“Nivel de reservas acumuladas: ¿Cómo se ve afectada la probabilidad de crisis?”

Martín Santa Cruz

Universidad de San Andrés

N° de legajo: 17167

Firma del alumno:

Mentor: Prof. Enrique Kawamura

Firma del mentor:

Martín Santa Cruz
N° de legajo: 17167

I. Introducción

En las últimas dos décadas se ha dado una gran expansión del nivel de reservas internacionales acumuladas por los países emergentes. El cociente promedio de reservas/PBI en estos mercados se ha más que quintuplicado, aumentando de un 4% a un 20% del PBI, mientras que en los países avanzados se ha mantenido estable, alrededor del 4% (Obstfeld et al, 2008).

En la búsqueda de una explicación de este fenómeno, se puede hablar de dos corrientes principales: la visión "mercantilista" y la visión "precautoria" (Rodrik 2006). La primera sostiene que la acumulación de reservas internacionales es disparada por asuntos de competitividad de exportaciones. Básicamente, afirma que la acumulación facilita el crecimiento de las exportaciones al prevenir o disminuir la velocidad de apreciación de la moneda. La segunda corriente se relaciona con la auto-protección de los países por medio de la liquidez. Los países con mayores niveles de liquidez se encuentran en una mejor posición para soportar las crisis financieras y los reveses en los flujos de capitales. De esta manera, no sólo reducen los costos de las crisis financieras, sino que puede que se vuelvan menos probables.

Este trabajo desarrolla un modelo que puede enmarcarse en esta segunda corriente, es decir, consideramos que una manera de reducir los costos (y tal vez la probabilidad de ocurrencia de una crisis), es por medio de la acumulación de reservas. Por lo tanto, se estudiará cómo afectan ciertas variables relevantes al nivel de reservas acumuladas y luego se evaluará como la variación de estas variables afecta el hecho de que se suceda una crisis, ya sea directa como indirectamente.

Para realizar esta tarea se aplicarán modificaciones al modelo teórico desarrollado por Corsetti, Guimaraes y Roubini (2006). En este modelo, la crisis son causadas por la interacción de malos *fundamentals*, corridas bancarias y políticas desarrolladas por tres agentes optimizadores: inversionistas extranjeros, el gobierno local y un prestamista oficial internacional. Este último, caracterizado en el modelo por el FMI, provee liquidez con el fin de evitar las corridas al aumentar el número de inversionistas dispuestos a otorgar préstamos al país para ciertos *fundamentals* dados.

A nuestros fines, la modificación a realizar al modelo de CGR consistiría en eliminar este prestamista de última instancia proveedor de liquidez y endogeneizar el nivel de reservas internacionales acumuladas por el país. De esta manera, se podría enfocar el análisis en nuestra variable central, el nivel de reservas internacionales, y su relación con las demás variables del modelo.

El trabajo propone estudiar el caso en que, en lugar de depender de una institución financiera internacional para obtener la liquidez en caso de necesitarla, el país pueda decidir cuál será el nivel de activo líquido acumulado. Esto lo hará evaluando una función objetivo que se concentra en el evento de no crisis, interpretado como una función objetivo caracterizada por cierta "miopía". De esta manera, el modelo contaría con dos jugadores, en lugar de tres, uno de los cuáles tendría el poder de disponer del nivel de liquidez por medio de la decisión del monto de activo líquido y su utilización.

Entonces, utilizando el modelo de (CGR) de fondo encontraremos el efecto que tiene la variación de variables relevantes como el costo de liquidación de activos ilíquidos, la cantidad de recursos disponibles en la economía y la cantidad de deuda de corto plazo tomada por el país, en el nivel de reservas. Y luego con estas estáticas comparativas disponibles, podremos analizar qué efecto tienen estas mismas variables en el umbral del retorno del activo ilíquido, que es el que determina si el país entra en crisis o no. En particular, las modificaciones realizadas al modelo original permitirán reconocer los efectos indirectos sobre la probabilidad de crisis, actuando estos mediante la elección del nivel óptimo de reservas.

El primer resultado del modelo es que existen condiciones tales que el nivel "óptimo" de reservas (en el sentido de estar endógenamente determinado por un problema de optimización) es creciente no sólo en los recursos disponibles en el período inicial sino también en el nivel de endeudamiento disponible del período inicial y en el grado de iliquidez del activo de largo plazo. Estas condiciones son especiales pero no inconsistentes con los supuestos del modelo original.

