01938
Desvío standard	1.04006	1.03180	1.01429	1.00527	1.02456	1.02028
Máximo	6.50999	5.30759	6.17876	4.23568	6.06986	7.24701
Mínimo	-14.14280	-14.27955	-6.79766	-9.91825	-15.41816	-14.77342
Asimetría	-1.31237	-1.34570	-0.30375	-0.45700	-1.11343	-0.75439
Curtosis	18.9723	20.05780	5.05998	5.98558	18.57719	15.08551
Jarque-Bera	25294.2 (0.00)	28789.8 (0.00)	445.3 (0.00)	2064.5 (0.00)	61221.0 (0.00)	29358.2 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	3.09 (1.00)	2.17 (1.00)	80.13 (1.00)	14.40 (0.81)	4.60 (1.00)	0.02 (1.00)

Nota: p-valores entre paréntesis

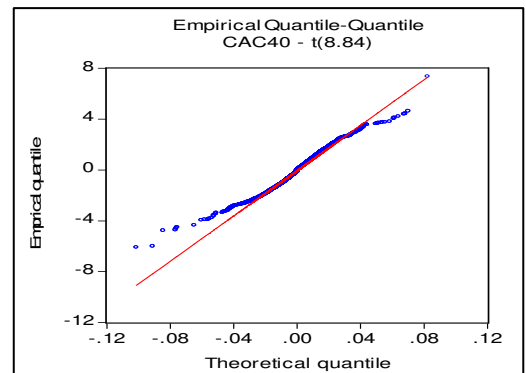
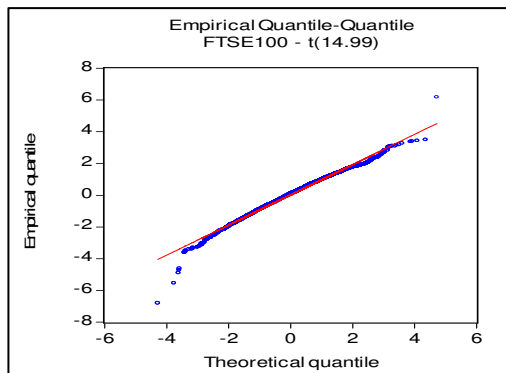
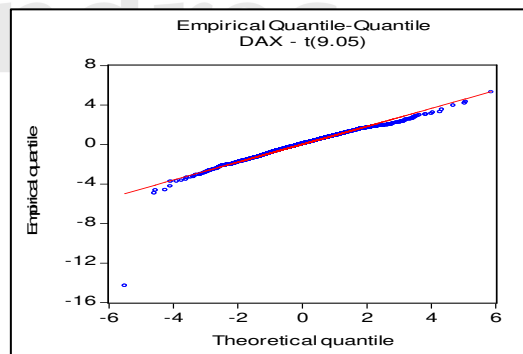
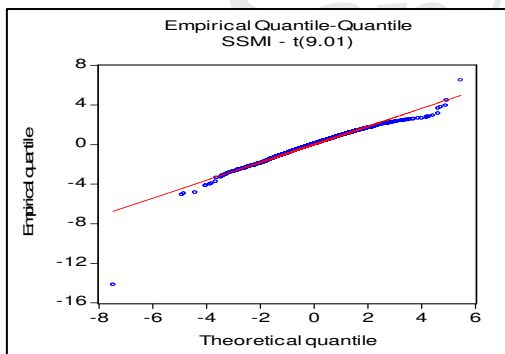
**Panel B: GARCH-t(d) – Mercados emergentes**

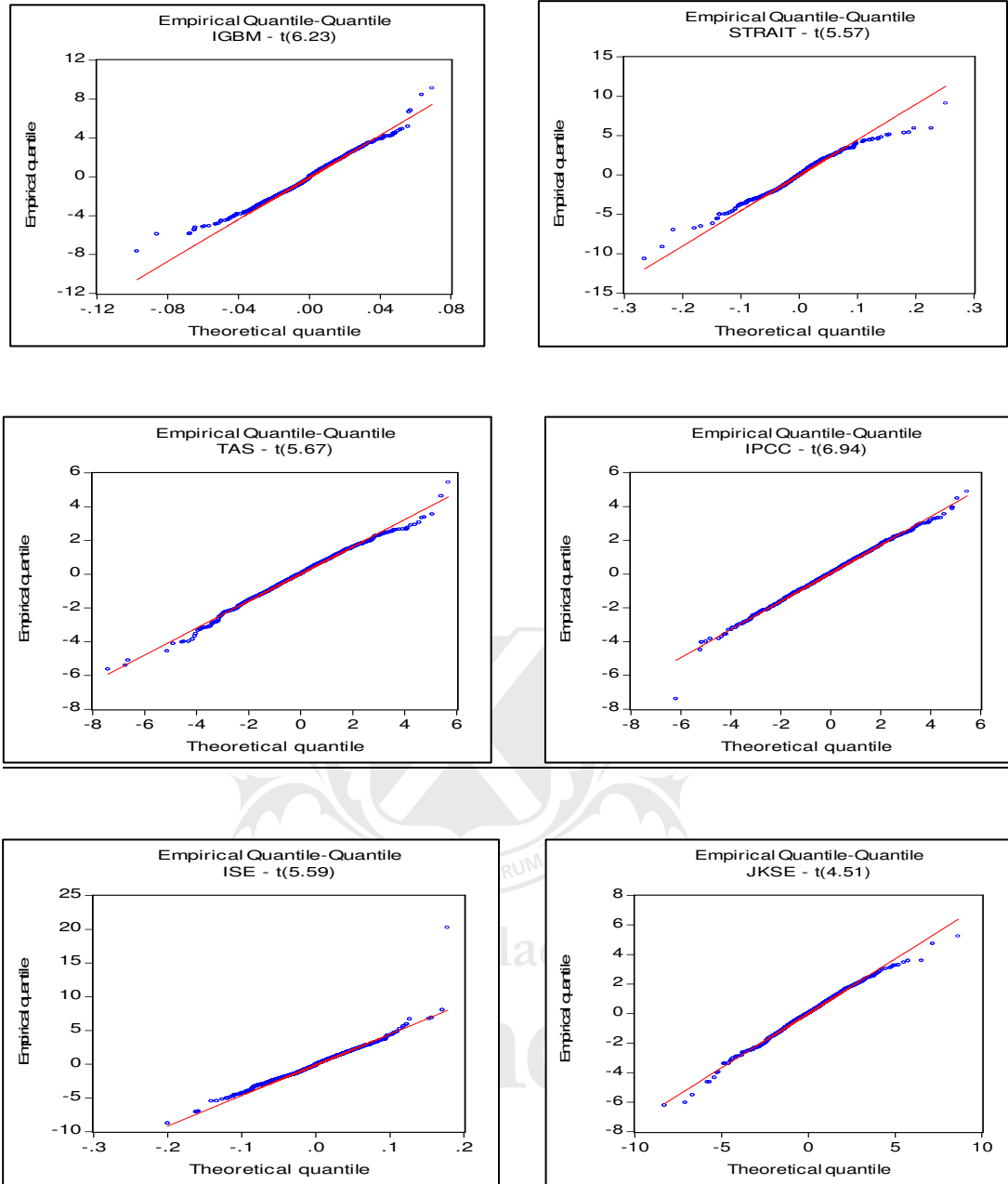
Parámetro/Índice	JKSE	TAS	IPCC	ISE
Media	0.02690	0.03222	0.02872	-0.00605
Mediana	0.03941	0.01351	0.00563	-0.04221
Desvío standard	0.98667	0.99834	1.03814	0.99824
Máximo	5.24636	5.44713	4.48714	5.45111
Mínimo	-6.20582	-5.62360	-7.38756	-7.56200
Asimetría	-0.33884	-0.36453	-0.19422	-0.25372
Curtosis	6.37294	5.53795	5.01418	5.82244
Jarque-Bera	1133.8 (0.00)	673.1 (0.00)	406.2 (0.00)	1697.8 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	21.10 (0.39)	22.46 (0.34)	43.86 (0.00)	36.51 (0.01)

Nota: p-valores entre paréntesis

**Grafico 4.1**

**Gráficos QQ – Cuantiles empíricos vs Distribución de Student-t(d) teórica**





Los resultados ML para los esquemas EVT-GPD de EVT incondicionado están presentados en la Tabla N° 5 –Paneles A y B-. A pesar de la ausencia de reglas precisas referidas a la cantidad de estadísticos de altos órdenes, se usan menos del 10% de los datos para el análisis de los extremos, aún considerando ambas colas de la distribución. Desafortunadamente no resulta posible extraer conclusiones generales en base a las estimaciones de locación y de escala; por lo tanto, deben emplearse tanto la inspección visual como los tests formales para determinar diferencias en las colas para los mercados maduros y emergentes. Es dable reconocer que sólo con estos elementos no se aprecian diferencias claras.

Sin embargo, los valores de  $\mu^+$  y  $\sigma^+$  muestran diferencias con sus contrapartes izquierdas  $\mu^-$  y  $\sigma^-$  para todos los índices, hecho que, acoplado a las estimaciones del índice de cola  $\xi$ , podría indicar la existencia de asimetría entre las colas derecha e izquierda de la distribución.

Habiendo señalado la disparidad en términos de locación y escala, debe ser tratado el caso del índice de cola. De los valores obtenidos surge claramente que ambas colas de las

distribuciones son anchas para todos los grupos ( $\xi > 0$ ). Registros positivos para  $\xi^-$  y  $\xi^+$  significan que las distribuciones son de cola pesada en ambos extremos y en consecuencia pertenecen a la clásica Distribución General de Pareto (GPD), en particular la que corresponde a la familia Fréchet en la Teoría de Valores Extremos (EVT)<sup>23</sup>. Además, excepto para el caso del JKSE donde  $\xi^-$  y  $\xi^+$  son aproximadamente similares (0.1609 y 0.1586), los valores para los nueve índices restantes sugieren una apreciable diferencia entre las colas izquierda y derecha aunque no es posible hacer afirmaciones más precisas sin realizar tests formales. Para este ejemplo particular, cinco índices muestran  $\xi^- < \xi^+$ , lo que implica que la cola derecha es menos ancha que la izquierda. Por el contrario, FTSE100, CAC40, IGBM y STRAIT presentan la relación opuesta. Los intervalos de confianza al 95% muestran que, en primera instancia, la mayoría de los valores de  $\xi$  aparentan ser positivos, hecho consistente con la idea de distribuciones no acotadas, aunque la existencia de un lado negativo del rango no puede ser ignorada (excepto la cola izquierda del FTSE100, CAC40, IGBM y IPCC y la cola derecha del SMI, IPCC y STRAIT, donde el intervalo está completamente inclinado hacia la derecha). El estudio no es concluyente respecto a este tema dado que existe solamente evidencia débil para excluir valores cero para  $\xi$  y consecuentemente rechazar la hipótesis nula  $\xi = 0$  (distribución tipo exponencial). Del análisis anterior, no es posible inferir diferencias significativas entre los mercados desarrollados y los emergentes.

Como se expresó en los primeros párrafos, aunque las probabilidades de Gauss y de Student-t tuvieron un razonable buen desempeño modelando la dinámica del proceso, los residuos estandarizados en los gráficos QQ no se comportan como iid normal estándar o Student-t estandarizada, dando lugar al análisis expuesto en 3. Los resultados para EVT aplicados a los datos *pre-whitened* son algo diferentes a aquellos obtenidos con los retornos sin tratar. (Tabla N° 5 – Paneles C y D). Nuevamente, no se registran evidencias concluyentes respecto a la locación izquierda y derecha como así tampoco a parámetros de escala, dificultando consecuentemente las conclusiones sobre diferencias entre grupos de mercados. Las variaciones aparecen en los índices de cola dado que se ha observado en general un aumento de  $\xi^-$ . En general, se verifica un aumento de  $\xi^-$  (excepto el descenso en FTSE100 y IPCC), más la disparidad es el común denominador entre los  $\xi^+$ , con intervalos de confianza que reflejan este desplazamiento lateral. McNeil, Frey y Embrechts (2005) ofrecen una explicación plausible sobre la divergencia en los resultados al establecer que el proceso de QML es intrínsecamente más impreciso que el ML porque conlleva dos clases de errores: estimación dinámica (ajuste GARCH) y calibración de GPD de los residuos estandarizados. Agregan que errores en la estimación en QML pueden crecer de tal manera que pueden llegar a ser muy difíciles de rastrear y cuantificar, implicando así en alguna medida valores inexactos de los parámetros.

No obstante las fallas en la etapa de ajuste del modelo, los hechos antes mencionados confirman, en principio, la evidencia de distribuciones asimétricas y leptokúrticas características de las series de retornos financieros, mostrando entonces que la distribución normal es inadecuada para describir el comportamiento del mercado<sup>24</sup>. Así es que los modelos basados en EVT tienen la ventaja de tomar en cuenta la asimetría de las distribuciones originando, de esta manera, predicciones más exactas.

<sup>23</sup> Ver la sección 2.2.3.1

<sup>24</sup> Fama (1963) y Mandelbrot (1963) produjeron los primeros estudios acerca de la no normalidad de las series financieras. A pesar que este concepto es corriente en la actualidad, aún algunos analistas continúan usando modelos gaussianos al realizar ajustes como el VaR de Cornish-Fisher o bien otros procedimientos ad-hoc. Al respecto puede consultarse Da Costa Lewis (2002), Christoffersen (2003) o Penza y Bansal (1999).



**Tabla N°5**  
**Parámetros Distribución Generalizada de Pareto (GPD)**  
**Estimación por Máxima Verosimilitud**

**Panel A: GPD Incondicional – Valores cola izquierda – Mercados desarrollados**

Parámetro/Índice	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM	STRAIT
$u^-$ (cantidad)	156 (3.84%)	224 (5.20%)	250 (4.17%)	152 (2.99%)	166 (2.80%)	200 (4.21%)
$u^-$ (valor)	-0.02011	-0.02172	-0.01632	-0.02538	-0.02229	-0.01939
$\xi^-$	0.1264	0.0665	0.2001	0.1867	0.1820	0.2218
Int. Confianza	(-0.02;0.27)	(-0.05;0.18)	(0.07;0.33)	(0.03;0.34)	(0.03;0.33)	(-0.11;0.25)
$\mu^-$	-0.0446	-0.1299	-0.0173	-0.0444	-0.0172	-0.0021
$\sigma^-$	0.0512	0.1373	0.0255	0.0514	0.0272	0.0284

**Panel A: GPD Incondicional – Valores cola izquierda – Mercados emergentes**

Parámetro/Índice	JKSE	TAS	IPCC	ISE
$u^-$ (cantidad)	139 (6.05%)	86 (4.50%)	219 (5.80%)	62 (1.25%)
$u^-$ (valor)	-0.02516	-0.02331	-0.02325	-0.07650
$\xi^-$	0.1608	0.1588	0.1979	0.1117
Int. Confianza	(0.00;0.32)	(-0.05;0.36)	(0.06;0.33)	(-0.12;0.34)
$\mu^-$	-0.0554	-0.0383	-0.0234	-0.0986
$\sigma^-$	0.0586	0.0417	0.0345	0.1284

**Panel B: GPD Incondicional – Valores cola derecha – Mercados desarrollados**

Parámetro/Índice	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM	STRAIT
$u^+$ (cantidad)	203 (5.00%)	93 (2.29%)	201 (3.50%)	205 (4.88%)	131 (3.12%)	195 (4.64%)
$u^+$ (valor)	0.0172	0.0291	0.0176	0.02130	0.02489	0.0197
$\xi^+$	0.2642	0.1191	0.1222	0.1289	0.0988	0.1918
Int. Confianza	(0.08;0.45)	(-0.08;0.32)	(-0.01;0.25)	(0.00;0.26)	(-0.06;0.26)	(0.11;0.56)
$\mu^+$	-0.0516	-0.0520	-0.0349	-0.0450	-0.050	-0.0281
$\sigma^+$	0.0147	0.0611	0.0431	0.0541	0.061	0.0350

**Panel B: GPD Incondicional – Valores cola derecha – Mercados emergentes**

Parámetro/Índice	JKSE	TAS	IPCC	ISE
$u^+$ (cantidad)	100 (4.35%)	56 (2.60%)	46 (1.22%)	86 (2.05%)
$u^+$ (valor)	0.0298	0.0285	0.0455	0.0734
$\xi^+$	0.1586	0.2732	0.2694	0.1540
Int. Confianza	(0.00;0.32)	(-0.05;0.36)	(0.06;0.33)	(-0.05;0.36)
$\mu^+$	-0.0581	0.0058	0.0106	-0.0277
$\sigma^+$	0.0610	0.0103	0.0152	0.0693

**Panel C: GPD Condicional – Valores cola izquierda – Mercados desarrollados**

Parámetro/Índice	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM	STRAIT
$u^-$ (cantidad)	124 (3.05%)	201 (4.95%)	245 (4.26%)	152 (2.99%)	171 (2.88%)	143 (3.01%)
$u^-$ (valor)	-1.9781	-1.6410	-1.7403	-1.9841	-1.9509	-1.9081
$\xi^-$	0.2503	0.1758	0.1175	0.2852	0.3100	0.3611
Int. Confianza	(0.07;0.43)	(0.04;0.31)	(0.00;0.23)	(0.11;0.46)	(0.14;0.47)	(0.17;0.55)
$\mu^-$	0.2503	-1.0445	-2.2707	0.5306	0.3846	0.6394
$\sigma^-$	1.0249	2.0258	3.4006	0.8529	0.9067	0.6293

**Panel C: GPD Condicional – Valores cola izquierda – Mercados emergentes**

Parámetro/Índice	JKSE	TAS	IPCC	ISE
$u^-$ (cantidad)	175 (7.62%)	150 (7.86%)	107 (2.83%)	90 (1.82%)
$u^-$ (valor)	-1.3107	-1.2900	-2.0211	-2.2892
$\xi^-$	0.1766	0.2180	0.1702	0.1823
Int. Confianza	(0.03;0.32)	(0.05;0.38)	(-0.01;0.36)	(-0.02;0.39)
$\mu^-$	-1.9775	-1.1351	-0.7949	-1.1562
$\sigma^-$	2.4176	1.6039	1.9252	2.2226

**Panel D: GPD Condicional – Valores cola derecha – Mercados desarrollados**

Parámetro/Índice	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM	STRAIT
$u^+$ (cantidad)	71 (1.75%)	203 (5.00%)	258 (4.49%)	24 (0.47%)	52 (0.88%)	129 (2.72%)
$u^+$ (valor)	2.0441	1.6000	1.6364	2.6337	2.4206	1.8355
$\xi^+$	0.3773	0.1836	0.1114	0.1840	0.3212	0.2445
Int. Confianza	(0.11;0.65)	(0.05;0.32)	(0.00;0.22)	(-0.21;0.58)	(0.01;0.61)	(0.06;0.42)
$\mu^+$	1.3544	-0.2098	-1.5556	1.1025	1.3075	-0.1486
$\sigma^+$	0.3658	1.3058	2.4610	0.7714	0.4430	1.2034

**Panel D: GPD Condicional – Valores cola derecha – Mercados emergentes**

Parámetro/Índice	JKSE	TAS	IPCC	ISE
$u^+$ (cantidad)	82 (3.57%)	69 (3.21%)	109 (2.89%)	67 (1.35%)
$u^+$ (valor)	1.8310	1.7700	1.9765	2.4087
$\xi^+$	0.1416	0.0801	0.1205	0.1034
Int. Confianza	(-0.06;0.35)	(-0.13;0.29)	(-0.06;0.30)	(-0.12;0.33)
$\mu^+$	-1.6124	-4.6183	-1.5572	-1.9546
$\sigma^+$	1.9977	4.8111	2.3181	3.3007

**4.3. Pronósticos del VaR**

La crisis global que comenzó en septiembre de 2008 y afectó ostensiblemente los mercados financieros constituye un buen test de estrés para evaluar los modelos utilizados. En este sentido, es importante resaltar que en 2008 (segundo año del período de prueba o *backtesting*) la volatilidad (medida por el desvío estándar) se duplica en promedio en comparación con el período de estimación: SMI: 2.21% vs. 1.12%, FTSE100: 2.36% vs. 1.02%, DAX: 2.37% vs. 1.40%, CAC40: 2.51% vs. 1.31%, IGBM: 2.39% vs. 1.13%, STRAIT: 2.20% vs. 1.24%, JKSE: 2.48% vs. 1.84%, TAS: 2.38% vs. 1.45%, IPCC: 2.28% vs. 1.64%, verificándose que el incremento es algo menor para los mercados emergentes por su inherente naturaleza volátil. La única excepción es el índice ISE donde la volatilidad decrece desde 2.90% a 2.67%.<sup>25</sup>

Los resultados mostrados en la tabla N° 6, Columnas 2 y 4, Paneles B a K, revelan que el desempeño varía según los modelos y los supuestos referidos a la distribución. Es evidente que el modelo HS no condicionado tiene un resultado muy pobre, ya que se originan muchas violaciones en ambas colas mientras que el resto provee estimaciones adecuadas para las colas superiores de todas las distribuciones, exceptuando el EVT condicionado para Francia y el

<sup>25</sup> Los valores del período de estimación están influidos por la crisis financiera turca de 2000-2001.