Estas mismas condiciones tienen implicancias importantes acerca del efecto sobre la probabilidad de crisis dentro del modelo. El segundo resultado importante del modelo es que, si estas condiciones se cumplen, esta versión modificada del modelo original predice que un incremento en cualquiera de las tres variables mencionadas en el párrafo anterior tienden a reducir (o al menos, a reducir el incremento de) la probabilidad de crisis con respecto al efecto que tendrían sobre esta variable si las reservas fuesen exógenas, como se supone en el modelo original de Corsetti et al. (2006). La intuición es que los aumentos en estas variables incrementan las reservas (bajo las condiciones arriba mencionadas), lo cual constituye per se un efecto reductivo de la probabilidad de crisis.

En la sección II realizaremos una breve explicación del modelo original de CGR 2006; en la sección III, presentaremos el modelo con las modificaciones realizadas; en la sección IV realizaremos el análisis de estáticas comparativas; en la sección V evaluaremos el efecto total de la variación de las diferentes variables en la probabilidad de crisis, directa e indirectamente; y por último concluiremos en la sección VI.

II. El modelo original

II.1 El modelo original de Corsetti et al (2006)

El paper de Corsetti et al. (2006, de aquí en más denotado como CGR) analiza el *trade off* entre la provisión oficial de liquidez y los problemas de *moral hazard* en las crisis financieras internacionales. En el modelo, la crisis son causadas por la interacción de malos *fundamentals*, corridas autocumplidas y políticas tomadas por tres clases de agentes optimizadores: inversores internacionales, el gobierno local y un prestamista oficial internacional.

La tesis que proponen los autores es que la provisión limitada de liquidez no sólo ayuda a evitar las corridas sino que además incentiva al gobierno local a tomar las políticas deseadas. Para llegar a este resultado consideran un modelo con una economía pequeña y abierta, con un horizonte de tiempo de tres períodos: 0, 1 (intermedio) y 2. Esta economía está poblada por un continuo de agentes de masa 1, cada uno de los cuáles se encuentra dotado con E unidades de un recurso. A su vez estos agentes pueden tomar préstamos por valor máximo D, de un continuo de managers de fondos internacionales también de masa 1, dispuestos a prestar sólo en corto plazo (entre $t=0$ y $t=1$)

Existe una institución financiera internacional, el FMI, dispuesta a proveer liquidez al país. Se modela a la misma como un jugador *grande*, con recursos disponibles que ascienden a L (valor de común conocimiento en la economía), el cual decide si desembolsar el préstamo basándose en su propia información (i.e. señal privada) y sus objetivos institucionales. Por simplicidad, todos los préstamos llevados a cabo por los diferentes agentes de la economía se realizan a una tasa r^*, que se normaliza a cero.

Los agentes pueden invertir en proyectos domésticos con un retorno de R, en el período 2, o de $R/1+k$, en caso de que el proyecto sea liquidado en el período interino. El hecho de que k sea mayor a cero demuestra que la inversión es ilíquida. Es decir, k representa el costo de discontinuar la inversión en el período 1, expresado en unidades de inversión. El retorno esperado de dichos proyectos es mayor a la tasa internacional de interés (i.e. $E_0 R > 1+r^*$), asegurando de esta manera que el activo ilíquido tendrá un retorno esperado mayor que el del activo líquido.

La secuencia de decisiones es la siguiente. *En el período cero*, los agentes domésticos invierten $E+D$ en la tecnología riesgosa I y en el activo líquido internacional M. L, D, E, I y M son todos parámetros dados. *En el período uno*, los managers de fondos internacionales deciden si otorgar los préstamos y simultáneamente el FMI decide si intervenir, y en caso de hacerlo el país obtiene L. Definimos a x como la fracción de managers que deciden retirar los préstamos y xD como la necesidad de liquidez de corto plazo del país. Para cumplir con estas obligaciones de corto plazo, los agentes domésticos pueden: usar el stock de recursos líquidos, el préstamo del FMI (si fue otorgado) y liquidar una fracción z de la inversión de largo plazo I obteniendo $\frac{zRI}{(1+k)}$. Denotamos con Λ el total de liquidez internacional disponible para el país (i.e. $\Lambda = M + L$). De esta manera el país va incurrir en gastos de liquidación de activos ilíquidos cuando $xD > \Lambda$, con un z talque $xD - \Lambda = \frac{zRI}{1+k}$. Y el país va a defaultear cuando $xD > \Lambda + \frac{RI}{1+k}$, es decir, los agentes domésticos no podrán cumplir con sus obligaciones de corto plazo a pesar de que liquiden toda su inversión de largo plazo. Se asume que todos los préstamos serán pagados, hasta agotar los recursos del país.

Finalmente, *en el período 2*, la cantidad de total de recursos disponibles para el país será $R(1-z)I + máx\left[\Lambda - xD;0\right]$. Esto representa el PBI más los activos líquidos sobrantes del período anterior. Por otro lado, sus obligaciones están conformadas por la deuda privada y el préstamo otorgado por el FMI (i.e. $(1-x)D + L$). Como en el período anterior, se asume que todos los préstamos serán pagados.