GARCH-Normal para IGBM. Al considerar la cola izquierda se verifican serios déficits en el GARCH-Normal ya que el número de violaciones supera el valor esperado (la diferencia es apreciable para GARCH-Normal en FTSE100, IGBM, JKSE, TAS y STRAIT, donde las excepciones aproximadamente triplican la cantidad esperada de 5). GARCH-t aparenta funcionar mejor, alternando resultados notables (STRAIT) con algunos deficientes (FTSE100). Sin embargo, los modelos no hacen distinción entre mercados maduros y emergentes. Los procedimientos basados en el modelo EVT muestran mejoras significativas en ambas versiones: exceptuando las colas derechas en SMI y CAC40 en el EVT condicionado, el modelo (EVT) brinda entre 0 y 5 infracciones (número menor o igual que el esperado), resultando un excelente desempeño al 99% de confianza. Estos métodos son especialmente concebidos para modelar cambios violentos en los mercados: el EVT no condicionado, como toda representación incondicionada, es más adecuado para períodos de pronóstico largos mientras que el EVT condicionado, siendo un método condicional, es capaz de responder a los abruptos cambios en la volatilidad durante el 2008.

**Tabla N°6*****Backtesting de la distribución de probabilidades Modelizada******Panel A: Tabla reescalada para n=471-507 observaciones  
Distribución de Bernoulli con p=0.90%***

<b>Excepciones</b>	<b>Zona</b>	<b>Multiplicador k</b>
0 – 8	Verde	0.00 = 0%
9	Amarilla	0.13 = 13%
10	Amarilla	0.16 = 16%
11	Amarilla	0.20 = 20%
12	Amarilla	0.23 = 23%
13	Amarilla	0.26 = 26%
14	Amarilla	0.30 = 30%
15 o mayor	Roja	0.33 = 33%

***Panel B: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada - SMI***

<b>Modelo / Cola</b>	<b>Cola izquierda Número</b>	<b>Cola izquierda Zona – Mult. k</b>	<b>Cola derecha Número</b>	<b>Cola derecha Zona-Mult. k</b>
<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
Simulación Histórica	22	Roja – 33%	23	Roja – 33%
GARCH-Normal	12	Amarilla – 23%	7	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	9	Amarilla – 13%	3	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	1	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	3	Verde – 0%	7	Verde – 0%

***Panel C: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada - DAX***

<b>Modelo / Cola</b>	<b>Cola izquierda Número</b>	<b>Cola izquierda Zona – Mult. k</b>	<b>Cola derecha Número</b>	<b>Cola derecha Zona-Mult. k</b>
<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
Simulación Histórica	20	Roja – 33%	18	Roja – 33%
GARCH-Normal	9	Amarilla – 13%	6	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	7	Verde – 0%	6	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	3	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	1	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**Panel D: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – FTSE100**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	26	Roja – 33%	26	Roja – 33%
GARCH-Normal	16	Roja – 33%	7	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	15	Roja – 33%	4	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	3	Verde – 0%	4	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	0	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**Panel E: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – CAC40**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	26	Roja – 33%	24	Roja – 33%
GARCH-Normal	8	Verde – 0%	7	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	5	Verde – 0%	4	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	4	Verde – 0%	1	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	3	Verde – 0%	10	Amarilla – 16%

**Panel F: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – IGBM**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	26	Roja – 33%	26	Roja – 33%
GARCH-Normal	14	Amarilla – 30%	9	Amarilla – 13%
GARCH-Student-t(d)	7	Verde – 0%	2	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	5	Verde – 0%	3	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	4	Verde – 0%	4	Verde – 0%

**Panel G: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – STRAIT**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	22	Roja – 33%	23	Roja – 33%
GARCH-Normal	13	Amarilla – 26%	5	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	9	Amarilla – 13%	4	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	4	Verde – 0%	0	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	5	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**Panel H: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada - TAS**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	22	Roja – 33%	23	Roja – 33%
GARCH-Normal	15	Roja – 33%	5	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	11	Amarilla – 20%	2	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	1	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	0	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**Panel I: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada - IPCC**

Modelo / Cola	Cola izquierda Número	Cola izquierda Zona – Mult. k	Cola derecha Número	Cola derecha Zona-Mult. k
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Simulación Histórica	26	Roja – 33%	26	Roja – 33%
GARCH-Normal	8	Verde – 0%	5	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	7	Verde – 0%	4	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	2	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	1	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**Panel J: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada - ISE**

Modelo / Cola	Cola izquierda Número	Cola izquierda Zona – Mult. k	Cola derecha Número	Cola derecha Zona-Mult. k
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Simulación Histórica	21	Roja – 33%	12	Amarilla – 23%
GARCH-Normal	5	Verde – 0%	4	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	3	Verde – 0%	2	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	0	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	0	Verde – 0%	2	Verde – 0%

**Panel K: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada - JKSE**

Modelo / Cola	Cola izquierda Número	Cola izquierda Zona – Mult. k	Cola derecha Número	Cola derecha Zona-Mult. k
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Simulación Histórica	16	Roja – 33%	15	Roja – 33%
GARCH-Normal	17	Roja – 33%	6	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	10	Amarilla – 16%	1	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	0	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	0	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**4.4. Efectos en la Regulación del Capital**

La evaluación (*backtesting*) de la Distribución de Probabilidad Ajustada muestra la incapacidad de la Simulación Histórica para captar los movimientos ascendentes y descendentes de los índices, ya que sus valores pertenecen claramente a la Zona Roja. Por el otro lado, los modelos GARCH condicionados, con distribuciones de Gauss y t(d) de Student arrojan buenos resultados para todos los extremos positivos, con cantidades de excepciones clasificadas en la Zona Verde, con la única excepción del índice IGBM para GARCH-Normal (Zona Amarilla). En la cola izquierda se observan resultados diversos. GARCH-t tiene resultados ligeramente mejores que el GARCH-Normal, obteniendo uno en la Zona Roja (FTSE100), cinco en la Zona Verde (DAX, CAC40, IGBM, IPCC y ISE) y cuatro en la Zona Amarilla (SMI, JKSE, TAS y STRAIT), mientras que su contraparte provee tres resultados en la Zona Roja (FTSE100, JKSE y TAS), tres en la Zona Verde (CAC40, IPCC y ISE) y cuatro en la Zona Amarilla (SMI, DAX, IGBM y STRAIT). Casi todos los modelos, con excepción del de Simulación Histórica, podrían aprobar los tests regulatorios para posiciones cortas, pero la Simulación Histórica para Turquía, el GARCH-Normal en España y el GARCH-EVT en Francia eventualmente deberían ser inspeccionados. Por el contrario, para las posiciones largas el modelo de la Simulación Histórica siempre sería rechazado, al igual que ambos GARCH para el FTSE100. Las innovaciones

basadas en la  $t(d)$  de Student tendrían garantizada su aprobación en Alemania, Francia, España, México y Turquía y serían observados en Suiza, Indonesia, Israel y Singapur. Los shocks aleatorios normales podrían ser aprobados en Francia, México y Turquía, estudiados en Suiza, Alemania, España y Singapur y (serían) rechazados en Indonesia e Israel. Los modelos EVT (condicionados o no condicionados) otorgan incuestionables mejores resultados: tanto para posiciones cortas y largas como en mercados emergentes y desarrollados siempre se encuentran ubicados en la Zona Verde, excepto para la cola derecha en Francia donde el EVT condicionado sería puesto bajo análisis.

La importancia de la evaluación (*backtesting*) de la Distribución de Probabilidad Ajustada reside en su uso para la determinación de la Cantidad de Capital Regulatorio que debe constituirse para hacer frente al Riesgo de Mercado. El comité de Basilea prevé la aplicación de un factor (o multiplicador) variable con valores entre 0 y 1, dependiendo la citada cantidad del desempeño del modelo en la prueba (*backtesting*) ya mencionada. La Tabla N° 6 - Columnas 3 y 5 en Paneles B a K muestra el porcentaje de capital adicional que debe ser aportado para cumplir con las regulaciones: 33% para aquellos valores dentro de la Zona Roja, importes entre el 13% y el 30% para el rango Amarillo y la Zona Verde no requiere aportar capital suplementario.

Para la Simulación Histórica el resultado es el 33% de ajuste y su consecuente invalidez en todos los índices para ambas posiciones (cortas y largas) excepto en ISE (23%). Las posiciones cortas no demandan capital adicional para cualquiera de los otros modelos, con las excepciones del GARCH-Normal en IGBM (13%) y GARCH-EVT en CAC40 (16%). Para inversiones en posiciones largas aparecen algunas diferencias con una leve ventaja para GARCH-t sobre GARCH-Normal que se traduce en un menor ajuste de capital, salvo en los casos del FTSE100 donde ambas especificaciones serán descartadas y subsecuentemente re-estimadas, y del CAC40, IPCC e ISE, en los que ambos modelos superan los tests regulatorios. Para el resto de las series temporales evaluadas, las innovaciones GARCH-t requerirían menores ajustes de capital (valores gaussianos entre paréntesis): SMI, 13% (23%), DAX, 0% (13%), IGBM 0% (30%), JKSE, 16% (33%, necesidad de reformular el modelo), TAS, 20% (33%, necesidad de remodelización) y STRAIT, 13% (26%). Los modelos EVT, tanto el no condicionado como el GARCH-EVT dinámico, aprueban el test convincentemente, evitando consecuentemente la recalibración o el control estricto con la sola excepción de la cola superior del CAC40 en EVT condicionado, donde será requerido un capital suplementario del 16%.

El Comité de Basilea requiere el Test de Cobertura no Condicionada para evaluar las diferencias ente las fracciones de excepciones empíricas y las propuestas, cuyos p-valores se encuentran reproducidos en la tabla N° 7. Los resultados que surgen de las razones de verosimilitud son consistentes con la evaluación (*backtest*) de la Distribución de Probabilidad Ajustada, como era dable esperar.<sup>26</sup> La hipótesis nula  $\pi = p$ , calculada a un nivel de confianza del 90%, es rechazada para todos los casos que caen tanto en la Zona Roja como en la Amarilla. Las estimaciones que pertenecen a la Región Verde coinciden en que la hipótesis nula es aceptada.

---

<sup>26</sup> En la cola superior de SMI para EVT condicional se produce la única discrepancia, ya que la cantidad empírica de 7 violaciones se encuentra casi sobre el umbral de 8. Las autoridades deberían decidir la aplicación de ajustes adicionales en el modelo, no obstante el hecho que no se requiera capital adicional no debe ser descuidado.

**Tabla N°6****Backtesting de la distribución de probabilidades Modelizada****Panel A: Tabla reescalada para n=471-507 observaciones  
Distribución de Bernoulli con p=0.90%**

Excepciones	Zona	Multiplicador k
0 – 8	Verde	0.00 = 0%
9	Amarilla	0.13 = 13%
10	Amarilla	0.16 = 16%
11	Amarilla	0.20 = 20%
12	Amarilla	0.23 = 23%
13	Amarilla	0.26 = 26%
14	Amarilla	0.30 = 30%
15 o mayor	Roja	0.33 = 33%

**Panel B: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – SMI**

Modelo / Cola	Cola izquierda Número	Cola izquierda Zona – Mult. k	Cola derecha Número	Cola derecha Zona-Mult. k
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Simulación Histórica	22	Roja – 33%	23	Roja – 33%
GARCH-Normal	12	Amarilla – 23%	7	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	9	Amarilla – 13%	3	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	1	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	3	Verde – 0%	7	Verde – 0%

**Panel C: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – DAX**

Modelo / Cola	Cola izquierda Número	Cola izquierda Zona – Mult. k	Cola derecha Número	Cola derecha Zona-Mult. k
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Simulación Histórica	20	Roja – 33%	18	Roja – 33%
GARCH-Normal	9	Amarilla – 13%	6	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	7	Verde – 0%	6	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	3	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	1	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**Panel D: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – FTSE100**

Modelo / Cola	Cola izquierda Número	Cola izquierda Zona – Mult. k	Cola derecha Número	Cola derecha Zona-Mult. k
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Simulación Histórica	26	Roja – 33%	26	Roja – 33%
GARCH-Normal	16	Roja – 33%	7	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	15	Roja – 33%	4	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	3	Verde – 0%	4	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	0	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**Panel E: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – CAC40**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	26	Roja – 33%	24	Roja – 33%
GARCH-Normal	8	Verde – 0%	7	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	5	Verde – 0%	4	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	4	Verde – 0%	1	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	3	Verde – 0%	10	Amarilla – 16%

**Panel F: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – IGBM**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	26	Roja – 33%	26	Roja – 33%
GARCH-Normal	14	Amarilla – 30%	9	Amarilla – 13%
GARCH-Student-t(d)	7	Verde – 0%	2	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	5	Verde – 0%	3	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	4	Verde – 0%	4	Verde – 0%

**Panel G: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada - STRAIT**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	22	Roja – 33%	23	Roja – 33%
GARCH-Normal	13	Amarilla – 26%	5	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	9	Amarilla – 13%	4	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	4	Verde – 0%	0	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	5	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**Panel H: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – TAS**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	22	Roja – 33%	23	Roja – 33%
GARCH-Normal	15	Roja – 33%	5	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	11	Amarilla – 20%	2	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	1	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	0	Verde – 0%	0	Verde – 0%



**Panel I: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – IPCC**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	26	Roja – 33%	26	Roja – 33%
GARCH-Normal	8	Verde – 0%	5	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	7	Verde – 0%	4	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	2	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	1	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**Panel J: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada – ISE**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	21	Roja – 33%	12	Amarilla – 23%
GARCH-Normal	5	Verde – 0%	4	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	3	Verde – 0%	2	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	0	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	0	Verde – 0%	2	Verde – 0%

**Panel K: Backtesting de la distribución de probabilidades modelizada - JKSE**

Modelo / Cola (1)	Cola izquierda Número (2)	Cola izquierda Zona – Mult. k (3)	Cola derecha Número (4)	Cola derecha Zona-Mult. k (5)
Simulación Histórica	16	Roja – 33%	15	Roja – 33%
GARCH-Normal	17	Roja – 33%	6	Verde – 0%
GARCH-Student-t(d)	10	Amarilla – 16%	1	Verde – 0%
EVT Incondicional-GPD	0	Verde – 0%	0	Verde – 0%
EVT Condicional-GPD	0	Verde – 0%	0	Verde – 0%

**Tabla N°7****Prueba de cobertura incondicional – p-valores /  $p = 0.10\%$  /  $CV(X^2_1) = 2.7055$** 

Modelo Indice	SMI Izq.	SMI Der.	DAX Izq.	DAX Der.	FTSE <sup>1</sup> Izq.	FTSE <sup>1</sup> Der.	CAC <sup>2</sup> Izq.	CAC <sup>2</sup> Der.	IGBM Izq.	IGBM Der.	STR <sup>3</sup> Izq.	STR <sup>3</sup> Der.
Simulación Histórica	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R
GARCH- Normal	0.00 R	0.02 R	0.07 R	0.00 R	0.02 R	0.00 R	0.01 R	0.02 R	0.02 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R
GARCH- Student-t(d)	0.00 R	0.72 NR	0.02 R	0.07 R	0.00 R	0.37 NR	0.18 NR	0.38 NR	0.00 R	0.73 NR	0.17 NR	0.33 NR
EVT Incondicional- GPD	- NR	0.30 NR	- NR	0.81 NR	0.79 NR	0.37 NR	0.42 NR	0.28 NR	0.17 NR	0.77 NR	0.39 NR	- NR
EVT Condicional- GPD	0.78 NR	0.02 R	0.29 NR	- NR	- NR	- NR	0.81 NR	0.00 R	0.40 NR	0.39 NR	0.17 NR	- NR

*Notas:* (1), (2) y (3) refieren a FTSE100, CAC40 y STRAIT respectivamente.

“R” y “NR” significan “Rechazar” y “No Rechazar” la hipótesis nula respectivamente.

**Tabla N°7 (cont.)****Prueba de cobertura incondicional – p-valores /  $p = 0.10\%$  /  $CV(X^2_1) = 2.7055$** 

<b>Modelo Indice</b>	<b>JKSE Izq.</b>	<b>JKSE Der.</b>	<b>TAS Izq.</b>	<b>TAS Der.</b>	<b>IPCC Izq.</b>	<b>IPCC Der.</b>	<b>ISE Izq.</b>	<b>ISE Der.</b>
Simulación	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Histórica	R	R	R	R	R	R	R	R
GARCH- Normal	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.16	0.57
GARCH- Student-t(d)	0.00	0.24	0.00	0.85	0.01	0.43	0.38	0.93
EVT	-	-	-	0.33	-	0.68	-	-
Incondicional -GPD	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR
EVT Condicional- GPD	-	-	-	-	0.31	-	-	0.83
	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR

*Nota: “R” y “NR” significan “Rechazar” y “No Rechazar” la hipótesis nula respectivamente.*

#### 4.5. Niveles del VaR

El Gráfico N° 4.2 muestra en tiempo real las estimaciones del VaR para los modelos propuestos, observándose que se encuentran severamente afectadas por las fluctuaciones del año 2008. Es posible apreciar que los modelos basados en la Teoría de Valores Extremos realizan el mejor trabajo para cuantificar el riesgo de mercado, originando así menores pérdidas en comparación con HS o GARCH-Normal y GARCH-t. Sin embargo, como la cantidad de excepciones registradas por cualquier modelo es inversamente proporcional a los montos del VaR, la mayor precisión mostrada por el EVT se consigue a expensas de valores más altos del VaR. Aún cuando éstos pueden inicialmente aparecer algo excesivos, Alexander (2008:60) señala que “...carteras accionarias con volatilidades del 40%-60% pueden tener... un VaR de alrededor del 25% del valor del portafolio”. Considerando que los reguladores determinan los Requerimientos del Capital (CR) de acuerdo a la fórmula:

$$CR = 3*(1 + \theta)*VaR + C \quad [8]$$

donde:

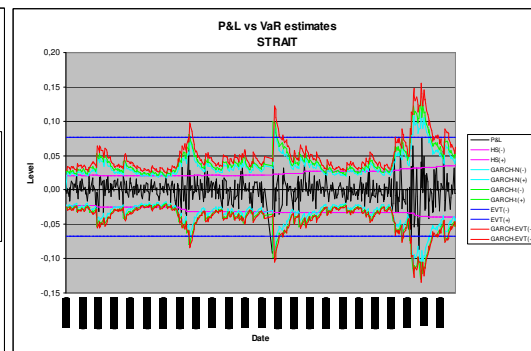
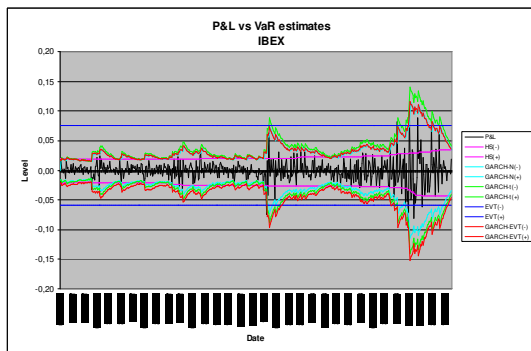
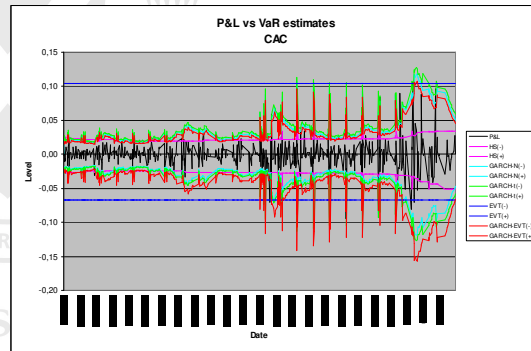
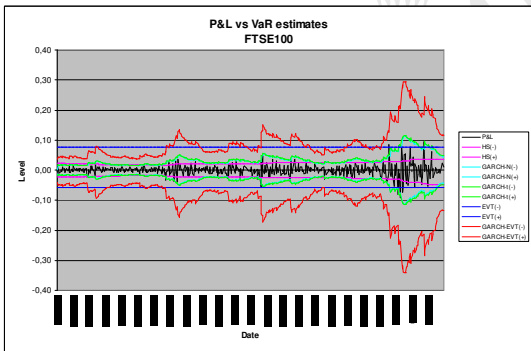
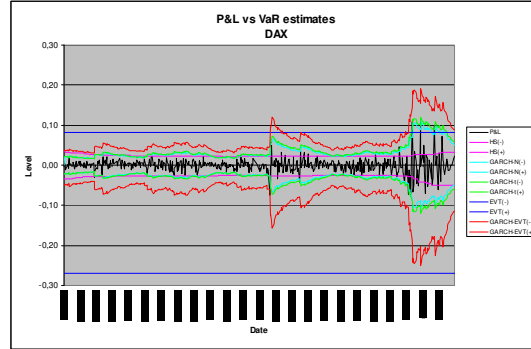
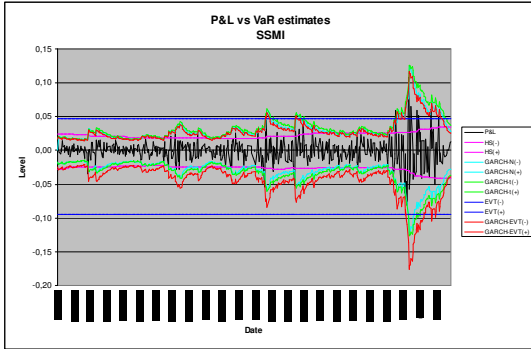
3 : factor multiplicativo de escala

$\theta$  : factor de incremento ( $0 \leq \theta \leq 1$ )

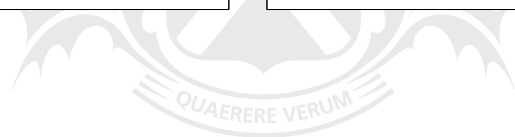
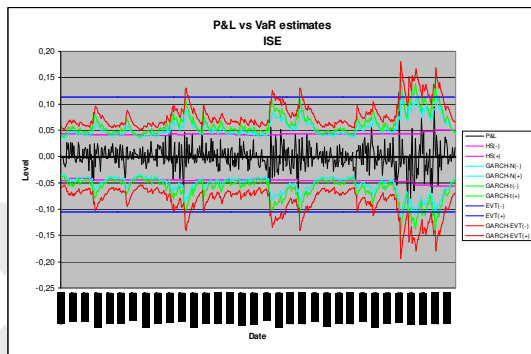
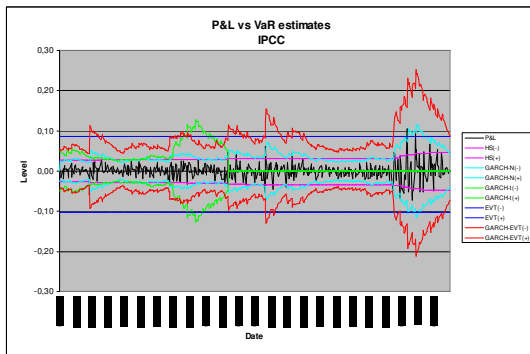
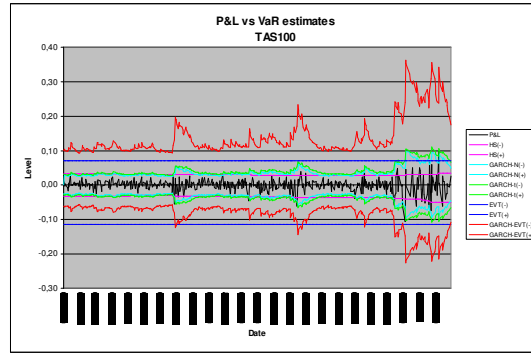
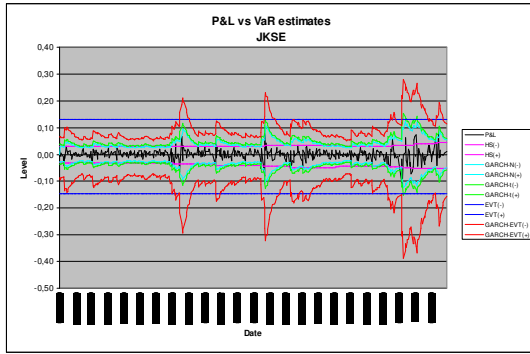
C : constante

Este estudio concuerda con las reflexiones de Danielsson y de Vries (1997:21), en el sentido que “...el método EV brinda resultados cercanos al valor esperado, sugiriendo que la constante debe ser cercana a uno si es utilizado para el VaR el modelo EV. Mientras que se justificaría un alto factor de escala para la estimación de las colas en el caso normal, el factor multiplicativo puede ser mucho menor si se lo hace con el método EV.”

**Grafico 4.2**  
**Pronósticos del VaR**



San Andrés



Universidad de  
**San Andrés**

## 5. Conclusiones

A pesar de sus fallas teóricas, el VaR es un estándar de la industria. Dentro del rango de sus posibles aplicaciones, el Comité de Basilea permite a las instituciones financieras emplear su propio modelo de estimación del VaR para determinar sus requerimientos de capital. Si las empresas sobreestiman el VaR, sus accionistas probablemente las penalicen, mientras que los reguladores harán lo mismo en caso de una subestimación, de donde se deduce la importancia de la exactitud del cálculo del VaR.

Este estudio explora en algunos mercados tanto desarrollados como emergentes varias técnicas relacionadas con la estimación del VaR para ambas colas de la distribución de Ganancias y Pérdidas (*P&L*). Los eventos ocurridos en el último trimestre de 2008 proveen una excelente posibilidad de evaluación (*backtest*) en tiempo real.

Los típicos modelos no-paramétricos como la Simulación Histórica no han brindado un razonable buen ajuste dado que tienen implícito el supuesto simplificador que la distribución empírica pasada determina la futura, falla que no puede ser enmendada por muestras con ventana móvil. Los modelos de volatilidad condicionada deberían, en principio, reflejar la autocorrelación presente en los cuadrados de los retornos, que es una característica común de la mayoría de las series temporales financieras. Sin embargo, como se afirma en McNeil y Frey (1999), las innovaciones distribuidas normalmente son incapaces de capturar la distribución leptokúrtica de los residuos; las innovaciones de la Student-t(d) funcionan ligeramente mejor pero aún subestiman las verdaderas exposiciones, alertando así sobre las implicancias que pueden traer estos supuestos. Al igual que Jondeau y Rockinger (2003), este estudio no ha sido concluyente acerca de las diferencias entre los parámetros de cola de un mismo índice, y las evidencias de diferencias entre países desarrollados y emergentes no son claras respecto de las estimaciones EVT. Pareciera que los eventos extremos no ocurren con la suficiente frecuencia como para provocar diferencias estadísticamente significativas entre las colas derecha e izquierda. Además, estos autores citan una posible explicación dada por Campbell y Hentschel (1992): dado que los precios de las acciones están influidos por las nuevas informaciones, los valores al alza son suavizados por el incremento en el premio al riesgo demandado por la alta volatilidad; en cambio, el movimiento descendente que tiene lugar cuando los precios de las acciones bajan como resultado de las malas noticias se ve amplificado por el incremento en el premio al riesgo. A pesar de la aparente imprecisión estadística, el EVT-GPD surge como una importante contribución para calcular el VaR en vista de su reconocimiento de la asimetría (esto es, flexibilidad para modelar las colas derecha e izquierda de las distribución por separado). Las distribuciones Normal y Student-t(d) son capaces de capturar las ganancias pero su desempeño es deficiente en el evento de pérdidas. En consecuencia, cuando la distribución de la muestra es asimétrica, existe alguna evidencia de que no sería apropiado utilizar modelos que tratan la volatilidad como un fenómeno simétrico. Su muy buen desempeño en numerosas pruebas de evaluación (*backtesting*) sugiere que deberían ser empleados los ajustes de cola ancha mediante GPD (condicionado o no) para modelar las colas independientemente del cuerpo de la distribución.

La crisis financiera que comienza en Septiembre de 2008 aparenta haber erosionado algunos fundamentos teóricos: una prueba de evaluación (*backtesting*) de un período parece más un ejercicio de simulación de estrés que un chequeo en tiempo real<sup>27</sup>. Aún cuando es prematuro efectuar afirmaciones definitivas, resulta factible que se haya producido un cambio en las distribuciones de los retornos puesto que los eventos extremos parecen haberse tornado más probables. Es dable notar que tanto mercados emergentes como desarrollados registren en la

<sup>27</sup> Véase Osterreichische Nationalbank (1999) para una amplia exposición acerca de los tests de estrés.

actualidad similares movimientos violentos de alzas y bajas, que antes eran característica típica de los primeros (SMI 10.79% y -8.11%, FTSE 9.38% y -9.27%, DAX 10.80% y -7.43%, CAC40 10.59% y -9.47%, IGBM 9.87% y -9.68%, , STRAIT 7.53% y -9.22%, JKSE 7.26% y -10.95%, TAS 9.71% y -10.54%, IPCC 10.44% y -7.27%, ISE 12.13% y -9.01%), resultando que esos saltos parecen contribuir a hacer difusa la distinción estadística entre ambos grupos. En general esa clase de movimiento no está incluida en los períodos de muestra (excepto la crisis de Octubre de 1987 en FTSE100 y IGBM), siendo en consecuencia ignorados por la Simulación Histórica y no contabilizados por las distribuciones Normal y Student-t(d). Las características del EVT, al modelar las colas solamente en forma paramétrica, consiguen la evaluación del riesgo de pérdidas no observadas al permitir, con fundamentos estadísticos firmes, la extrapolación más allá del rango de datos.



Universidad de  
**San Andrés**

## Bibliografía

- ACERBI, C., and TASCHE, D., (2002), On the Coherence of Expected Shortfall, *Journal of Banking and Finance* 26, pp. 1487-1503.
- ALEXANDER, C., (2008), *Market Risk Analysis Volume IV: Value-at-Risk Models*, John Wiley & Sons Ltd., The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, United Kingdom.
- ANDERSEN, T., BOLLERSLEV, T., and DIEBOLD, F. X., (August 2002), Parametric and Nonparametric Volatility Measurement, Technical Working Paper 279, Technical Working Paper Series, National Bureau of Economic Research, Cambridge, Massachusetts, United States.
- BALKEMA, A. A. and DE HAAN, L., (1974), Residual lifetime at great age, *Annals of Probability* 2, pp. 792-804.
- BAO, L., LEE, T-H., and SALTOĞLU, B., (November 2004), Evaluating Predictive Performance of Value-at-Risk Models in Emerging Markets: A Reality Check, available at [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org).
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, (1996), Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks, Bank for International Settlements, Basel, Switzerland.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, (June 2004), International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, Bank for International Settlements, Basel, Switzerland.
- BEDER, T. S., (1995), VaR: Seductive but Dangerous, *Financial Analyst Journal*, September-October, pp. 12-24.
- BEIRLANT, J., VYNCKIER, P., and TEUGELS, J.L., (1996), Tail Index Estimation, Pareto Quantile Plots and Regression Diagnostics, *Journal of the American Statistical Association* 91 (436), pp. 1659-1667.
- BEKIROS, S. and GEORGOUTSOS, D., (October 2003), Estimation of Value-at-Risk by extreme value and conventional methods: a comparative evaluation of their predictive performance, Department of Accounting and Finance, Athens University of Economics and Business, Athens, Greece.
- BOLLERSLEV, T., (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F., and NELSON, D., (1994), ARCH Models, in R. F. Engle and D. L. McFadden Eds., *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, pp. 2959-3038, North Holland, Amsterdam, Netherlands.
- BROOKS, C., CLARE, A. D., and PERSAND, G., (2000), An EVT Approach to Calculating Risk Capital Requirements, Discussion Papers in Finance 2000-2007, ISMA Centre, University of Reading, Reading, United Kingdom.
- BROOKS, C., CLARE, A. D., DALLA MOLLE, J. W., and PERSAND, G., (December 2003), A Comparison of Extreme Value Theory Approaches for Determining Value at Risk, Forthcoming, *Journal of Empirical Finance*.
- CAMPBELL, J. Y., and HENTSCHEL, L., (1992), No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns, *Journal of Financial Economics*, 312, pp. 281-318.
- CHRISTOFFERSEN, P., (2003), *Elements of Financial Risk Management*, Academic Press, New York, United States.
- COLES, S., (2001), *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag London Limited, Berlin, Germany.
- 42
- CORONEL-BRINZIO, H. F., and HERNANDEZ-MONTOYA, A. R., (November 2004), On fitting the Pareto-Levy distribution to stock market index data: selecting a suitable cutoff value, Facultad de Física e Inteligencia Artificial, Universidad Veracruzana, Xalapa, Veracruz, Mexico.
- DA COSTA LEWIS, N., (2003), *Market Risk Modelling*, RISK Books, Risk Waters Group Ltd., London, United Kingdom.
- DANIELSSON, J. and DE VRIES, C., (September 1997), Value-at-Risk and Extreme Returns, available at [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org).
- DANIELSSON, J., HARTMANN, P. and DE VRIES, C., (January 1998), The Cost of Conservatism: Extreme Returns, Value-at-Risk and the Basle 'Multiplication Factor', January 1998 issue of *RISK*, also available at [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org).
- DANIELSSON, J. and DE VRIES, C., (August 1999), Using a Bootstrap Method to Choose the Sample Fraction in Tail Index Estimation, available at [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org).
- DANIELSSON, et al, (2001), An academic response to Basel II, LSE Financial Markets Group, Special Paper Number 130.

- DANIELSSON, J., (2004), The Emperor has no Clothes: Limits to Risk Modelling, in SZEGÖ, G., (ed.), (2004), *Risk Measures for the 21<sup>st</sup> century*, John Wiley & Sons, West Sussex, United Kingdom.
- DANIELSSON, J., and ZIGRAND, J. P., (July 2005), On time-scaling of risk and the square root-of-time rule, Department of Accounting and Finance and Financial Markets Group, London School of Economics, London, United Kingdom.
- DONNELLY, C. and EMBRECHTS, P. (2010), The devil is in the tails: actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis, *ASTIN Bulletin* 40(1), pp. 1-33
- DOWD, K., (1998), *Beyond value at risk: the new science of risk management*, Wiley series in Frontiers in Finance, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, West Sussex, United Kingdom.
- DOWD, K. (2005), *Measuring Market Risk*, Second Edition, Wiley series in Frontiers in Finance, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, West Sussex, United Kingdom.
- EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., and MIKOSCH, T., (1997), *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Berlin, Germany.
- FAMA, E. F., (1965), The Behavior of Stock Market Prices, *Journal of Business*, 38, pp. 34-105.
- FERNANDEZ, V., (s/d, viewed December 2007), Extreme Value Theory and Value at Risk, Department of Industrial Engineering at the University of Chile, available at [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org).
- FISHER, R., and TIPPET, L., (1928), Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 24, pp. 180-190.
- GUJARATI, D. N., (1997), *Econometría Básica*, 3<sup>ra</sup> Edición, McGraw-Hill, New York, United States.
- HANSEN, P. and LUNDE, A., (2005), A Forecast Comparison of Volatility Models: Does anything beat a GARCH(1;1)?, *Journal of Applied Econometrics*, 20, pp. 873-889.
- JACKSON, P., MAUDE, D. J., and PERRAUDIN, W., (1998), Bank Capital and Value at Risk, Working Paper, Bank of England, London, United Kingdom.
- JONDEAU, E., and ROCKINGER, M., (2003), Testing for differences in the tails of stock-market returns, *Journal of Empirical Finance* 209, pp. 1-23.
- JONDEAU, E., and ROCKINGER, M., (April 1999), The Behaviour of Stock Returns: Emerging versus Mature Markets, Paper 66, Banque de France, Paris, France.
- JORION, P., (1999), *Valor en Riesgo*, Editorial Limusa, México DF, Mexico.
- JP MORGAN (1994) Doc. Técnico RiskMetrics., [www.riskmetrics.com](http://www.riskmetrics.com)
- JP MORGAN and REUTERS, (1996), *RiskMetrics Technical Document*, Fourth Edition, New York, United States.
- KUESTER, K., MITTNIK, S., and PAOLELLA, M. S., (January 2005), Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies, available at [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org).
- MANDELBROT, B., (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, 36, pp. 394-419.
- MANGANELLI, S. and ENGLE, R., (2004), A Comparison of Value-at-Risk Models in Finance, *Risk Measures for the 21<sup>st</sup> Century* edited by G. Szegö, (2004), John Wiley & Sons Ltd., Chichester, West Sussex, United Kingdom.
- MANGANELLI, S., and ENGLE, R., (August 2001), Value at Risk Models in Finance, Working Paper N°75, Working Paper Series, European Central Bank.
- MAPA, D., (s/d viewed December 2007), A Range-Based Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity Model for Forecasting Financial Volatility, available at [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org).
- MARRISON, C., (2002), *The Fundamentals of Risk Measurement*, McGraw Hill, United States.
- McNEIL, A., J., and FREY, R., (June 1999), Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach, available at [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org).
- McNEIL, A. J., FREY, R., and EMBRECHTS, P., (2005), *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, United States.
- McNEIL, A., and SALADIN, T., (1997), The Peaks Over Thresholds Methods for Estimating High Quantiles for Loss Distributions, *Proceedings of the XXVIIIth International ASTIN Colloquium*, Cairns, pp. 23-43.
- NEFTCI, S., (Spring 2000), Value at Risk Calculations, Extreme Events, and Tail Estimation, available at [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org).
- NELSON, D., B., (1991), Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, 59, pp. 347-370.
- OSTERREISCHISCHE NATIONALBANK (ONB), (September 1999), "Stress Testing", Guidelines on Market Risk Volume 5, Vienna, Austria.
- PENZA, P., and BANSAL, V., (2001), *Measuring Market Risk with Value at Risk*, Financial Engineering Series, John Wiley and Sons, New York, United States.
- PICKANDS, J., (1975), Statistical Inference Using Extreme Order Statistics, *Annals of Statistics* 3, pp. 119-131.