La diferencia (si existe alguna) entre los recursos y las obligaciones del país, representa el PBN, disponible para consumo doméstico:

$$y = máx\left\{R(1-z)I + máx\left[\Lambda - xD;0\right] - (1-x)D - L_+,0\right\}$$

$$y = máx\left\{RI\left[1 - \frac{zk}{1+k}\right] + M - D;0\right\} \qquad (1)$$

II.2 Pagos e información

En esta subsección se describe la función objetivo y el set de información de los managers de fondos y del FMI. Respecto a los primeros, como en Rochet y Vives (2004), la estructura de pagos de los managers de fondos internacionales está compuesta por una constante positiva b, que representa la diferencia en utilidad entre prestar y retirar los fondos, cuando el país no defaultea y por una constante negativa $-c$, que representa la misma diferencia, pero cuando el país defaultea. Esta estructura de pagos se justifica bajo el supuesto de que los managers de fondos, si bien prefiere renovar los préstamos, serán penalizados si el banco falla. Esto es consistente con el hecho de que el salario de los managers depende del tamaño de sus fondos y con el hecho de que serán promovidos (i.e. obtendrán más fondos para manejar), si construyen una buena reputación. En resumen, los pagos de los managers de fondos dependerán de si toman o no la decisión acertada.

La estructura de pagos del FMI se compone por una constante positiva B, que representa el beneficio que recibe el FMI cuando otorga el préstamo y el país no defaultea, y una constante negativa $-C$, que representa el beneficio negativo para el caso que el país defaultea. Se puede observar que la estructura de pago del FMI es isomórfica a la de los managers.

En cuanto a la información se supone que el retorno de la inversión de largo plazo, R, está normalmente distribuido con una media R_j y una varianza $1/\rho$. En el período cero, la distribución es conocida en la economía, no así su media. Si bien R se realiza en el período uno, los managers no conocen este valor, pero cada uno recibe una señal privada:

$$\tilde{s}_i = R + \varepsilon_i \qquad (2)$$

donde el ruido individual ε_i está normalmente distribuido con precisión α y su función de distribución acumulada está determinada por $G(\cdot)$.

El FMI también recibe una señal privada $\tilde{S}$ tal que:

$$\tilde{S} = R + \eta \qquad (3)$$

Aquí η se la supone normalmente distribuida, con precisión β y su función de distribución acumulada está determinada por $H(\cdot)$. De esta manera, los managers y el FMI, van a conformar sus "posteriors", de acuerdo a: la información pública (la distribución previa de

R), la señal privada y la probabilidad asignada a que el gobierno tome la acción A (llamémosla ρ_A)

El posterior s del manager que obtiene la señal $\tilde{s}_i$:

$$s = \rho_A\left(\frac{R_A\rho + \tilde{s}_i\alpha}{\rho+\alpha}\right) + (1-\rho_A)\left(\frac{R_N\rho + \tilde{s}_i\,\alpha}{\rho+\alpha}\right) \qquad (4)$$

El posterior del FMI es:

$$S = \rho_A\left(\frac{R_A\rho + \tilde{S}\beta}{\rho+\beta}\right) + (1-\rho_A)\left(\frac{R_N\rho + \tilde{S}\alpha}{\rho+\beta}\right) \qquad (5)$$

II.3 Solvencia y liquidez

En caso de que la deuda es efectivamente de largo plazo, es decir, que ningún fondo puede ser retirado (i.e. $x = 0$):

$$RI \geq D - M \qquad (6)$$

El país será solvente si el flujo de caja por inversión es al menos igual a la deuda neta. Entonces la tasa mínima de retorno R_s a la cual el país es solvente condicional a que no haya corrida en el período 1 es:

$$R_S = \frac{D-M}{I} \qquad (7)$$

Esto significa que cuando la realización R es al menos tan grande como R_s entonces el retorno es suficiente para que el país evite el default.

En la presencia de corridas de liquidez, esto podría dejar de ser verdad. En el caso en que el FMI no ha efectuado el préstamo al país en el período 1, el país será solvente en el período 2 si y sólo si:

$$R(1-z)I = RI - (1+k)\left[xD - M\right]^{+} \geq (1-x)D - \left[M - xD\right]^{+} \tag{8}$$

Definimos como $\overline{R}$, la tasa mínima de retorno bajo la cual el país es solvente, condicional a que no haya intervención del FMI:

$$\overline{R} = R_S + k\frac{\left[xD - M\right]^{+}}{I} \geq R_S \tag{9}$$

Cuando se liquidan tempranamente las inversiones de largo plazo (i.e. $xD - M > 0$), la *break even rate* debe ser mayor a R_s, dado que la falla de los inversores internacionales en otorgar los préstamos resulta en pérdida debido a los costos de liquidación y por lo tanto, pérdidas de eficiencia expost.

En el caso en que el FMI interviene, la pérdida expost de eficiencia se evita, y el umbral de solvencia dado un x, será menor. El país será solvente si:

$$R(1-z)I = RI - (1+k)\left[xD - M - L\right]^{+} \geq (1-x)D + L - \left[M + L - xD\right]^{+} \tag{10}$$

Definimos como $\overline{R_L}$, el umbral relevante para el default:

$$\overline{R_L} = R_S + k\frac{\left[xD - M - L\right]^{+}}{I} \geq R_S \tag{11}$$

La intervención del FMI aumenta el PBN del país dado que reduce la liquidación temprana.

De esta manera, $\bar{R}$ y $\overline{R_L}$, dividen el set de fundamentals en tres regiones: cuando $R < \overline{R_L}$, se da la crisis; cuando $R > \bar{R}$ no hay crisis; pero en el intervalo comprendido entre $\bar{R}$ y $\overline{R_L}$, la crisis se dará en el caso en que el FMI no intervenga.

II.3 Corridas especulativas y provisión de liquidez en equilibrio

Ahora nos ocuparemos de la caracterización del equilibrio en nuestra economía de tres períodos para ciertas políticas de gobierno dadas (i.e. para cierta distribución del fundamental *R*).

En el centro de este modelo yace el problema de coordinación que enfrentan los managers internacionales el período interino. El pago esperado de cada manager de otorgar el préstamo al país depende positivamente de la fracción $(1-x)$, así como de la predisposición del FMI a proveer liquidez. El pago esperado de dicha institución de proveer liquidez depende positivamente de la fracción de agentes que otorgan los préstamos. De esta manera se puede observar que la decisión de estos dos jugadores son complementos estratégicos.

En este modelo existe un único equilibrio en el cual los agentes emplean estrategias disparadoras:

1. Los managers retirarán en el período uno si y sólo sí su señal privada sobre la tasa de retorno de la inversión ilíquida está por debajo de un valor crítico $\tilde{s}^*$, idéntico para todos los managers.

2. El FMI intervendrá si su propia señal privada sobre la tasa de retorno del activo ilíquido está por encima del algún valor crítico $\tilde{S}^*$.

Si se asume que las señales privadas son arbitrariamente más precisas que la señal pública – i.e., ρ/α, $\rho/\beta \to 0$ - entonces los posteriors van a coincidir con las señales privadas:

$$\lim_{\rho/\alpha \to \infty} s_i = \tilde{s}_i \qquad (12)$$

$$\lim_{\rho/\alpha \to \infty} S = \tilde{S} \qquad (13)$$

Entonces se expresan las señales y umbrales de los managers y del FMI en términos de los posteriores de los agentes denotados sin tilde (i.e. s_i, S, s^* y S^*).

De esta manera, el equilibrio va a quedar caracterizado por cuatro umbrales críticos: $\overline{R}$ (condicional en que no haya intervención del FMI), $\overline{R_L}$ (condicional en que haya intervención del FMI), $\tilde{s}^*$ y $\tilde{S}^*$.

Siguiendo la estrategia disparadora con umbral s^*, la proporción de managers que reciben una señal tal que su posterior está por debajo de s^* y retiran en el primer período depende crucialmente de la realización de R:

$$x = prob(s_i \leq s^* | R) \equiv G(s^* - R) \qquad (14)$$

Si el FMI no interviene, habrá una crisis para cualquier R tal que $R \leq \overline{R}$. Entonces cuando $R = \overline{R}$, la masa de managers internacionales que retirarán es la necesaria para causar que el país falle. Esta masa es $x = G(s^* - \overline{R})$

$$\overline{R} = R_S\left[1 + k\,\frac{\left[G(s^* - \overline{R})D - M\right]^+}{D - M}\right] \tag{15}$$

Esta es la primera ecuación del equilibrio.

Por otro lado, si el FMI interviene, habrá una crisis para cualquiera R tal que $R < \overline{R_L}$. Entonces, como se obtiene más arriba, $x = G(s^* - \overline{R_L})$. Reemplazando en (11), el umbral $\overline{R_L}$ para el fracaso condicional en que haya intervención del FMI es:

$$\overline{R_L} = R_S\left[1 + k\,\frac{\left[G(s^* - \overline{R_L})D - M - L\right]^+}{D - M}\right] \tag{16}$$

Esta es la segunda condición de equilibrio.