- RACHEV, S., MENN, C. and FABOZZI, F., (2005), *Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions*, John Wiley & Sons, New Jersey, United States.
- REISS, R.-D., and THOMAS, M., (2007), *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Birkhäuser Verlag, AG, Berlin, Germany.
- SCHWERT, W., (1987), Stock Volatility and Crash of '87, *Review of Financial Studies*, 3, pp. 77-102.
- STAHL, G., (1997), Three Cheers, *Risk*, 10, pp. 67-69.
- SZEGÖ, G., (2004), *Risk Measures for the 21<sup>st</sup> century*, John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, United Kingdom.
- TAYLOR, S., (1986), *Modeling Financial Time Series*, John Wiley & Sons, New York, United States.
- THE ECONOMIST, In Plato's Cave, (22 January 2009), Print Edition.



Universidad de  
**San Andrés**

# Extreme Value Theory performance in the event of major financial crises

Adrián F. Rossignolo  
Víctor A. Álvarez

## Abstract

Current directives issued by the Basel Committee have established Value-at-Risk (VaR) as the standard measure to quantify market risk. In view of the wide range of applications like risk management, performance evaluation or regulatory requirements, and considering that institutions are free to develop their own approaches, the development of accurate techniques becomes a topic of prime importance.

It is acknowledged that VaR figures should protect market participants against sudden drops and rises in financial markets. While most representations could achieve that purpose for common everyday movements, they find themselves unable to account for unexpected jerks that take place in the event of crises. Extreme Value Theory (EVT) provides a method to estimate VaR at high quantiles of the distribution, consequently focusing on extraordinary and unusual circumstances.

This paper employs EVT to calculate VaR for ten stock market indices belonging to developed and emerging markets in two different ways: Unconditional EVT on raw returns and Conditional EVT which blends Quasi-Maximum-Likelihood fitting of GARCH models to estimate current dynamic volatility and EVT for estimating the tails of the innovation distribution of the GARCH residuals (both tails independently). Backtesting EVT representations using turmoil recorded in 2008, and comparing their performance with that of the most popular representations nowadays in vogue, it is found that EVT schemes could help institutions to avoid huge losses arising from market disasters. A simple exercise on the constitution of Regulatory Capital illustrates the advantages of EVT.

**Keywords:** Value-at-Risk, Extreme Value Theory, GARCH, Historical Simulation, financial crises.

## 1. Introduction

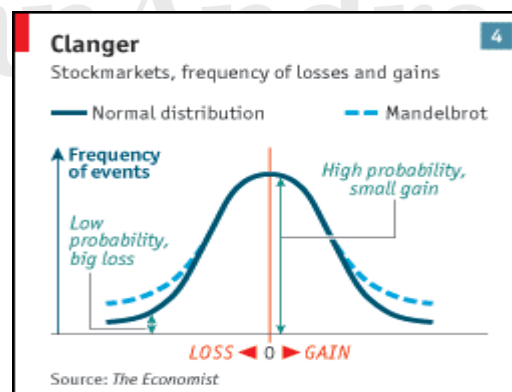
Financial risk management has surged as an autonomous discipline since the late 1960s, chiefly due to the extraordinary expansion in trading activities. Consequently, as Dowd (2005) points out, the environment became increasingly volatile exposing market participants to high levels of financial risks, prompting institutions to search for precise methods of managing market risk. After the regrettable string of risk management disasters occurred in the 1990s, regulators addressed the issue and demanded companies to calculate Value-at-Risk (VaR) as the measure to quantify market risks.

Even though VaR is theoretically flawed as risk measure (Acerbi and Tasche 2002), it possesses a series of attractions (Dowd 2005). Furthermore, it has been enforced by regulators, who nevertheless allow firms to employ their own internal models to calculate VaR. It ensues

that the accurate estimation of VaR measures is a matter of the utmost importance for a variety of reasons ranging from the establishment of Capital Requirements to risk taking.

The majority of the techniques devised for VaR quantification rely on the assumption that financial returns follow a normal distribution. A recent article published in *The Economist* (2009) mentions that normal distribution closely fits the empirical shape in the middle of the curve (accounting for most gains and losses), but it does not perform well at the tails where extremes events lie: the problem resides in that "...there is ample empirical evidence that ... financial time series are heavy-tailed and possibly skewed" (Rachev, Menn and Fabozzi 2005:1), thus confirming Mandelbrot (1963) and Fama (1965) findings. Extreme events are sparse by definition, hence their frequency is impossible to be deduced from the centre of the distribution. In this vein, Neftci (2000) states that extreme events which fill the fat tails of the distribution of returns are possibly "structurally" different from the return generating mechanism in everyday market conditions. Additionally, *The Economist* (2009) conjectures that failing to quantify tails accurately at 99% or beyond results in skipping plausibly common and destructive losses, which should be those subject to the utmost concern.

The following illustration, taken from *The Economist* (2009), pictures that the main problem is the overlooking of "tail risk":



Manganelli and Engle (2001) classify existing VaR methodologies into three broad categories: Parametric, Nonparametric and Semiparametric. Each characterization encompasses several techniques, for instance: General Autoregressive Conditional Heteroscedastic (GARCH) belongs to Parametric models, Historical Simulation (HS) to Nonparametric and Extreme Value Theory and Quasi-Maximum Likelihood (QML) GARCH to Semiparametric. The application of

VaR schemes has been a very controversial issue: Jackson, Maude and Perraudin (1997) favour HS, Bollerslev, Engle and Nelson (1994) recommend GARCH models and Danielsson and de Vries (1997) and McNeil and Frey (1999) support Extreme Value Theory. However, Beder (1995) points out that VaR figures yielded by each of these methods can portray huge differences.

The current paper carries out a comparison of the most popular settings springing from the different branches aforementioned. The predictive performance of every model is gauged on six stock markets (half of which are mature markets and the rest emerging ones), and the forecast period includes year 2008 when the present financial crisis unfolded. VaR figures are tested following the Backtesting methodology recommended by the Capital Accords as well as Christoffersen's Unconditional Coverage procedure using both tails of the distribution. The upshot of the discussion is an evidence of the superior performance of EVT models in this kind of environments, which eventually translates into sufficiency of capital were institutions to employ this method to estimate VaR. It is acknowledged, however, that the current lines should be considered as introductory towards the development of EVT for financial purposes in emerging economies. However, the complex stochastic structure of financial markets might act as a warning against excessive reliance on extreme value techniques<sup>28</sup>.

The rest of the paper unfolds as follows. Section 2 presents a quick glance over some theoretical issues including definition of Value-at-Risk and the approaches employed for its estimation. Section 3 delineates topics regarding Methodology, Section 4 deals with the empirical results from data analysis, model parameters and VaR forecasts. Section 5 states the concluding remarks.

## 2. Theoretical background. Key concepts and definitions

### 2.1. Definition of Value-at-Risk (VaR)

Given some confidence level  $\alpha \in (0;1)$ , the VaR of the portfolio at the confidence level  $\alpha$  is the smallest number  $l$  such that the probability that the loss  $L$  exceeds  $l$  is smaller or equal than  $(1 - \alpha)$ :

$$VaR(\alpha) = \inf \{l \in R : P(L > l) \leq (1 - \alpha)\} = \inf \{l \in R : F_L(l) \geq \alpha\}^{29} \quad [1]$$

In broader terms, it is a simple risk measure that tells the amount of monetary loss that will only be exceeded  $\alpha\%$  of the time in the next  $k$ -trading days. Thus:

<sup>28</sup> See Coles (2001).

<sup>29</sup> See McNeil, Frey and Embrechts (2005).

$$\Pr(\text{Loss} > \text{VaR}) = \alpha$$

or, expressing this definition in relative terms or returns:

$$\Pr(r_{t+1} < \text{VaR}_{t+1}) = \alpha$$

Formally, VaR is defined as:

$$\text{VaR}(\alpha)_{t+1} = \sigma_{t+1} F^{-1}(\alpha) \quad [2]$$

where:

$\sigma_{t+1}$ : volatility forecast derived from any model;

$F^{-1}(\alpha)$ : inverse of the cumulative density function of the distribution of rescaled returns ( $\alpha$ -quantile of  $\Phi$ )

### 2.2.1. Non-parametric approach: Historical Simulation

The Historical Simulation constitutes the simplest way of estimating the quantile of the loss distribution as it only requires the empirical distribution of data. It is an unconditional method which only assumes that the distribution of returns is stationary with distribution function  $F_x$ , hence making the empirical distribution function of the data consistent with the estimator of  $F_x$ <sup>30</sup>. In formal terms, the VaR estimate for  $t+1$  with a set of information of length  $n$  up to time  $t$  is given by the empirical  $\alpha$ -quantile:

$$\hat{\text{VaR}}(\alpha)_{t+1} = -\hat{Q}(\alpha)(r_t; r_{t-1}; \dots; r_{t-n+1}) \quad [3]$$

Besides the fact that it reduces the dimensionality problem to univariate time series and the easiness of implementation as no assumption about the dependence structure of risk factors is made, this scheme is inherently inconsistent<sup>31</sup>. Its drawbacks lie mostly on the ignorance of the mild dependence of returns<sup>32</sup> and the length of the window size: there is no straightforward solution to the tradeoff between long samples needed for statistical inference and not too long samples required for observations in/out the present volatility cluster. Furthermore, Dowd (2005) highlights the (more than) likely presence of ghost or shadow effects<sup>33</sup>.

### 2.2.2. Fully parametric models of conditional volatility

<sup>30</sup> Therefore ignoring plausible events not occurred in the sample period.

<sup>31</sup> See Engle and Manganelli (2004).

<sup>32</sup> See Section 3.

<sup>33</sup> See Penza and Bansal (2001).

Pursuing strictly practical motivations, this research will unfold within the boundaries of one simple representation<sup>34</sup>: General Autoregressive Conditional Heteroskedastic (GARCH), which will respond to the following setting:

*GARCH(1;1)*:

$$r_{t+1} = \sigma_{t+1} z_{t+1}$$

$$\sigma_{t+1}^2 = w + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2 \quad [4]$$

with random shocks or innovations  $z_{t+1} \sim \text{iid } D(0;1)$  and  $w > 0; \alpha, \beta \geq 0$ .

This kind of models was introduced by Bollerslev (1986) and Taylor (1986), since then arguably becoming one of the most popular among financial community<sup>35</sup>, given that their structure adapts to two of the stylized facts exhibited by financial return series: volatility clustering and leptokurtosis<sup>36</sup>. Dowd (2005:131-132), accordingly remarks that "...they are tailored for volatility clustering, and this clustering produces returns with fatter tails than normal tails even if the innovations –the random shocks- are themselves normally distributed".

Following strictly practical motivations<sup>37</sup>, and in view of the negligible marginal gains obtained extending the quantity of lags, the study will restrict GARCH applications to first order lags, backed by McNeil, Frey and Embrechts (2005) who advocate the use of lower order GARCH models citing parsimony reasons.

### 2.2.3. Extreme Value Theory

#### 2.2.3.1. Theoretical context

The aforementioned schemes work on the quantiles of the random variables using information from the whole data set. However, due to the fact that quantiles at 1% or 5% are ultimate values of the distribution, it is natural to emphasize the representation of the tails directly as an alternative to attempt the whole structure of the distribution. Extreme Value Theory (EVT), then, provides a theoretical justification to such procedures, as it plays the same essential role as

<sup>34</sup> It is acknowledged that the list lies very far away from sophistication or completeness: it is merely indicative and illustrative of the wide range of possible alternatives regarding this issue.

<sup>35</sup> For a more detailed explanation about GARCH models, see Bollerslev (1986), Bollerslev, Engle and Nelson (1994), for example.

<sup>36</sup> See Penza and Bansal (2001), Christoffersen (2003) or RiskMetrics Technical Document (1996) for an analysis of the empirical characteristics of financial return series.

<sup>37</sup> Eventually avoiding the curse of dimensionality. Gujarati (1997) recommends that econometric models should follow the parsimony principle.

the Central Limit Theorem performs when modelling sums of random variables. This section will supply some basic notions indispensable for the rest of the paper: for a detailed treatment and/ or some theoretical gaps the interested reader may refer to Embrechts, Klüppelberg and Mikosch (1997), McNeil, Frey and Embrechts (2005), or Reiss and Thomas (2007).

In general terms, extreme values can be modelled via two basic approaches: Block Maxima Models (BMM), used for the largest observations gathered from large samples of iid observations, and a more up-to-date collection employed for threshold exceedances, or peaks beyond some high level (Peaks over Thresholds: POT). The former is usually regarded as inefficient because only the maximum (minimum) values in large blocks are retained for analysis: hence, data is better utilized if the process of blocking is avoided. In addition, for emerging markets with data series of relatively short length, it is crucial not to dispose of intermediate points contained in the block, as they may prove to be extremes if contained in blocks of different lengths. For the reasons stated above the current study favours POT.

Supposing a sequence of iid returns (random variables)  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , which have an unknown marginal distribution function  $F$ , extreme events are bound to be defined as those values of  $X_t$  exceeding some high value  $u$ . The rest of this section enunciates theoretical support for the maximum, as long as the results for the minimum can be straightforwardly obtained from those of the maximum by applying the transformation  $X_t$  into  $-X_t$ .

If  $X_0$  is the right endpoint of the distribution  $F$  (finite or infinite), it follows that  $X_0 = \sup\{X \in \mathfrak{R} : F(x) < 1\} \leq \infty$ . It is natural to state that a description of the stochastic behaviour of the excesses over the threshold  $u$  is given by the conditional probability:

$$F_u(y) = \Pr\{X - u \leq y \mid X > u\} = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad [5]$$

Given that the threshold  $u$  is exceeded,  $F_u(y)$  represents the probability that a loss exceeds the threshold  $u$  by an amount equal or less than  $y$ . Were the parent distribution  $F$  to be known, the distribution of the exceedances,  $F_u(y)$  would also be known; however, real exercises show the contrary thus obliging to estimate the distribution for high values above the threshold. Consequently, it is necessary to resort to the Balkema & de Haan (1974), Pickands (1975) Theorem, which, in broad lines, asserts the following:

*Theorem 1 [Balkema & de Haan (1974) – Pickands (1975)]:* For a large class of underlying distribution functions  $F$ , it is possible to find a measurable function  $\sigma(u)$ , such that:

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq x < x_0 - u} |F_u(y) - G_{\xi, \sigma(u)}(y)| = 0$$

if and only if  $F$  belongs to the maximum domain of attraction of the Extreme Value Distribution  $H_\xi$ , i.e.,  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  with  $\xi \in \mathfrak{R}$ . As Coles (2001) states, the principal outcome is embodied in the theorem below:

*Theorem 2:* Supposing:

- $X_1, X_2, \dots, X_n$  are a sequence of iid random variables with common distribution function  $F$ ;
- $M_n = \max\{X_1; X_2; \dots; X_n\}$
- Any (arbitrary) term in the sequence of random variables  $X_i$  is denoted by  $X$ ;
- $F$  complies with Fisher and Tippet (1928) theorem<sup>38</sup>;

Then, for large  $n$ ,  $\Pr\{M_n \leq z\} \approx H(z)$  with

$$H_\xi(z) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\} & \text{if } \xi \neq 0 \\ \exp(-e^{-z}) & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

for some  $\mu, \sigma > 0$  and  $\xi$ .  $H_\xi(z)$  is the distribution function of the Generalized Extreme Value distribution (standard GEV), where  $\xi$  is known as the shape parameter and  $x$  must satisfy  $1 + \xi z > 0$ .

For large thresholds  $u$ , the distribution function of exceedances  $(X - u)$ , given that  $X > u$ , is given by the two-parameter limiting distribution function

$$G_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi y / \sigma)^{-1/\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-y / \sigma) & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

as  $u$  increases, where  $\sigma > 0$ , and  $x \geq 0$  when  $\xi \geq 0$  and  $0 \leq y \leq -\sigma / \xi$  when  $\xi < 0$ .

$G_{\xi, \sigma}(y)$  is the famous Generalized Pareto Distribution (GPD) family because it includes three other distributions according to the value of parameter  $\xi$ :

<sup>38</sup> See Fisher and Tippet (1928).



- $\xi > 0$  :  $G_{\xi,\sigma}(y)$  is the classic Pareto distribution;
- $\xi = 0$  :  $G_{\xi,\sigma}(y)$  is the exponential distribution;
- $\xi < 0$  :  $G_{\xi,\sigma}(y)$  is the short-tailed Pareto type II distribution

which correspond to the Fréchet, Gumbel and Weibull Extreme Value Distributions respectively. The GPD family can be enhanced if a location parameter  $\mu$  is affixed, thus becoming  $G_{\xi,\sigma}(y - \mu)$ . Loosely speaking, both theorems mean that if block maxima  $M_n$  distribution is approximately described by  $H$ , then the approximate distribution of threshold excesses is given by  $G$ , belonging to the Generalized Pareto family. Furthermore, the parameters of the GPD are univocally determined by those parameters of the associated GEV distribution of the block maxima<sup>39</sup>.