Ahora nos detendremos en las ecuaciones determinando los umbrales s^* y S^*. Luego de recibir la señal $\tilde{S}$, el FMI le asigna probabilidad $H(\overline{R_L} - S)$ al fracaso del país a pesar de la intervención. El pago esperado del FMI (ψ_{FMI}) es:

$$\psi_{FMI} = B\left[1 - H(\overline{R_L} - S)\right] - C\left[H(\overline{R_L} - S)\right]$$

que es decreciente en S.

La estrategia óptima consiste en prestar al país, sí y sólo sí el pago esperado es no negativo, esto es, si $S \geq S^*$, donde S^* está definida por:

$$S^* = \overline{R_L} - H^{-1}\left(\frac{B}{B + C}\right) \tag{17}$$

El problema de los managers es más complejo. El país va a defaultear cuando $R < \overline{R_L}$, sin importar si el FMI interviene o no. Entonces un manager que recibe la señal $\tilde{s}$ le asignará probabilidad $G(\overline{R_L} - s)$ al evento "default sin importar la acción del FMI". Sin embargo, para el R comprendido entre $\overline{R_L}$ y $\overline{R}$, el país entrará en default sólo si el FMI falla en intervenir. Entonces, el pago esperado de los managers de otorgar los préstamos en el período uno incluye un término que representa la probabilidad condicional de que el FMI falle en proveer la liquidez al país, $H(S^* - R)$:

$$\psi_{FM} = b\left\{1 - \left[G(\overline{R_L} - s) + \int_{\overline{R_L}}^{\overline{R}} g(R-s)H(S^* - R)dR\right] - c\left[G(\overline{R_L} - s) + \int_{\overline{R_L}}^{\overline{R}} g(R-s)H(S^* - R)dR\right]\right\}$$

donde g es la función de densidad probabilística. La estrategia disparadora óptima s^* está implícitamente definida por la condición de beneficio cero debajo:

$$\frac{b}{b+c} = G(\overline{R_L} - s^*) + \int_{\overline{R_L}}^{\overline{R}} g(R - s^*)H(S^* - R)dR \qquad (18)$$

Como se muestra en el apéndice de CGR, existe un único valor de s^* que resuelve esta ecuación.

Las cuatro ecuaciones (15)-(17) y (18) en las cuatro variables endógenas ($\overline{R}$, $\overline{R_L}$, S^* y s^*) caracterizan completamente el equilibrio. En equilibrio, el país va a defaultear siempre que la realización de los fundamentals sea peor que $\overline{R_L}$ y nunca va a defaultear cuando R esté por encima de $\overline{R}$. Pero para los R comprendidos entre $\overline{R_L}$ y $\overline{R}$, el default puede ocurrir o no, dependiendo de la acción del FMI.

III. El modelo modificado

El modelo CGR logra demostrar que la provisión de liquidez por parte de un organismo oficial internacional no sólo reduce los costos de una crisis financiera, sino que reduce la probabilidad de ocurrencia de la misma. Este resultado es relevante para la confección de políticas y para el análisis del rol que cumplen los organismos que proveen liquidez.

Dado que nuestro centro de atención es el nivel de reservas, este trabajo modifica el modelo original de CGR para poder estudiar el comportamiento del nivel de reservas y como afectan a la probabilidad de ocurrencia de una crisis. La modificación arriba mencionada consiste simplemente en eliminar el organismo internacional y endogeneizar el nivel de reservas M, manteniendo a los otros dos agentes del modelo CGR así como el resto de sus supuestos. Esto generará que en lugar de tener dos umbrales que determinen entrar en crisis o no, se va a pasar a tener un solo umbral, con lo cual el espacio se dividirá simplemente en dos casos: crisis y no crisis.

Entonces, al eliminar al organismo internacional, la secuencia de decisiones queda modificada:

1. Período 0: Los agentes domésticos invierten $E + D$ en la tecnología doméstica riesgosa I y en el activo líquido internacional M.

2. Período 1: Los managers de fondos deciden si renovar o no los préstamos. Se mantiene la definición de x como la fracción de managers que deciden retirar los préstamos y de xD como la necesidad de liquidez de corto plazo del país. Para cumplir con estas obligaciones, los agentes domésticos van a utilizar las reservas (M) acumuladas y en caso de no cubrirlas por completo, se liquidará una fracción z del activo ilíquido I obteniendo $\frac{zRI}{(1+k)}$. De esta manera, el país va a incurrir en costos de liquidación cuando $xD > M$, con un z tal que $xD - M = \frac{zRI}{(1+k)}$. Y el país va a defaultear cuando $xD > M + \frac{RI}{(1+k)}$.