Once the choice of the threshold  $u$  is made<sup>40</sup> and the parameters of the GPD are estimated, it is necessary to obtain the expression to calculate the relevant quantiles which will enable the VaR calculus. Thus, from equation [5] and recalling that  $x = y+u$ , an estimate for  $F(x)$ , for  $x > u$  may be:

$$F(x) = [1 - F(u)]G_{\xi,\sigma(u)}(y) + F(u) \quad [6]$$

Considering  $k$  as the number of observations above the threshold  $u$ ,  $F(u)$  may easily be non-parametrically approximated by means of the simple empirical estimator

$$\hat{F}(u) = \frac{n-k}{n} \quad [7]$$

Plugging [7] into [5] it is possible to achieve an estimate for  $F(x)$ :

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{k}{n} \left[ 1 + \frac{\hat{\xi}(x-u)}{\hat{\sigma}} \right]^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \quad [8]$$

$\hat{\xi}, \hat{\sigma}$  being estimates for  $\xi$  and  $\sigma$  respectively. For a level of confidence  $\alpha > F(u)$ , the VaR expression is computed by inverting  $\hat{F}(x)$  and solving for  $x$ :

$$VaR_{t+1}(\alpha) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ \left[ \frac{1-\alpha}{k/n} \right]^{-\hat{\xi}} - 1 \right] \quad [9]$$

<sup>39</sup> See Coles (2001).

<sup>40</sup> See below.

### 2.2.3.2. Fitting the GPD to excesses over threshold $u$

#### 2.2.3.2.1. Threshold identification

According to Christoffersen (2003), threshold selection is the weak spot of the POT method. Although there are several formula-based ways to pick the threshold  $u$ <sup>41</sup>, there is no theoretical approach with satisfactory performance suitable for this purpose. Hence, the practitioner must resort to a variety of tools in order to determine the starting point for the GPD to be fitted, nevertheless bearing in mind that a delicate balance between variance and bias must necessarily be achieved:

- were the threshold to be too low, the asymptotic nature of the model would be violated with values of  $\xi$  fluctuating considerably for different number of upper order statistics  $k$ , leading to bias;
- on the contrary, too high a threshold  $u$  would deliver few excesses, with high variance turning up.

Consequently, some authors have developed their own ways of addressing the task. Christoffersen (2003) presents a “rule of thumb” where those observations situated in the upper/lower decile of the distribution are taken as extremes. More formally, Neftci (2000) followed by Bekiros and Georgoutsos (2003), estimated  $u = 1.176\sigma_n$ , where  $\sigma_n$  is the standard deviation of the sample and  $1.176 = F^{-1}(0.10) = 1.44 \sqrt{(d-2)/d}$  assuming  $F \sim \text{Student-t}(6)$ . The current study favours a technique based on the analysis of an array of elements such as the sample Mean Excess Function (MEF), QQ plots, sample Kernel Density and sample Quantile Function. It is believed that they may eventually provide a more thorough insight into the series at the time of describing where to begin the adjustment of the GPD. Therefore, the idea is to carry out an analysis of the upper and lower extremes of the series on an individual basis rather than employing set recipes in an attempt to gain precision about the behaviour of the extremes.

The order statistic  $u$  will be approximated using the plot of the sample MEF, which is defined as an empirical estimator of the true Mean Excess Function, expressed by:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u) I_{\{X_i > u\}}}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}} \quad [10]$$

---

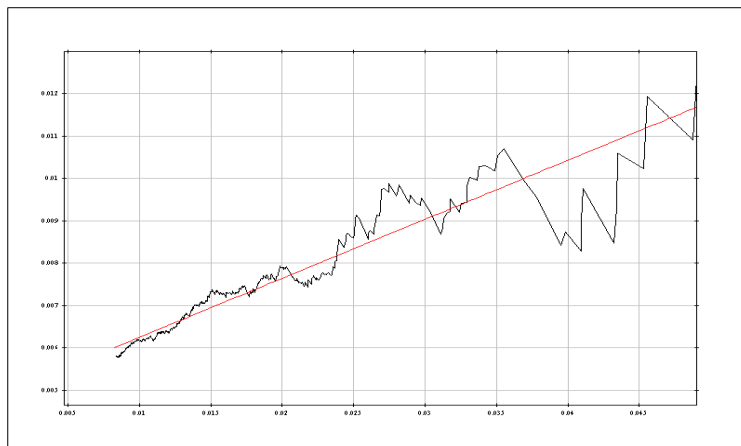
<sup>41</sup> The interested reader may recur to Reiss and Thomas (2007) or Beirlant, Vynckier and Teugels (1996). These methods seem to work reasonably well but they should be handled with care, as they may eventually result in the selection of a very high number of upper order statistics. Danielsson and de Vries (1999) and Coronel-Brizio and Fernandez-Montoya (2004) present interesting approaches to this subject.

which represents the average of the exceedances over the upper limit  $u$  for a sample of  $n$  observations. The graphical method for picking a suitable threshold stems from the fact that the mean excess function is linear in  $u$ , supposing a GPD distribution for the excesses<sup>42</sup>. Hence, according to the trend exhibited by the plot, the below mentioned conclusions can be deduced:

- *Upward trend*: heavy-tailed distribution
- *Downward trend*: short-tailed distribution
- *No trend*: exponential distribution

As McNeil and Saladin (1997) point out, the distribution of excesses will follow a GPD with  $\xi > 0$  in the tail sector over  $u$  if the empirical picture of the MEF exhibits an approximate straight line with positive gradient: the threshold  $u$  can be identified as the value corresponding to the kink from where it is verified an upward slope.

The basic ideas behind threshold selection may be illustrated modelling the upper tail of FTSE100 log-returns dataset from 03/04/84 to 29/12/06 inclusive. The sample MEF displays some evidence of a twist towards the linearly positive section of the plot somewhere between 1.50% and 2%, thus the threshold  $u$  may be roughly set at 1.76%, attempting to find a GPD model that provides a reasonable fit to the largest losses<sup>43</sup> (Graph 2.1).



*Graph 2.1. Sample Mean Excess plot (Threshold against Mean Excess). Red line indicates positive slope*

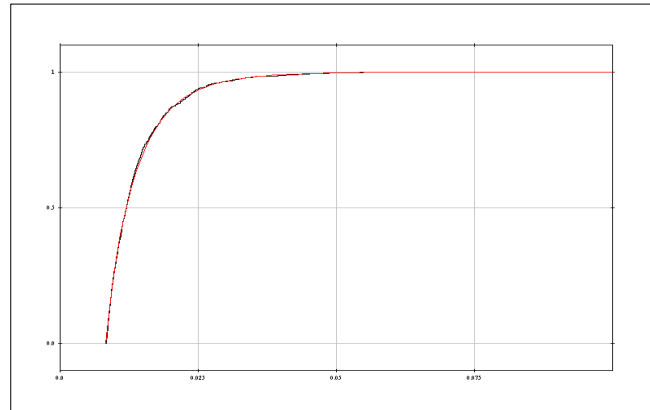
Maximum likelihood<sup>44</sup> (ML) delivers the following estimate of parameters: tail shape  $\xi = 0.1222$ , location  $\mu = -0.0349$  and dispersion  $\sigma = 0.0431$  and the reasonable adequateness of the

<sup>42</sup> See Reiss and Thomas (2007).

<sup>43</sup> Analogue procedure was employed for positive and negative tails of each index.

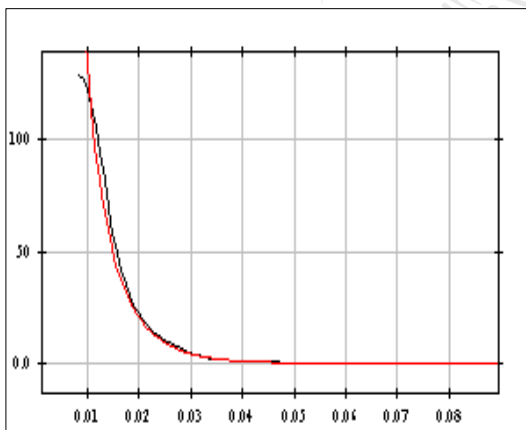
<sup>44</sup> See Section 3.

GDP may be assessed by means of several graphical tools. Graph 2.2 displays the sample distribution function (black) with the GDP superimposed in red: it can be appreciated that above the threshold  $u = 1.76\%$  both lines are almost tied together except for some outliers beyond 10%, which may well be stripped off the sample to avoid distortions<sup>45</sup>.

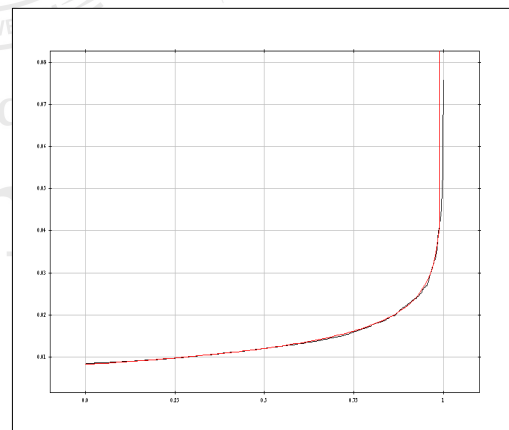


*Graph 2.2. Sample Distribution functions*

Evidence supporting the GDP model is reinforced via Graph 2.3 and 2.4, all of which picture empirical values in black against red lines representing the GDP fitted model.



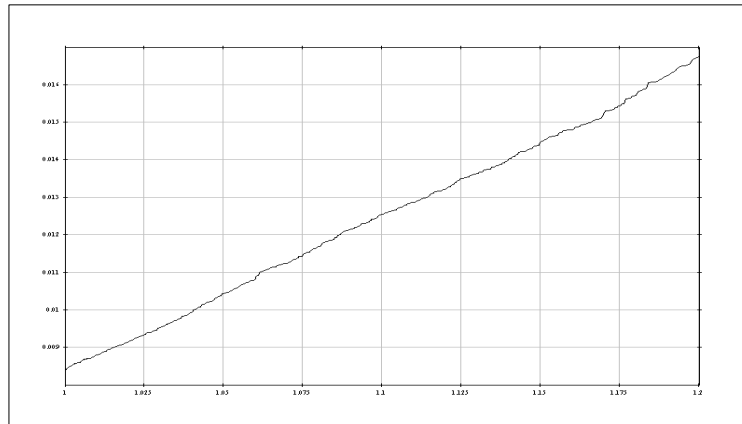
*Graph 2.3. Kernel densities*



*Graph 2.4. Quantile functions*

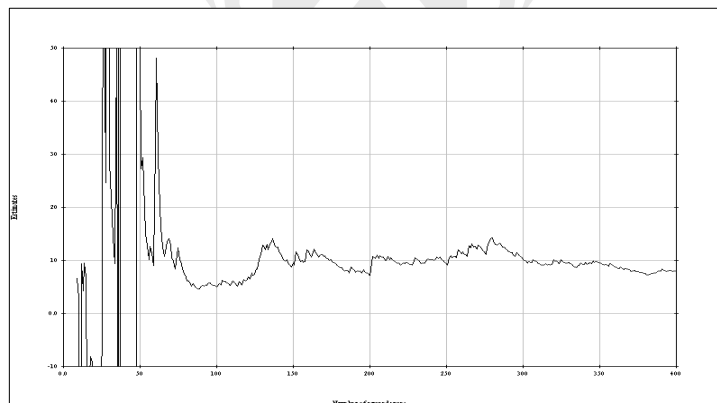
It is also useful to plot the quantiles of the estimated Generalized Pareto distribution (abscissas) against empirical quantiles (ordinates) to realize that the outcome is practically a straight line (Graph 2.5).

<sup>45</sup> See McNeil, Frey and Embrechts (2005).



Graph 2.5. Quantile-Quantile (QQ) graph

Coles (2001) argues that the second approach to threshold selection in POT method is the analysis of the stability of the estimated parameters within a range of the chosen order statistic  $u$ . However, ideally, both schemes should be complimentary: estimates from the first need to conform the requirements of the second, and viceversa<sup>46</sup>. In this sense, plotting the number of exceedances against ML estimates (Graph 2.6) reveals that values of  $\xi$  tend to roughly stabilize from 200 onwards, this way bolstering  $u = 201$ .



Graph 2.6. The stability of parameter  $\xi$

### 2.2.3.3. Extension to Extreme Value Approach: Conditional or Dynamic EVT

A refinement to the unconditional EVT application exposed in 2.2.3.1. will also be employed. As in McNeil and Frey (1999) and Dowd (2005), EVT is affixed to some dynamic structure which governs the behaviour of the raw return process. Therefore, after taking into account the principal model, EVT is applied to the random shocks or innovations that drive the raw return process. This special example requires identical analysis for threshold selection (Section 2.2.3.2.1.), nevertheless considering that the data series evaluated belongs to the standardized

<sup>46</sup> Interpreting the plots is by no means an easy task; on the contrary, McNeil, Frey and Embrechts (2005) warn that experience is required to read mean excess plots.

residuals after fitting the scheme controlling the basic progression. As a result, distinguishing between returns and random factors operating on them means that EVT is now conditional or dynamic (Dowd 2005).

### 3. Methodology

The aim of the study is the comparison between different methods to compute VaR with realized losses with a view to the effect they may exert upon the constitution of regulatory capital, understanding the last term in the sense defined by Basel Committee of Banking Supervision. Hitherto, Section 1 has introduced the research objectives, Section 2 has provided basic concepts, definitions and theoretical notions necessary for the rest of the paper. This chapter, then, deals with more specific issues regarding the assumptions, provisions and characteristics of the estimation process.

A sample of ten stock market indices was selected: five belong to mature or developed markets (Switzerland, United Kingdom, Germany, France and Spain) and the rest to emerging markets (Indonesia, Israel, Mexico, Turkey and Singapore); the database has been downloaded from Yahoo! Finance and Datastream websites. As in Hansen and Lunde (2005) and Mapa (n/d), the time series of returns was separated into two periods for the purposes of parameter estimation and evaluation of forecasts respectively:

$$\underbrace{t = -T + 1; \dots; 0}_{\text{estimation period}} \quad \underbrace{1; 2; \dots; n}_{\text{forecast period}}$$

Although Christoffersen (2003) establishes that as a good “rule of thumb” models should utilize the at least last 1000 data points, it is acknowledged that time series should be as long as possible (Dowd 2005). For the indices aforementioned:

Stock index Stock Exchange	Estimation period	Number of data points	Forecast period	Number of data points
SMI (Switzerland)	09/11/1990 31/12/2006	4060	01/01/2007 31/12/2008	501
DAX (Germany)	27/11/1990 31/12/2006	4059	01/01/2007 31/12/2008	507
FTSE100 (United Kingdom)	02/04/1984 31/12/2006	5746	01/01/2007 31/12/2008	506
CAC40 (France)	10/07/1987 31/12/2006	5082	01/01/2007 31/12/2008	523
IGBM (Spain)	04/02/1984 31/12/2006	5934	01/01/2007 31/12/2008	506
JKSE (Indonesia)	02/07/1997 31/12/2006	2299	01/01/2007 31/12/2008	492
TAS100 (Israel)	01/07/1997 31/12/2006	1910	01/01/2007 31/12/2008	471
IPCC (Mexico)	08/11/1991 31/12/2006	3777	01/01/2007 31/12/2008	502
ISE (Turkey)	05/01/1988 31/12/2009	4954	01/01/2007 31/12/2008	524
STRAIT (Singapore)	04/01/1988 31/12/2006	4749	01/01/2007 31/12/2008	493

A quick glance into the periods selected for estimation process reveals that at least one major world event is included in every index regardless of how it affected the particular index, for example:

- Stock market crash or “black Monday” (October 1987)
- “Tequila effect” (December 1994)
- Asian stock market crash (beginning in January 1997)
- Terrorist attacks in New York (September 2001), Madrid (March 2004) and London (July 2005).

On the other hand, the Forecast period contains the financial world crisis which unfolded in September-October 2008 and continues at the time of writing. This event constitutes an interesting example of a stress test<sup>47</sup> to gauge the models’ real time performance.

Below factors must be taken into consideration because of their importance in the methodology applied:

<sup>47</sup> The interested reader can refer to Basel Committee on Banking Supervision (1996, 2004), Jorion (1995), Penza and Bansal (2001), Christoffersen (2003), Dowd (1998, 2005), RiskMetrics Technical Document (1996) and Osterreichische Nationalbank (1999), just to name a few, for basic concepts and extensive treatment of stress testing.

- VaR:
  - A time horizon of one day is applied for estimation, assumption that stems from the trading frequency of the instruments analysed. Furthermore, the adoption of a longer time horizon (i.e., 10-day holding period) as suggested by the Basel Committee is purposefully left aside in view of the inconsistencies of the ‘square root of time rule’ detected by Danielsson (2004)<sup>48</sup> and Dowd (2005), among others;
  - As Rachev, Menn and Fabozzi (2005) affirm, differences in VaR estimations are significant at higher quantiles; consequently, the confidence level is anchored at 99%, in line with Basel Committee’s mandate;
  - Any realistic risk representation should account for asymmetry related to downside outcomes (Rachev, Menn and Fabozzi (2005)), hence devoting different treatments to upside and downside risks. Thus, estimations are carried out for both the lower and upper tails of the distribution, thus representing VaR for long and short positions respectively.
- VaR specifications:
  - Non-parametric models - Historical Simulation: lower and upper empirical quantiles are evaluated at 99% with a rolling window of 1000 trading days;
  - Full parametric models - Models of conditional volatility:
    - GARCH: parameters are obtained as is common practice via ML. Regarding distribution for the standardized returns  $r_t/\sigma_t$  the typical assumption of conditional normality will be applied. However, the study also makes use of the flexibility of the approach to fatten out the tails, with Student-t(d) distribution, where the degrees of freedom  $d > 2$  control the tail behaviour. VaR figures are calculated employing the factor  $\sqrt{(d-2)d^{-1}}$  to express a standardized Student-t(d) distribution;

Above specifications are symmetrical: the VaR figure obtained coincides for both tails (albeit with opposite signs);

  - Semi-parametric models
    - ◆ Unconditional Extreme Value Theory via POT:

---

<sup>48</sup> In fact, in order to achieve consistency among the three stages of data collection, parameter estimation and quantile estimation, the length of the time series must grow to such an extent that its compilation may prove virtually impossible, particularly in the context of emerging markets.



- Reiss and Thomas (2007) describe several methods to obtain the GDP parameters<sup>49</sup>: in view of the advantages over its counterparts as well as the reliability of its outcomes, the current research advocates usage of Maximum Likelihood Estimation (MLE)<sup>50</sup>. For a sample  $\{x_t\}_{t=1}^n$  the log-likelihood function  $L(\xi, \sigma, \mu / x)$  for GPD is delivered by the logarithm of the joint density of all the observations;
- It is assumed that all the series analysed  $\{x_t\}_{t=1}^n$  are iid. Despite the fact that this assumption seems not to be typical for financial time series (See Section 4.1), as Bao, Lee and Saltoğlu (2003) point out, EVT representations can also be employed for weakly dependent series<sup>51</sup>. Jondeau and Rockinger (2003) citing Smith (1985), add that provided the tail index  $\xi > -1/2$ , ML parameters are distributed conditionally normal. The asymptotic theory holds that, were the subsamples to be iid, the underlying return process would not need to be iid, furthermore implying that ML estimation of GEV distribution would render consistent estimates, albeit raw returns are not iid.
- ◆ Conditional Extreme Value Theory via QML and POT:
  - Dowd (2005) and McNeil and Frey (1999) and McNeil, Frey and Embrechts (2005) describe the process to apply EVT to obtain conditional EV models. It could succinctly be described in three steps:
    - First, estimation of some dynamic process (e.g., GARCH(1;1)) by Quasi-Maximum Likelihood method<sup>52</sup> (QML), i.e., avoiding any assumption about the distribution of the random innovations. This stage is usually called pre-whitening of the data. Standardized residuals are then removed and, at this stage should exhibit iid features. The dynamic GARCH is employed to forecast future volatility levels;
    - Second, application of EVT to the standardized residuals (via POT for this specific exercise);

<sup>49</sup> See Reiss and Thomas (2007).

<sup>50</sup> A comparison among the diverse procedures was carried out. For the sake of space constraints, results obtained via the Hill, M(GP1), Moment(GP), L-Moment(GP) and Drees-Pickands(GP) estimators are available upon request.

<sup>51</sup> Alternative solutions to account for data dependence could be given by the calculation of the extremal index  $\theta$  or filtering raw data by some conditional volatility model, applying EVT on the standardized independent residual series. See Danielsson (1997) and Brooks (2001), for instance.

<sup>52</sup> Details about QML methodology may be found in McNeil, Frey and Embrechts (2005).

- Third, calculation of VaR numbers considering both the dynamic structure GARCH and the residuals process driven by EVT as mentioned in 2.1 equation [2].
- Validation of VaR estimations:
  - Backtesting on the Modelled Probability Distribution: The idea behind this proof resides in checking the consistency between the probability distribution, i.e. VaR, and actual losses. Therefore, it is necessary to compare the loss on a given day with the VaR estimated for the same day, defining an exception or violation as any day in which the realized P&L exceeds the calculated daily VaR. This framework was engendered by the Basel Committee in its Capital Accord of 1996, which has been maintained up to the time of writing. Synthetically, it sets up a three-zone framework linked to the quantity of excessions recorded in the evaluation term, provided the sample period is statistically representative. A VaR scheme belongs to the Green Zone and therefore approved if the number of violations of 1% VaR does not exceed the Bernoulli 95% quantile (with  $p = 0.01$ ), falls under the Yellow Zone and is placed under close scrutiny with a number of violations up to the 99.99% quantile of the cited distribution and labelled as unsound and subject to re-estimation when more infringements occur (Red Zone). Expressing the above figures in terms of the sample size, a model passes regulatory standards when a maximum of 8 violations happen (1.67%) and remaining in doubt when between 9 and 14 excessions take place (2.93%).
  - Unconditional Coverage Test: According to Christoffersen (2003), its purpose resides in determining whether the difference between the fraction of violations rendered by a risk scheme,  $\pi$ , and the promised fraction,  $p$ , is statistically significant. This proof is carried out through the likelihood ratio<sup>53</sup>, which asymptotically follows a  $X^2_1$  as long as the number of observations  $T \rightarrow \infty$ :

$$LR_{uc} = -2 \ln \left\{ (1-p)^{T_0} p^{T_1} / \left[ (1 - T_1/T)^{T_0} (T_1/T)^{T_1} \right] \right\} \sim X^2_1$$

where  $T_1$  represents the quantity of excessions in the sample and  $T_0$  the opposite.

The existence of several other proofs devised to cannot be neglected. However, this study focuses on current performance regulatory assessment, which emphasizes unconditional coverage property disregarding efficiency connotations<sup>54</sup>.

<sup>53</sup> See Christoffersen (2003).

<sup>54</sup> For instance, Independence Test and Conditional Coverage Test. See Christoffersen (2003).

## 4. Empirical assessment

### 4.1. Data facts

Because of the advantages over its arithmetic counterpart<sup>55</sup>, this research will use logarithmic, geometric or continuously compounded returns (hereafter returns), defined as:

$$r_{t+1} = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) = \ln(P_{t+1}) - \ln(P_t)$$

where  $P_{t+1}$  is the price of the security at time  $t+1$  and the time horizon is one day.

Charts N°1 and N°2 depict several basic statistics regarding the daily return series. These facts are typical of daily financial time series as they tend to repeat across assets and markets. For every market, either developed or emerging, the average daily return is positive, although  $p$ -values verified suggest that these values are not significantly different from zero. Therefore, GARCH representations will be assumed driftless where the return equation is considered (See Section 2.2.2.). As in Jondeau and Rockinger (2003), the median situates in the neighbourhood of 0, possibly reflecting the effect of unfiltered null returns during holiday periods. Skewness constitutes an indicator to gauge the tail conduct of returns. For every index except JKSE it takes negative values, i.e., left tails are elongated compared to the right tail. Extreme values, then, are mostly concentrated on the negative side of the distribution, prompting the idea that crashes bring asymmetry (Jondeau and Rockinger (1999)). The joint degree of peakedness and tail fatness is measured by the Kurtosis. For every stock index, its value is well in excess of 3 (FTSE100 exceeds 11 and STRAIT 12), which is a clear indication of the departure from normality. Large Jarque-Bera statistics confirm the intuitive rejection of the null hypothesis of normality ( $p$ -values equal zero). Furthermore, demeaning and standardizing the return series to compare empirical percentiles with theoretical percentiles under normality, it is found that for each series there is substantial deviation from Gaussian distribution: for instance,  $q_5$  and  $q_{95}$  possess less quantity of observations than predicted by the normal distribution (1.6445) while empirical  $q_1$  (and smaller) and  $q_{99}$  (and greater) overcome theoretical one (2.326). Above findings strengthen the evidence of leptokurtic distributions, with fatter tails and higher and narrower centre than the Gaussian distribution.

Regarding autocorrelation considerations, the values of the Box-Ljung portmanteau  $Q(k)$  test for  $k = 20$  lags (recalling that  $Q(k) \sim X^2_k$ ) indicate that for 95% and 99% it is not possible to reject the null hypothesis of serial independence of linear returns. The probable evidence of a

---

<sup>55</sup> See Penza and Bansal (2001).

slight autocorrelation (at least) acts as a warning for EVT representations adopting the iid assumption, although provisions mentioned in Section 3 above apply as well. Analogous results are obtained for squared returns, albeit for this test values of  $Q(k)$  are very large, suggesting the presence of a high amount of heteroskedasticity, in principle paving the way for models of conditional volatility.

#### 4.2. Model parameters

Chart N°3 -Panels A and B- and Chart N°4 -Panels A and B- display the outcome of the estimation process, the statistics being significant for the usual confidence levels as reported by p-values. GARCH parameterizations, for every series, accomplish a remarkable job removing the strong temporal dependence in variance. There is an important reduction in  $Q^2_{20}$  statistic for squared standardised residuals  $\hat{\varepsilon}_t^2 / \hat{\sigma}_t^2$  compared with raw squared returns, fact verified either for mature or emerging markets. For example, the  $Q^2_{20}$  value for DAX (series with the highest level of squared autocorrelation) drops from 3830.1 to 2.23 for Normal and 2.17 for Student-t(d) specifications; the same values for STRAIT are 1539.6 against 3.20 (Normal) and 0.02 (Student-t(d)). The behaviour of the rest of the indices is similar. In order to asseverate the adequacy of GARCH representations, the series of standardized residuals must conform to a SWN process. This is usually corroborated applying Ljung-Box portmanteau tests on squared or absolute values of the series: p-values for all the indices suggest the presence of SWN processes.

GARCH coefficients point out a common feature observed in high-frequency return series, namely the high degree of persistence. For every series in both groups,  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ <sup>56</sup> figures are well above 0.90, reaching 0.99 for DAX, FTSE100 and IGBM (Student-t(d)), almost on the brink of an IGARCH model ( $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 1$ ) suitable for non-stationary time series. The implication is that conditional variances are processes with very long memory: effects of shocks to volatility smoothly decline over time. It is also clear from GARCH coefficients that volatility is mostly explained by last period's variance forecast  $\hat{\beta}$  given that it measures the extent of persistence of the shock: the closer to 1, the more weight is placed on past observations to the detriment of recent ones, therefore producing very smooth series. Chart N°4 -Panels A and B- also exhibits

---

<sup>56</sup> The factor  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$  might also shed light on the mechanics of conditional volatility. See Andersen, Bollerslev and Diebold (2002).

a substantial reduction of kurtosis in standardized residuals, although it can be verified the presence of uncaptured kurtosis. However, in the cases of SMI, DAX, IGBM and STRAIT, GARCH models seem to have failed in reducing excess kurtosis: a likely solution could be tried by fitting GARCH with further lags or extensions to the GARCH class<sup>57</sup>.

As it was mentioned in the first paragraph, given the reasonable evidence that standardized residuals behave like SWN, the SWN hypothesis is not rejected and the dynamics of the process have been satisfactorily captured (Mc Neil, Frey and Embrechts (2005)). Hence, the appropriateness of the distribution employed in ML fitting could also be scrutinized by means of QQ plots. In this sense, Graph N°4.1 reveals that models with Student-t(d) innovations fit clearly better to the data, hence deserving to be preferred to models with Normal random terms, fact that should be reflected at the time of Backtesting. However, for all the series considered deviations from the Student-t(d) distribution may also be verified particularly in the lower tail.

ML outcomes for EVT-GPD schemes of unconditional EVT are depicted in Chart N°5 – Panels A and B-. Despite the absence of precise rules regarding the quantity of higher order statistics, less than 10% of data is devoted to the analysis of extremes taking into consideration both tails of the distribution<sup>58</sup>. Unfortunately, there is a great amount of heterogeneity among location and scale estimates, hence thorough scrutiny and formal testing should be employed to draw conclusions about the difference of tails between mature and emerging markets. However, values of  $\mu^+$  and  $\sigma^+$ , which reveal themselves different than its left counterparts  $\mu^-$  and  $\sigma^-$  for every index, coupled with estimates of tail index  $\xi$  may contribute to the assessment of asymmetry between the ends of the distributions. Having pinpointed the disparity in terms of location and scale, the case of the tail index must be addressed. From the values obtained, it is clear that both tails of the distributions are fat for every group ( $\xi > 0$ ). Positive records for  $\xi^-$  and  $\xi^+$  mean that distributions are heavy tailed in both extremes, hence belonging to the classic General Pareto Distribution (GPD) which eventually corresponds to the Fréchet family in Extreme Value Theory (EVT)<sup>59</sup>. Additionally, except the case of JKSE where  $\xi^-$  and  $\xi^+$  appear approximately similar (0.1609 and 0.1586), values for SMI, DAX, FTSE100, CAC40, TAS, IPCC, ISE and STRAIT would suggest an appreciable difference between left and right tails, albeit it is not possible to make strong statements without formal tests. For this particular example, five indices show that  $\xi^+ > \xi^-$ , which might imply that right tail is even thicker than left

<sup>57</sup> See McNeil, Frey and Embrechts (2005).

<sup>58</sup> Incidentally this relative quantity is within the quantity recommended by Christoffersen (2003) as a ‘rule-of-thumb’. See Section 2.2.3.2.1. and Christoffersen (2003).

<sup>59</sup> See Section 2.2.3.1.

one in those cases. On the contrary, FTSE100, CAC40, IGBM and STRAIT present the opposed relationship. Approximate 95% confidence intervals show that, at a glance, the bulk of  $\xi$  values appear to fall into the positive domain thus conveying the idea of unbounded distributions, but the existence of a left side of the range cannot be overseen (except left tail for FTSE100, CAC40, IGBM and IPCC and the right tail for SMI, IPCC and STRAIT, where the interval is completely right tilted). The study is not conclusive in this respect as there is only weak evidence to exclude zero values for  $\xi$  and consequently reject the null  $\xi = 0$ , or the possibility of an exponential-like distribution. From the above figures, it is not possible to infer significant differences between developed and emerging markets.

Recalling former paragraphs, though Gaussian and Student-t(d) likelihood did a reasonable good job tracking the dynamics of the processes, standardized residuals in QQ plots do not behave like iid standard normal or standardized Student-t(d), thus laying the grounds for the analysis exposed in 3. Outcomes for EVT applied to the pre-whitened data are somewhat different to those obtained for raw returns (Chart N°5 –Panels C and D). Again, mixed evidence is the common denominator regarding left and right location and scale parameters, hampering conclusions about differences between groups of markets. Variations eventually appear in tail indices. Generally,  $\xi^-$  augmented (except the decrease in FTSE100 and IPCC) but disparity was the common denominator among  $\xi^+$ , with confidence intervals mirroring this side displacement. McNeil, Frey and Embrechts (2005) offer a likely explanation about the disparity obtained in the outcomes stating that the QML process is intrinsically more imprecise than ML because it carries two classes of errors: dynamic estimation (GARCH-fitting) and GPD calibration on standardized residuals. They add that estimation errors in QML might grow in such a way that they are very difficult to trace and quantify, thus implying the somewhat inexact parameter values.

Notwithstanding the glitches in the model adjusting stage, the aforementioned facts would in principle confirm the evidence of skewed and leptokurtic distributions characteristic of financial return series, therefore suggesting that Normal distribution should prove inadequate to mimick market behaviour<sup>60</sup>. Hence, models stemming from EVT should take advantage of the asymmetry of the distributions, this way delivering more accurate predictions.

---

<sup>60</sup> See Fama (1963) and Mandelbrot (1963) for pioneering studies about non-normality of financial return series. Nowadays this belief is more widespread albeit some practitioners continue utilizing the Gaussian approach through adjustments like Cornish-Fischer VaR or more ad-hoc procedures. See Da Costa Lewis (2002), Christoffersen (2003) or Penza and Bansal (1999).

### 4.3. VaR forecasts

The global crisis which started in September 2008 and still affects financial markets at the time of writing constitutes a good stress test to evaluate the models posed. In this sense, it is important to highlight that in 2008 (second year of backtest period) volatility (measured by the standard deviation) almost doubled in average in comparison with the estimation period: SMI: 2.21%-1.12%, FTSE100: 2.36%-1.02%, DAX: 2.37%-1.40%, CAC40: 2.51%-1.31%, IGBM: 2.39%-1.13%, JKSE: 2.48%-1.84%, TAS: 2.38%-1.45%, IPCC: 2.28%-1.64%, STRAIT: 2.20%-1.24% (excepting ISE where it decreased from 2.90% to 2.67%<sup>61</sup>) although the increment is somewhat less for emerging markets because of their inherent volatile nature.

The outcomes reported in Chart N°6 –Columns 2 and 4 in Panels B to K- disclose that performance varies across models and distributional assumptions. It is evident that unconditional HS handles the situation very poorly, giving birth to too many violations in both tails. The rest of the schemes supply adequate estimates for the upper tail of every distribution, exempting Conditional EVT for France and GARCH-Normal for IGBM. Regarding the left end, serious shortfalls are verified in GARCH-Normal where the number of violations overcomes the expected number (the difference is striking for normal GARCH for FTSE100, IGBM, JKSE, TAS and STRAIT, where excessions triple the predicted quantity of 5). GARCH-t appears to work better, alternating remarkable results (STRAIT) with bad ones (FTSE100). Again, models make no distinction between mature and emerging markets. EVT procedures offer significant improvement in both versions. Except for right tails in SMI and CAC40 in Conditional EVT, EVT gives between 0 and 5 infringements (fewer or equal than expected), which is a noteworthy performance at 99%. These methods are specially devised for violent market swings: unconditional EVT, like all unconditional representations, is more adequate for long forecast periods, and conditional EVT, being a conditional method, is capable of responding to the abrupt changes in volatility during 2008.

### 4.4. Effects on Regulatory Capital

Backtesting on the Modelled Probability Distribution shows the inability of Historical Simulation to grasp the indices' down and up movements, their records well within the Red Zone. On the other hand, conditional GARCH models, with Gaussian and Student-t(d) distributions deliver good results for every positive end with quantities of excessions belonging to the Green Zone, the only exception being IGBM for GARCH-Normal (Yellow Zone). Mixed

---

<sup>61</sup> Figures of the estimation period are influenced by Turkish financial crisis of 2000/2001.

fortunes befall on the left tail. GARCH-t yields slightly better results than GARCH-Normal, getting one Red Zone (FTSE100), five Green Zones (DAX, CAC40, IGBM, IPCC and ISE) and four Yellow Zones (SMI, JKSE and TAS and STRAIT), whereas its counterpart gives three Red Zones (FTSE100, JKSE and TAS), three Green Zones (CAC40, IPCC and ISE) and four Yellow ones (SMI, DAX, IGBM and STRAIT). All specifications but Historical Simulation might pass regulatory tests for short positions, saving for Historical Simulation in Turkey, GARCH-Normal in Spain and GARCH-EVT in France where they would be eventually scrutinised, whereas for long ones, Historical Simulation scheme would always be dismissed and both GARCH would follow suit in FTSE100. Student-t(d) innovations could be granted approval in Germany, France, Spain, Mexico and Turkey and placed under study in Switzerland, Indonesia, Israel and Singapore. Normal random shocks would be approved in France, Mexico and Turkey, observed in Switzerland, Germany, Spain and Singapore and rejected in Indonesia and Israel. EVT models (conditional or unconditional) render unquestionably better results: for long and short positions, emerging and developed markets, they are always positioned in the Green Zone, saving for France's right end as conditional EVT would be placed under analysis.

The importance of Backtesting on the Modelled Probability Distribution resides in its usage for the determination of the Amount of Regulatory Capital to be held for Market Risks. Basel Committee envisages the application of a variable add-on factor (multiplier) ranging between 0 and 1 depending on the performance of the model in the above proof to calculate that quantity. Chart N°6 –Columns 3 and 5 in Panels B to K- exhibits the additional percentage of capital to be put aside in order to comply with regulations: 33% for those schemes trapped into the Red Zone and values between the interval 13% and 30% for the Yellow one; Green Zone does not hold supplementary capital.

For Historical Simulation 33% of adjustment and subsequent invalidation is the upshot for both positions in all indices but short one in ISE (23%). Short positions would not demand additional capital were any model to be applied save for GARCH-Normal in IGBM (13%) and GARCH-EVT in CAC40 (16%); some differences appear for investments in long positions as the slender advantage for GARCH-t over GARCH-Normal translates into minor capital adjustments, except the case of FTSE100 where both specifications would be disallowed and subsequently re-estimated and CAC40, IPCC and ISE, as both structures would pass regulatory test. For the rest of the time series evaluated, GARCH with Student-t(d) innovations would claim lower capital adjustments (Gaussian values between parentheses): SMI, 13% (23%), DAX, 0% (13%), IGBM 0% (30%), JKSE, 16% (33%, further recalculation needed), TAS, 20%



(33%, further recalculation needed) and STRAIT, 13% (26%). EVT models, either unconditional or dynamic GARCH-EVT pass the test with flying colours, consequently avoiding recalibration or closer follow-up with the only exception of the CAC40's upper tail in conditional EVT, where a supplementary capital of 16% would be required.