3. Período 2: El PBI va a quedar conformado por los recursos menos la deuda que queda por pagar.

$$y = máx\{R(1-z)I + máx[M - xD;0] - (1-x)D;0\}$$

$$y = máx\{RI[1 - \frac{zk}{1+k}] + M - D; 0\} \qquad (1)$$

Como se puede observar la ecuación que representa el PBN (medida de bienestar de la sociedad) se mantiene igual a la expresión del modelo original.

III.1 Pagos e información

La estructura de pagos de los managers de fondos se mantiene inalterada respecto del modelo original. Dado que otorgaron el préstamo reciben $b > 0$ cuando el país no defaultea y $-c < 0$ cuando si lo hace. También los supuestos sobre la distribución de probabilidades del retorno del activo ilíquido R se mantienen iguales a los del modelo original. En $t = 1$ los managers desconocen el valor de R, pero reciben una señal:

$$\tilde{s}_i = R + \varepsilon_i \qquad (2)$$

Aquí el ruido individual ε_i se la supone normalmente distribuido con precisión α y su función de distribución acumulada está determinada por $G(\cdot)$. Por lo tanto, los posteriors de los managers van a depender de:

1. La información pública (Prior *distribution* de R)
2. La señal privada.

$$s = \frac{(1/\alpha + 1/\rho)^{1/2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/\alpha\rho}} e^{\frac{-1}{2\frac{1/\alpha\rho}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}}}\left(R - \left(\frac{\frac{\tilde{s}_i}{\rho} + \frac{R_j}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}}\right)\right)}$$

(Para una demostración de esta expresión véase el Apéndice (A1)).

III.2 Solvencia y liquidez

La tasa mínima de retorno R_s a la cual el país es solvente condicional a que no haya corrida en el período uno se mantiene igual:

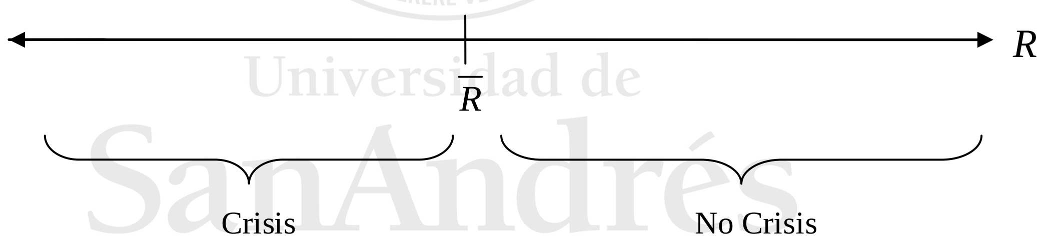
$$R_S = \frac{D-M}{I} \qquad (7)$$

En este caso en el cual no puede haber corrida (i.e. $x=0$), R_s va a ser suficientemente grande para que el país evite el default. Pero en presencia de corridas de liquidez esto puede dejar de ser verdad. El país será solvente en $t=2$ sí y sólo sí:

$$R(1-z)I = RI - (1+k)\left[xD - M\right]^{+} \geq (1-x)D - \left[M - xD\right]^{-} \qquad (8)$$

Denotamos con $\overline{R}$ la mínima tasa de retorno bajo la cual el país es solvente, en el caso de que pueda haber una corrida de liquidez.

$$\overline{R} = R_S + k\frac{\left[xD - M\right]^{+}}{I} \geq R_S \qquad (9)$$



Aquí vemos como al modificar el modelo desaparece un umbral y el espacio queda dividido en 2 casos: Cuando $R < \overline{R}$ el país entra en crisis y cuando $R > \overline{R}$ el país evita la crisis.

III.3 Corridas especulativas y provisión de liquidez en equilibrio

Esta subsección caracteriza el equilibrio en el modelo modificado. Al igual que en el modelo original va a existir un único equilibrio en el cual los agentes emplean estrategias disparadoras:

- Los managers de fondos retirarán el período 1 sí y sólo sí su señal privada en la tasa de retorno R es menor a un valor crítico $\tilde{s}^*$, idéntico para todos los managers.

Si se sigue asumiendo que las señales privadas son arbitrariamente más precisas que la señal pública – i.e., ${}^{\rho}\!/\!{}_{\alpha}, {}^{\rho}\!/\!{}_{\beta} \longrightarrow 0$ - entonces los posteriors van a coincidir con las señales privadas. De esta manera, vamos a expresar las señales y el umbral de los managers en términos de los posteriores de los agentes denotados sin tilde (i.e. s_i y s^*).

Finalmente, el equilibrio va a quedar caracterizado por sólo dos umbrales críticos: $\bar{R}$ y s^*, en lugar de cuatro como en el modelo original. Aquí vemos que al eliminar un agente no sólo desaparece el umbral relacionado al posterior del agente, sino que desaparece también el umbral relacionado al retorno del activo ilíquido.