Basel Committee requires the Unconditional Coverage Test to assess the difference between the empirical and proposed fractions of excessions, which p-values are reproduced in Chart N°7. Results emanated from the likelihood ratio are consistent with Backtesting on the Modelled Probability Distribution, as expected<sup>62</sup>. The null  $\pi = p$  calculated at 90% confidence level is rejected for all cases falling into the Red and Yellow Zones. Estimations belonging to the Green region mean null hypothesis accepted.

#### 4.5. VaR levels

Graph N°4.2 shows VaR estimates for the schemes proposed in real time, which appear to be severely affected by year 2008 fluctuations. The final picture allows the appreciation that models relying on Extreme Value Theory did the best job at the time of quantifying market risk, thus leading to minor losses in comparison with HS or GARCH-Normal and GARCH-t. However, as the quantity of excessions recorded by any scheme is inversely proportional to VaR amounts, better precision exhibited by EVT comes at the expense of higher VaR numbers. Even though they might initially appear a bit excessive, Alexander (2008:60) points out that "...equity portfolios with volatilities running at 40%-60% could have ... a VaR of about 25% of the portfolio value". Considering that regulators determine the Capital Requirements (CR) according to the formula:

$$CR = 3 \times (1 + \theta) \times VaR + C \quad [8]$$

where:

- 3 : multiplicative scaling factor
- $\theta$  : add-on factor ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) mentioned in 4.5
- C : constant

the current study favours reflections in Danielson and de Vries (1997:21), in the sense that "...the EV method gives results close to the expected value, suggesting that the constant should

---

<sup>62</sup> The upper tail of SMI for Conditional EVT appears to be the only discrepancy, as the empirical quantity of violations of 7 is almost on the threshold of 8. Authorities would then decide on further adjustment of the model, albeit the fact that it does not require additional capital is not to be neglected.

be close to one if EV is used for VaR. While a high scaling factor may be justified in the normal case, by using the estimate of the tails, as we do with EV method, the multiplicative factor can be much lower.”

## 5. Concluding remarks

Regardless of its theoretical flaws, VaR became an industry standard. Among the range of its likely applications, Basel Committee allows financial institutions to employ their own Value-at-Risk models to determine Capital Requirements. If financial institutions overestimate VaR, their shareholders will probably penalize them; whereas regulators will do the same in case of VaR underestimation, from where it springs the importance of accurate VaR calculations.

The research explored several techniques to VaR estimation for both ends of the P&L distribution in a series of developed and emerging markets. Events occurred in 4Q2008 provided an excellent real time backtest.

Typical non-parametric models like Historical Simulation did not provide a reasonable good fit since they naively assume that past empirical distribution will drive future one, fault that cannot be redeemed by the rolling window sample. Conditional volatility models should, in principle, reflect the autocorrelation present in squared returns, which is a fact shared by the almost entirety of financial time series. However, as in McNeil and Frey (1999), Normal innovations are unable to capture the leptokurtic distribution of residuals; Student-t(d) innovations work slightly better but still underestimate true exposures, therefore alerting on the implications that these supposition may bring about. Like Jondeau and Rockinger (2003), the study has not been conclusive about differences between tail parameters of the same index and cross-country evidence is mixed. They suggest that extreme events do not occur frequently enough as to provoke statistically significant differences between right and left tails. Furthermore, the authors cite a feasible explanation in Campbell and Hentschel (1992). As stock prices get moved by news, upside values get softened by the increase in risk premium demanded by higher volatility; conversely, the downward movement that takes place when stock prices lower as a result of bad news gets amplified by the increase in risk premium. Notwithstanding the apparent statistical imprecision, EVT-GPD emerges as an important contribution to calculate VaR in view of its acknowledgment of asymmetry (i.e., flexibility to model right and left tails of the distributions separately). Normal and Student-t(d) distributions are able to capture gains but their performance is deficient in the event of losses. Therefore, whenever sample distribution presents skewness, there is evidence that it would not be appropriate to utilize

models that treat volatility as a symmetrical phenomenon. Very good performance in several backtesting proofs avails that fat-tailed GPD-approximations (conditional or unconditional) should be employed to model tails separately from the body of the distribution.

The current financial crisis that unfolded in September 2008 seems to have rocked some theoretical foundations: backtesting period resembled an exercise of stress simulation rather than a real time check<sup>63</sup>. Although at the time of writing it was very premature to proffer definitive statements, it could have altered the return distributions, given that extreme events should have become more likely. In many respects, both emerging and developed markets suffered similar violent upside and downside jerks, which were typically property of the former (SMI 10.79% and -8.11%, FTSE 9.38% and -9.27%, DAX 10.80% and -7.43%, CAC40 10.59% and -9.47%, IGBM 9.87% and -9.68%, JKSE 7.26% and -10.95%, TAS 9.71% and -10.54%, IPCC 10.44% and -7.27%, ISE 12.13% and -9.01%, STRAIT 7.53% and -9.22%), and those jumps might contribute to blur the statistical distinction between groups. Generally, that class of movements was not included in the sample periods (except Oct-1987 crash in FTSE100 and IGBM), then being overlooked by HS and unaccounted for by Normal and Student-t(d) distributions. EVT specifications, by only modelling the tails parametrically, permit the evaluation of the risk of unobserved losses, allowing for extrapolation beyond the range of the data through firm statistical foundations.

Universidad de  
**San Andrés**

Chart N°1  
*Basic statistics – Developed Markets*

<b>Parameter/ Index</b>	<b>SMI</b>	<b>DAX</b>	<b>FTSE100</b>	<b>CAC40</b>	<b>IGBM</b>
Observations	4060	4059	5746	5081	5934
Mean	0.00045	0.00037	0.00030	0.00026	0.00054
Median	0.00085	0.00079	0.00062	0.00000	0.00018
Maximum	0.07462	0.07553	0.07597	0.08225	0.06940
Minimum	-0.08383	-0.09871	-0.13029	-0.10138	-0.09734
Std. Dev.	0.01124	0.01400	0.01019	0.01305	0.01135
Skewness	-0.21486	-0.20871	-0.54654	-0.28645	-0.34134
Kurtosis	7.88219	6.76466	11.13992	7.78870	8.12294

<sup>63</sup> See Oesterreichische Nationalbank (1999) for a comprehensive guideline about stress tests.

Chart N°1 (cont.)

*Basic statistics – Emerging Markets*

Parameter/ Index	JKSE	TAS	IPCC	ISE	STRAIT
Observations	2299	1910	3777	4954	4749
Mean	0.00039	0.00061	0.00077	0.00174	0.00027
Median	0.00059	0.00031	0.00074	0.00014	0.00026
Maximum	0.13128	0.07692	0.12154	0.17774	0.12874
Minimum	-0.12732	-0.10382	-0.14314	-0.19979	-0.10545
Std. Dev.	0.01837	0.01453	0.01636	0.02904	0.01239
Skewness	0.01495	-0.35585	-0.01223	-0.05093	-0.04900
Kurtosis	9.76440	6.91726	8.45403	6.52779	12.96032

Chart N°2

*Comparison with Normal distribution – Developed Markets*

Parameter	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM
Jarque-Bera	4051.08 (0.00)	2418.61 (0.00)	16117.6 (0.00)	4916.40 (0.00)	6596.20 (0.00)
Q(20)	58.6 (0.00)	45.5 (0.00)	69.1 (0.00)	33.3 (0.03)	137.1 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	3000.1 (0.00)	3830.1 (0.00)	3345.9 (0.00)	3548.0 (0.00)	2706.9 (0.00)
q(0.01)	-6.558	-6.143	-9.073	-7.386	-8.039
q(1.00)	-2.955	-2.910	-2.811	-2.831	-2.839
q(5.00)	-1.558	-1.639	-1.549	-1.598	-1.581
q(10.00)	-1.100	-1.123	-1.134	-1.108	-1.109
q(90.00)	+1.075	+1.071	+1.073	+1.091	+1.103
q(95.00)	+1.489	+1.512	+1.438	+1.500	+1.562
q(99.00)	+2.462	+2.623	+2.529	+2.626	+2.641
q(99.99)	+6.246	+5.290	+6.472	+5.806	+5.766

Note: *p-values between parentheses*

Chart N°2 (cont.)

*Comparison with Normal distribution – Emerging Markets*

Parameter	JKSE	TAS	IPCC	ISE	STRAIT
Jarque-Bera	4360.83 (0.00)	1253.11 (0.00)	4666.33 (0.00)	2566.52 (0.00)	20548.4 (0.00)
Q(20)	104.7 (0.00)	30.7 (0.06)	82.8 (0.00)	90.6 (0.00)	108.17 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	667.37 (0.00)	198.3 (0.00)	934.2 (0.00)	1370.7 (0.00)	1539.6 (0.00)
q(0.01)	-6.728	-6.854	-7.815	-6.289	-7.998
q(1.00)	-2.726	-2.649	-2.559	-2.827	-2.700
q(5.00)	-1.498	-1.545	-1.520	-1.574	-1.477
q(10.00)	-1.027	-1.140	-1.096	-1.079	-1.006
q(90.00)	+1.014	+1.155	+1.090	+1.145	+1.032
q(95.00)	+1.498	+1.525	+1.520	+1.605	+1.417
q(99.00)	+2.877	+2.384	+2.794	+2.787	+2.716
q(99.99)	+6.921	+5.150	+7.076	+5.944	+8.826

Note: *p-values between parentheses*

Chart N°3

*Model parameters**Panel A: GARCH-Normal*

Parameter/Index	c	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$
SMI	0.00 (0.00)	0.12 (0.00)	0.83 (0.00)	0.95
DAX	0.00 (0.00)	0.08 (0.00)	0.90 (0.00)	0.98
FTSE100	0.00 (0.00)	0.09 (0.00)	0.89 (0.00)	0.98
CAC40	0.00 (0.00)	0.09 (0.00)	0.89 (0.00)	0.98
IGBM	0.00 (0.00)	0.09 (0.00)	0.88 (0.00)	0.97
JKSE	0.00 (0.00)	0.13 (0.00)	0.85 (0.00)	0.98
TAS	0.00 (0.00)	0.10 (0.00)	0.83 (0.00)	0.93
IPCC	0.00 (0.00)	0.11 (0.00)	0.87 (0.00)	0.98
ISE	0.00 (0.00)	0.13 (0.00)	0.84 (0.00)	0.97
STRAIT	0.00 (0.00)	0.15 (0.00)	0.81 (0.00)	0.96

Note: *p-values between parentheses*

Panel B: GARCH  $t(d)$ 

Parameter/Index	c	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	dof (d)
SMI	0.00 (0.00)	0.10 (0.00)	0.88 (0.00)	0.98	9.01 (0.00)
DAX	0.00 (0.00)	0.08 (0.00)	0.91 (0.00)	0.99	9.05 (0.00)
FTSE100	0.00 (0.00)	0.08 (0.00)	0.91 (0.00)	0.99	14.99 (0.00)
CAC40	0.00 (0.00)	0.07 (0.00)	0.91 (0.00)	0.98	8.84 (0.00)
IGBM	0.00 (0.00)	0.11 (0.00)	0.88 (0.00)	0.99	6.24 (0.00)
JKSE	0.00 (0.00)	0.13 (0.00)	0.84 (0.00)	0.97	4.51 (0.00)
TAS	0.00 (0.00)	0.08 (0.00)	0.88 (0.00)	0.96	5.67 (0.00)
IPCC	0.00 (0.00)	0.10 (0.00)	0.88 (0.00)	0.98	6.94 (0.00)
ISE	0.00 (0.00)	0.18 (0.00)	0.80 (0.00)	0.98	5.59 (0.00)
STRAIT	0.00 (0.00)	0.14 (0.00)	0.83 (0.00)	0.97	5.58 (0.00)

Note: *p-values between parentheses*

Chart N°4

Standardised residuals – Basic statistics

Panel A: GARCH-Normal - Developed Markets

Parameter/Index	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM
Mean	0.06647	0.05792	0.05010	-0.02541	-0.02275
Median	0.11276	0.08678	0.09134	-0.03689	-0.05247
Std. Dev.	1.01700	1.00141	1.01157	0.99973	0.99975
Maximum	6.14365	4.71254	6.05533	4.45662	5.68601
Minimum	-12.49220	-12.89926	-6.74117	-9.59223	-12.46625
Skewness	-1.03194	-1.11132	-0.29912	-0.42514	-0.74225
Kurtosis	13.94177	15.98199	4.92428	5.71614	11.80872
Jarque-Bera	11969.4 (0.00)	16747.3 (0.00)	392.0 (0.00)	1715.2 (0.00)	19729.9 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	3.25 (1.00)	2.23 (1.00)	65.30 (0.00)	13.60 (0.85)	3.60 (1.00)

Note: *p-values between parentheses*

Panel A: GARCH-Normal – Emerging Markets

Parameter/Index	JKSE	TAS	IPCC	ISE	STRAIT
Mean	0.02863	0.04123	0.02800	0.00178	-0.02297
Median	0.03936	0.02361	0.00572	-0.03684	-0.01958
Std. Dev.	0.99958	0.99937	1.03673	1.00021	1.00011
Maximum	5.27746	5.49027	4.54495	5.30486	7.05121
Minimum	-6.31898	-5.42487	-7.08672	-6.90307	-14.1326
Skewness	-0.32284	-0.30480	-0.17958	-0.22602	-0.70066
Kurtosis	6.28364	5.54905	4.86883	5.51778	14.24543
Jarque-Bera	1072.8 (0.00)	546.7 (0.00)	349.6 (0.00)	1351.0 (0.00)	25417.1 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	19.00 (0.52)	16.60 (0.68)	41.30 (0.00)	37.80 (0.01)	3.20 (1.00)

Note: *p-values between parentheses*

Panel B: GARCH- $t(d)$  – Developed Markets

Parameter/Index	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM
Mean	0.06774	0.05807	0.04987	-0.03551	-0.01777
Median	0.11729	0.08851	0.09034	-0.04385	-0.04605
Std. Dev.	1.04006	1.03180	1.01429	1.00527	1.02456
Maximum	6.50999	5.30759	6.17876	4.23568	6.06986
Minimum	-14.14280	-14.27955	-6.79766	-9.91825	-15.41816
Skewness	-1.31237	-1.34570	-0.30375	-0.45700	-1.11343
Kurtosis	18.9723	20.05780	5.05998	5.98558	18.57719
Jarque-Bera	25294.2 (0.00)	28789.8 (0.00)	445.3 (0.00)	2064.5 (0.00)	61221.0 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	3.09 (1.00)	2.17 (1.00)	80.13 (1.00)	14.40 (0.81)	4.60 (1.00)

Note: *p-values between parentheses*

*Panel B: GARCH-t(d) – Emerging Markets*

Parameter/Index	JKSE	TAS	IPCC	ISE	STRAIT
Mean	0.02690	0.03222	0.02872	-0.00605	-0.02279
Median	0.03941	0.01351	0.00563	-0.04221	-0.01938
Std. Dev.	0.98667	0.99834	1.03814	0.99824	1.02028
Maximum	5.24636	5.44713	4.48714	5.45111	7.24701
Minimum	-6.20582	-5.62360	-7.38756	-7.56200	-14.77342
Skewness	-0.33884	-0.36453	-0.19422	-0.25372	-0.75439
Kurtosis	6.37294	5.53795	5.01418	5.82244	15.08551
Jarque-Bera	1133.8 (0.00)	673.1 (0.00)	406.2 (0.00)	1697.8 (0.00)	29358.2 (0.00)
Q <sup>2</sup> (20)	21.10 (0.39)	22.46 (0.34)	43.86 (0.00)	36.51 (0.01)	0.02 (1.00)

Note: *p*-values between parentheses

Chart N°5*Generalized Pareto Distribution parameters – Maximum Likelihood Estimates**Panel A: Unconditional GPD - Left tail values – Developed Markets*

Parameter/Index	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM
$u^-$ (quantity)	156 (3.84%)	224 (5.20%)	250 (4.17%)	152 (2.99%)	166 (2.80%)
$u^-$ (value)	-0.02011	-0.02172	-0.01632	-0.02538	-0.02229
$\xi^-$	0.1264	0.0665	0.2001	0.1867	0.1820
Confid. Interval	(-0.02;0.27)	(-0.05;0.18)	(0.07;0.33)	(0.03;0.34)	(0.03;0.33)
$\mu^-$	-0.0446	-0.1299	-0.0173	-0.0444	-0.0172
$\sigma^-$	0.0512	0.1373	0.0255	0.0514	0.0272

*Panel A: Unconditional GPD - Left tail values – Emerging Markets*

Parameter/Index	JKSE	TAS	IPCC	ISE	STRAIT
$u^-$ (quantity)	139 (6.05%)	86 (4.50%)	219 (5.80%)	62 (1.25%)	200 (4.21%)
$u^-$ (value)	-0.02516	-0.02331	-0.02325	-0.07650	-0.01939
$\xi^-$	0.1608	0.1588	0.1979	0.1117	0.2218
Confid. Interval	(0.00;0.32)	(-0.05;0.36)	(0.06;0.33)	(-0.12;0.34)	(-0.11;0.25)
$\mu^-$	-0.0554	-0.0383	-0.0234	-0.0986	-0.0021
$\sigma^-$	0.0586	0.0417	0.0345	0.1284	0.0284

*Panel B: Unconditional GPD - Right tail values – Developed Markets*

Parameter/Index	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM
$u^+$ (quantity)	203 (5.00%)	93 (2.29%)	201 (3.50%)	205 (4.88%)	131 (3.12%)
$u^+$ (value)	0.0172	0.0291	0.0176	0.02130	0.02489
$\xi^+$	0.2642	0.1191	0.1222	0.1289	0.0988
Confid. Interval	(0.08;0.45)	(-0.08;0.32)	(-0.01;0.25)	(0.00;0.26)	(-0.06;0.26)
$\mu^+$	-0.0516	-0.0520	-0.0349	-0.0450	-0.050
$\sigma^+$	0.0147	0.0611	0.0431	0.0541	0.061

*Panel B: Unconditional GPD - Right tail values – Emerging Markets*

Parameter/Index	JKSE	TAS	IPCC	ISE	STRAIT
$u^+$ (quantity)	100 (4.35%)	56 (2.60%)	46 (1.22%)	86 (2.05%)	195 (4.64%)
$u^+$ (value)	0.0298	0.0285	0.0455	0.0734	0.0197
$\xi^+$	0.1586	0.2732	0.2694	0.1540	0.1918
Confid. Interval	(0.00;0.32)	(-0.05;0.36)	(0.06;0.33)	(-0.05;0.36)	(0.11;0.56)
$\mu^+$	-0.0581	0.0058	0.0106	-0.0277	-0.0281
$\sigma^+$	0.0610	0.0103	0.0152	0.0693	0.0350

*Panel C: Conditional GPD - Left tail values – Developed Markets*

Parameter/Index	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM
$u^-$ (quantity)	124 (3.05%)	201 (4.95%)	245 (4.26%)	152 (2.99%)	171 (2.88%)
$u^-$ (value)	-1.9781	-1.6410	-1.7403	-1.9841	-1.9509
$\xi^-$	0.2503	0.1758	0.1175	0.2852	0.3100
Confid. Interval	(0.07;0.43)	(0.04;0.31)	(0.00;0.23)	(0.11;0.46)	(0.14;0.47)
$\mu^-$	0.2503	-1.0445	-2.2707	0.5306	0.3846
$\sigma^-$	1.0249	2.0258	3.4006	0.8529	0.9067

*Panel C: Conditional GPD - Left tail values – Emerging Markets*

Parameter/Index	JKSE	TAS	IPCC	ISE	STRAIT
$u^-$ (quantity)	175 (7.62%)	150 (7.86%)	107 (2.83%)	90 (1.82%)	143 (3.01%)
$u^-$ (value)	-1.3107	-1.2900	-2.0211	-2.2892	-1.9081
$\xi^-$	0.1766	0.2180	0.1702	0.1823	0.3611
Confid. Interval	(0.03;0.32)	(0.05;0.38)	(-0.01;0.36)	(-0.02;0.39)	(0.17;0.55)
$\mu^-$	-1.9775	-1.1351	-0.7949	-1.1562	0.6394
$\sigma^-$	2.4176	1.6039	1.9252	2.2226	0.6293

*Panel D: Conditional GPD - Right tail values – Developed Markets*

Parameter/Index	SMI	DAX	FTSE100	CAC40	IGBM
$u^+$ (quantity)	71 (1.75%)	203 (5.00%)	258 (4.49%)	24 (0.47%)	52 (0.88%)
$u^+$ (value)	2.0441	1.6000	1.6364	2.6337	2.4206
$\xi^+$	0.3773	0.1836	0.1114	0.1840	0.3212
Confid. Interval	(0.11;0.65)	(0.05;0.32)	(0.00;0.22)	(-0.21;0.58)	(0.01;0.61)
$\mu^+$	1.3544	-0.2098	-1.5556	1.1025	1.3075
$\sigma^+$	0.3658	1.3058	2.4610	0.7714	0.4430

*Panel D: Conditional GPD - Right tail values – Emerging Markets*

Parameter/Index	JKSE	TAS	IPCC	ISE	STRAIT
$u^+$ (quantity)	82 (3.57%)	69 (3.21%)	109 (2.89%)	67 (1.35%)	129 (2.72%)
$u^+$ (value)	1.8310	1.7700	1.9765	2.4087	1.8355
$\xi^+$	0.1416	0.0801	0.1205	0.1034	0.2445
Confid. Interval	(-0.06;0.35)	(-0.13;0.29)	(-0.06;0.30)	(-0.12;0.33)	(0.06;0.42)
$\mu^+$	-1.6124	-4.6183	-1.5572	-1.9546	-0.1486
$\sigma^+$	1.9977	4.8111	2.3181	3.3007	1.2034

## Chart N°6

*Backtesting on the Modelled Probability Distribution**Panel A: Rescaled table for n=471-507 observations  
Bernoulli distribution with  $p=0.90\%$* 

<b>Exceptions</b>	<b>Zone</b>	<b>Multiplier (Add-on factor)</b>
0 – 8	Green	0.00 = 0%
9	Yellow	0.13 = 13%
10	Yellow	0.16 = 16%
11	Yellow	0.20 = 20%
12	Yellow	0.23 = 23%
13	Yellow	0.26 = 26%
14	Yellow	0.30 = 30%
15 or greater	Red	0.33 = 33%

*Panel B: Backtesting on the Modelled Probability Distribution - SMI*

<b>Model / Tail</b>	<b>Left tail Number</b>	<b>Left tail Zone – Add-on</b>	<b>Right tail Number</b>	<b>Right tail Zone-Add-on</b>
<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
Historical Simulation	22	Red – 33%	23	Red – 33%
GARCH-Normal	12	Yellow – 23%	7	Green – 0%
GARCH-Student-t(d)	9	Yellow – 13%	3	Green – 0%
Unconditional EVT-GPD	0	Green – 0%	1	Green – 0%
Conditional EVT-GPD	3	Green – 0%	7	Green – 0%

*Panel C: Backtesting on the Modelled Probability Distribution - DAX*

<b>Model / Tail</b>	<b>Left tail Number</b>	<b>Left tail Zone – Add-on</b>	<b>Right tail Number</b>	<b>Right tail Zone-Add-on</b>
<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
Historical Simulation	20	Red – 33%	18	Red – 33%
GARCH-Normal	9	Yellow – 13%	6	Green – 0%
GARCH-Student-t(d)	7	Green – 0%	6	Green – 0%
Unconditional EVT-GPD	0	Green – 0%	3	Green – 0%
Conditional EVT-GPD	1	Green – 0%	0	Green – 0%

*Panel D: Backtesting on the Modelled Probability Distribution – FTSE100*

<b>Model / Tail</b>	<b>Left tail Number</b>	<b>Left tail Zone – Add-on</b>	<b>Right tail Number</b>	<b>Right tail Zone-Add-on</b>
<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
Historical Simulation	26	Red – 33%	26	Red – 33%
GARCH-Normal	16	Red – 33%	7	Green – 0%
GARCH-Student-t(d)	15	Red – 33%	4	Green – 0%
Unconditional EVT-GPD	3	Green – 0%	4	Green – 0%
Conditional EVT-GPD	0	Green – 0%	0	Green – 0%



*Panel E: Backtesting on the Modelled Probability Distribution – CAC40*

<b>Model / Tail</b>	<b>Left tail Number</b>	<b>Left tail Zone – Add-on</b>	<b>Right tail Number</b>	<b>Right tail Zone-Add-on</b>
<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
Historical Simulation	26	Red – 33%	24	Red – 33%
GARCH-Normal	8	Green – 0%	7	Green – 0%
GARCH-Student-t(d)	5	Green – 0%	4	Green – 0%
Unconditional EVT-GPD	4	Green – 0%	1	Green – 0%
Conditional EVT-GPD	3	Green – 0%	10	Yellow – 16%

*Panel F: Backtesting on the Modelled Probability Distribution – IGBM*

<b>Model / Tail</b>	<b>Left tail Number</b>	<b>Left tail Zone – Add-on</b>	<b>Right tail Number</b>	<b>Right tail Zone-Add-on</b>
<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
Historical Simulation	26	Red – 33%	26	Red – 33%
GARCH-Normal	14	Yellow – 30%	9	Yellow – 13%
GARCH-Student-t(d)	7	Green – 0%	2	Green – 0%
Unconditional EVT-GPD	5	Green – 0%	3	Green – 0%
Conditional EVT-GPD	4	Green – 0%	4	Green – 0%

*Panel G: Backtesting on the Modelled Probability Distribution - JKSE*

<b>Model / Tail</b>	<b>Left tail Number</b>	<b>Left tail Zone – Add-on</b>	<b>Right tail Number</b>	<b>Right tail Zone-Add-on</b>
<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
Historical Simulation	16	Red – 33%	15	Red – 33%
GARCH-Normal	17	Red – 33%	6	Green – 0%
GARCH-Student-t(d)	10	Yellow – 16%	1	Green – 0%
Unconditional EVT-GPD	0	Green – 0%	0	Green – 0%
Conditional EVT-GPD	0	Green – 0%	0	Green – 0%

*Panel H: Backtesting on the Modelled Probability Distribution - TAS*

<b>Model / Tail</b>	<b>Left tail Number</b>	<b>Left tail Zone – Add-on</b>	<b>Right tail Number</b>	<b>Right tail Zone-Add-on</b>
<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
Historical Simulation	22	Red – 33%	23	Red – 33%
GARCH-Normal	15	Red – 33%	5	Green – 0%
GARCH-Student-t(d)	11	Yellow – 20%	2	Green – 0%
Unconditional EVT-GPD	0	Green – 0%	1	Green – 0%
Conditional EVT-GPD	0	Green – 0%	0	Green – 0%

*Panel I: Backtesting on the Modelled Probability Distribution - IPCC*

<b>Model / Tail</b>	<b>Left tail Number</b>	<b>Left tail Zone – Add-on</b>	<b>Right tail Number</b>	<b>Right tail Zone-Add-on</b>
<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>
Historical Simulation	26	Red – 33%	26	Red – 33%
GARCH-Normal	8	Green – 0%	5	Green – 0%
GARCH-Student-t(d)	7	Green – 0%	4	Green – 0%
Unconditional EVT-GPD	0	Green – 0%	2	Green – 0%
Conditional EVT-GPD	1	Green – 0%	0	Green – 0%

*Panel J: Backtesting on the Modelled Probability Distribution - ISE*

Model / Tail (1)	Left tail Number (2)	Left tail Zone – Add-on (3)	Right tail Number (4)	Right tail Zone-Add-on (5)
Historical Simulation	21	Red – 33%	12	Yellow – 23%
GARCH-Normal	5	Green – 0%	4	Green – 0%
GARCH-Student-t(d)	3	Green – 0%	2	Green – 0%
Unconditional EVT-GPD	0	Green – 0%	0	Green – 0%
Conditional EVT-GPD	0	Green – 0%	2	Green – 0%

*Panel K: Backtesting on the Modelled Probability Distribution - STRAIT*

Model / Tail (1)	Left tail Number (2)	Left tail Zone – Add-on (3)	Right tail Number (4)	Right tail Zone-Add-on (5)
Historical Simulation	22	Red – 33%	23	Red – 33%
GARCH-Normal	13	Yellow – 26%	5	Green – 0%
GARCH-Student-t(d)	9	Yellow – 13%	4	Green – 0%
Unconditional EVT-GPD	4	Green – 0%	0	Green – 0%
Conditional EVT-GPD	5	Green – 0%	0	Green – 0%

*Chart N°7**Unconditional Coverage Test – p-values /  $p = 0.10\%$  /  $CV(X^2_1) = 2.7055$* 

Model Index	SMI Left	SMI Right	DAX Left	DAX Right	FTSE <sup>1</sup> Left	FTSE <sup>1</sup> Right	CAC <sup>2</sup> Left	CAC <sup>2</sup> Right	IGBM Left	IGBM Right
Historical Simulation	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R
GARCH-Normal	0.00 R	0.02 R	0.07 R	0.00 R	0.02 R	0.00 R	0.01 R	0.02 R	0.02 R	0.00 R
GARCH-Student-t(d)	0.00 R	0.72 DNR	0.02 R	0.07 R	0.00 R	0.37 DNR	0.18 DNR	0.38 DNR	0.00 R	0.73 DNR
Unconditional EVT-GPD	- DNR	0.30 DNR	- DNR	0.81 DNR	0.79 DNR	0.37 DNR	0.42 DNR	0.28 DNR	0.17 DNR	0.77 DNR
Conditional EVT-GPD	0.78 DNR	0.02 R	0.29 DNR	- DNR	- DNR	- DNR	0.81 DNR	0.00 R	0.40 DNR	0.39 DNR

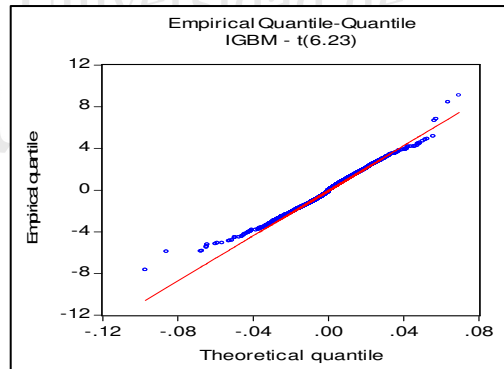
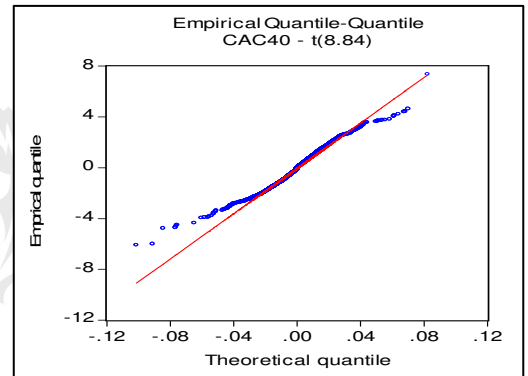
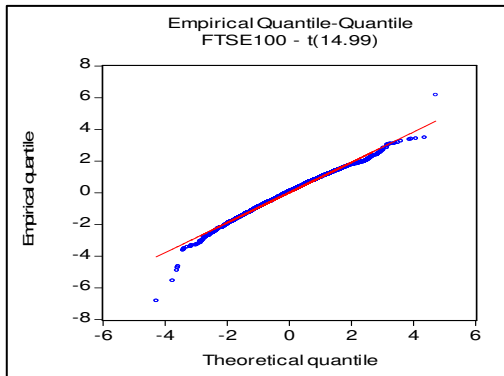
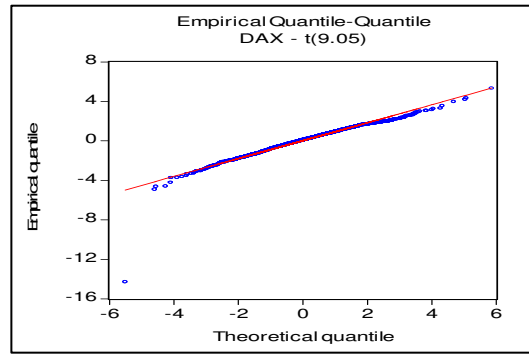
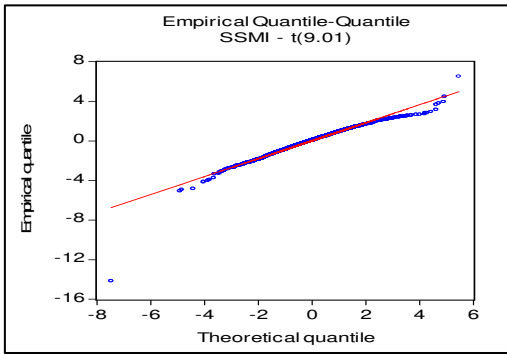
*Notes: (1) and (2) stand for FTSE100 and CAC40 respectively.**“R” and “DNR” stand for “Reject” and “Do not reject” null respectively.**Chart N°7 (cont.)**Unconditional Coverage Test – p-values /  $p = 0.10\%$  /  $CV(X^2_1) = 2.7055$* 

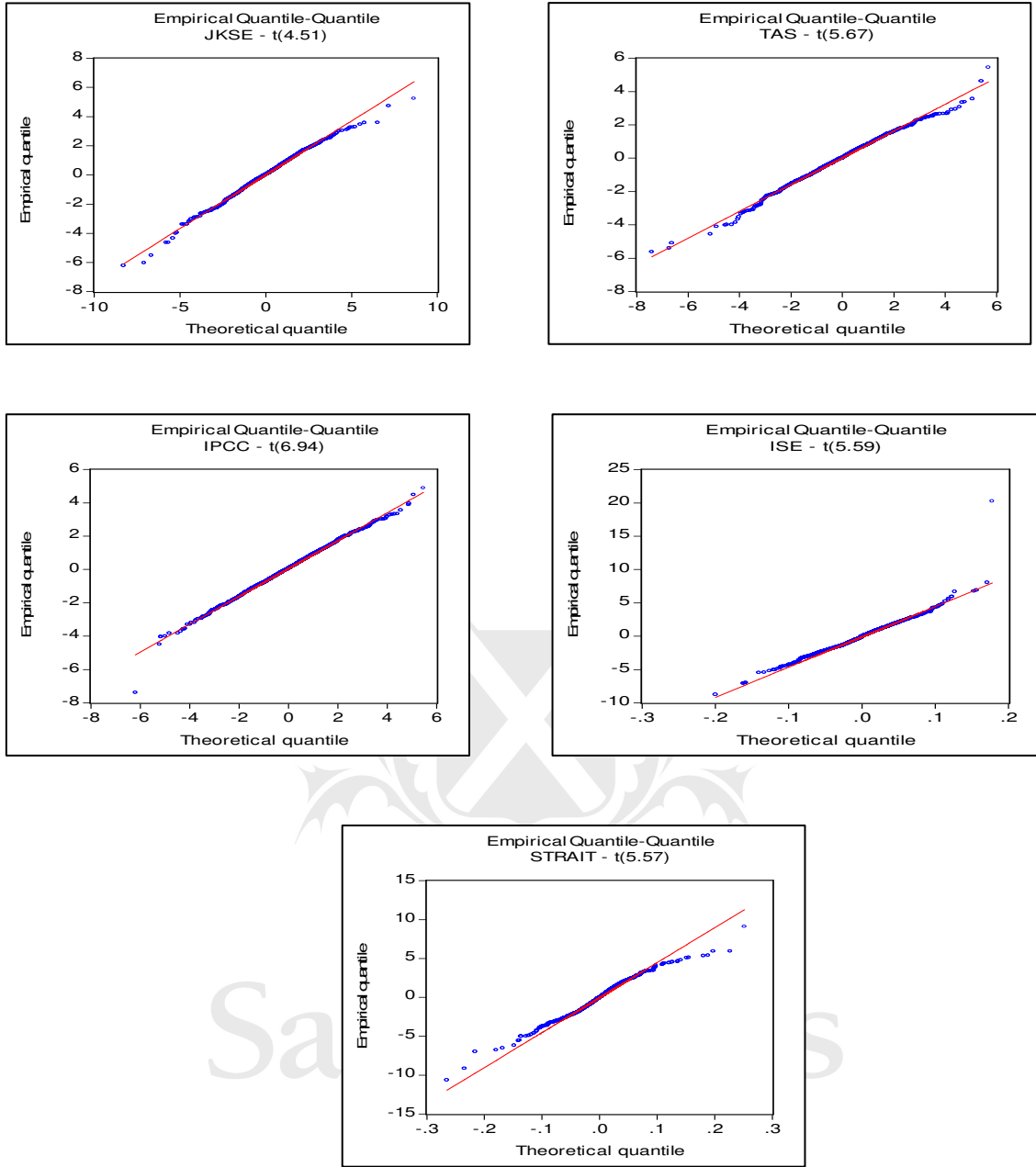
Model Index	JKSE Left	JKSE Right	TAS Left	TAS Right	IPCC Left	IPCC Right	ISE Left	ISE Right	STR <sup>1</sup> Left	STR <sup>1</sup> Right
Historical Simulation	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R
GARCH-Normal	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.00 R	0.16 DNR	0.57 DNR	0.00 R	0.00 R
GARCH-Student-t(d)	0.00 R	0.24 DNR	0.00 R	0.85 DNR	0.01 R	0.43 DNR	0.38 DNR	0.93 DNR	0.17 DNR	0.33 DNR
Unconditional EVT-GPD	- DNR	- DNR	- DNR	0.33 DNR	- DNR	0.68 DNR	- DNR	- DNR	0.39 DNR	- DNR
Conditional EVT-GPD	- DNR	- DNR	- DNR	- DNR	0.31 DNR	- DNR	- DNR	0.83 DNR	0.17 DNR	- DNR

*Notes: (1) stands for STRAIT.**“R” and “DNR” stand for “Reject” and “Do not reject” null respectively.*

Graph 4.1

QQ plots – Empirical Quantiles vs Theoretical Student- $t(d)$  distributions





Graph 4.2

*VaR forecasts*