A continuación se presenta la derivación de la ecuación que determina $\bar{R}$. Si los managers siguen una estrategia disparadora con umbral s^*, la proporción de managers que reciban una señal tal que su posterior sea menor a ese umbral y que entonces retiren en el primer período, va a depender la de la realización de R:

$$x = prob(s_i \leq s^* | R) \equiv G(s^* - R) \qquad (14)$$

Ahora, usando la definición del umbral para la crisis $\bar{R}$, sabemos que habrá una crisis para cualquier R tal que $R \leq \bar{R}$. Entonces, cuando $R = \bar{R}$ la masa de managers que retiran es la necesaria para causar que el país falle. Esta masa es $x = G(s^* - \bar{R})$.

$$\bar{R} = R_S \left[1 + k \frac{[G(s^* - \bar{R})D - M]_+}{D - M} \right] \qquad (15)$$

Ahora observemos la ecuación que determina s^*. El país va a defaultear cuando $R \leq \overline{R}$. Entonces un manager que recibe la señal $\tilde{s}$ le asignará probabilidad $G(\overline{R} = s)$ al evento en que el país defaultea. Entonces el pago esperado (denotado ψ_{FM}) de otorgar los préstamos en el período uno está dado por la expresión:

$$\psi_{FM} = b\left[1 - G(\overline{R} - s)\right] - c\left[G(\overline{R} - s)\right]$$

La estrategia disparadora óptima s^* para los managers está implícitamente definida por la condición de beneficio cero:

$$s^* = \overline{R} - G^{-1}\left(\frac{b}{b+c}\right) \qquad (19)$$

Las ecuaciones (15) y (19) caracterizan el equilibrio. En este el país siempre va a defaultear cuando la realización de los *fundamentals* sea peor al umbral $\overline{R}$.

IV. Análisis del nivel óptimo de reservas

Esta sección presenta la determinación endógena del el nivel de reservas M con el fin de evaluar cómo el mismo es afectado por otras variables exógenas. Gracias a tal endogeneización se podrán identificar los efectos indirectos que tienen las variables exógenas sobre la probabilidad de crisis. Por lo tanto, el primer paso es el cálculo de las derivadas parciales de M con respecto a las variables exógenas k, D y E. Para realizar esta tarea, obtendremos una condición de maximización de una función de bienestar social que determinará la elección del gobierno respecto de la asignación de los recursos de la economía entre los activos líquidos e ilíquidos. La función objetivo del gobierno está dada por:

$$U=\left\{E\left(R \middle/ R\geq \overline{R}\right)I-D\left[E\left(x \middle/ R\geq \overline{R}\right)k+1\right]+M(1+k)\right\} \qquad (20)$$

Esta expresión representa el producto esperado cuando la economía se encuentra en el caso en que el nivel de activo líquido M no alcanza para cubrir la necesidad de liquidez, pero liquidando una parte o la totalidad del activo ilíquido, se evita el default (i.e. $M\leq xD\leq M+\frac{RI}{1+k}$). En el período 2, los recursos disponibles estarán compuestos por: el retorno producido por los activos ilíquidos no liquidados luego de haber devuelto los préstamos recibidos:

$$\left[R(1-z)I-(1+x)D\right]$$

Como se puede observar la variable M no es un componente de esta expresión dado que en este caso las reservas fueron gastadas en su totalidad para cubrir la necesidad de liquidez del período uno. La fórmula final expresada arriba se obtendrá reemplazando por la definición de z y tomando valor esperado de x y R, ya que en el período cero no son conocidos.

Si bien la función objetivo del gobierno podría ser el PBN esperado para todos los casos posibles, tanto crisis como no crisis[1], por simplicidad nos limitaremos al caso mencionado partiendo del supuesto de un gobierno optimista. Esto quiere decir que en lugar de tomar en cuenta todos los escenarios posibles, el gobierno tomará con probabilidad uno que los fundamentals son tales que la economía se encuentra en el caso ya mencionado. Dado este supuesto, los cálculos del valor esperado de R y de x deberán realizarse condicionales a que $R>\overline{R}$.

[1] Véase el anexo A2 para una exposición detallada de este tipo de función objetivo.

Para obtener el nivel óptimo de reservas se deberá resolver el programa de maximización:

$$\underset{M}{Máx}U = \left\{E({}^{R}\!/_{R \geq \overline{R}})I - D\left[E({}^{x}\!/_{R \geq \overline{R}})k+1\right] + M(1+k)\right\}$$

s.a. $E + D = M + I$

Si reemplazamos $\overline{R}$ por su definición e introducimos la restricción nos queda la expresión:

$$U = \left\{E\left({}^{R}\!\Big/_{R \geq \frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M}}\right)(E+D-M) - \right.$$

$$\left. - D\left[E\left({}^{x}\!\Big/_{R \geq \frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M}}\right)k+1\right] + M(1+k) \right. \qquad (21)$$

Para obtener la Condición de Primer Orden derivamos esta función con respecto al nivel de reservas M e igualamos a cero:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\partial E\left({}^{R}\!\Big/_{R \geq \frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M}}\right)}{\partial M}(E+D-M) - E\left({}^{R}\!\Big/_{R \geq \frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M}}\right) -$$

$$- Dk\left[\frac{\partial E\left({}^{x}\!\Big/_{R \geq \frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M}}\right)}{\partial M}\right] + 1 + k = 0$$

donde,

$$E\left({R}\Big/{R \geq \frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M}} \right) = \int_{\overline{R_B}}^{\infty} \overline{R_B}\, f(\overline{R_B})\, d\overline{R_B} =$$

$$\frac{\partial E\left({R}\Big/{R \geq \frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M}} \right)}{\partial M} = -\left(\frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M} \right)$$

$$\left[\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M} - R_j}{1/\sqrt{\rho}} \right)^2} \right] \left[-\frac{E(1+k) + Dk(1+x)}{(E+D-M)^2} \right]$$

$$E\left({x}\Big/{R \geq \frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M}} \right) = -G(S^* - \overline{R})$$

$$\left[\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M} - R_j}{1/\sqrt{\rho}} \right)^2} \right] \left[-\frac{E(1+k) + Dk(1+x)}{(E+D-M)^2} \right]$$

La expresión final de la CPO es la siguiente:

$$CPO = \frac{\partial U}{\partial M} = I * II * III * IV - V - Dk * VI * II * III + 1 + k = 0 \qquad (22)$$

donde

$$I \equiv \frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M}$$

$$II \equiv \left\{ \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}-R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]^2} \right\}$$

$$III \equiv \left[\frac{E(1+k)+Dk(1+x)}{(E+D-M)^2}\right]$$

$$IV \equiv (E+D-M)$$

$$V \equiv \int_{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}}^{\infty} \left[\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}\right] * II * d\left[\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}\right]$$

$$VI \equiv G(S^* - \overline{R})$$

Como puede observarse, la variable M no puede ser despejada explícitamente de la condición de primer orden. Se utilizará entonces el teorema de la función implícita para obtener los resultados de estática comparativa que nos permitirán obtener el efecto que tiene una variación en cada una de las variables sobre el nivel de reservas M.

De esta manera, las expresiones genéricas correspondientes a este ejercicio serán:

$$\frac{\partial M}{\partial k} = -\frac{\frac{\partial CPO}{\partial k}}{\frac{\partial CPO}{\partial M}} \tag{23}$$

$$\frac{\partial M}{\partial D} = -\frac{\frac{\partial CPO}{\partial D}}{\frac{\partial CPO}{\partial M}} \tag{24}$$

$$\frac{\partial M}{\partial E} = -\frac{\frac{\partial CPO}{\partial E}}{\frac{\partial CPO}{\partial M}} \tag{25}$$

- <u>Cálculo de la derivada de la condición de primer orden con respecto a M:</u>

$$\frac{\partial CPO}{\partial M} = \left(\frac{\partial A}{\partial M} B \right) + \left(A \frac{\partial B}{\partial M} \right) - I * II * III - Dk \left(\frac{\partial C}{\partial M} * III + C \frac{\partial III}{\partial M} \right) \qquad (26)$$

donde,

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \frac{\partial I}{\partial M} * II + I \frac{\partial II}{\partial M}$$

$$A = I * II$$

$$B = III * IV$$

$$C = VI * II$$

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{\partial III}{\partial M} * IV + III * \frac{\partial IV}{\partial M}$$

$$\frac{\partial C}{\partial M} = \frac{\partial VI}{\partial M} * II + VI * \frac{\partial II}{\partial M}$$

$$\frac{\partial I}{\partial M} = -\frac{\left[E(1+k) + Dk(1+x) \right]}{(E+D-M)^2}$$

$$\frac{\partial II}{\partial M} = \left\{ \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M} - R_j}{1/\sqrt{\rho}} \right]^2} \right\} \left\{ (-1) \left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M} - R_j}{1/\sqrt{\rho}} \right] \right\} \left\{ \sqrt{\rho} \left[-\frac{\left[E(1+k) + Dk(1+x) \right]}{(E+D-M)^2} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial III}{\partial M} = \left[\frac{2\left[E(1+k) + Dk(1+x) \right]}{(E+D-M)^3} \right]$$

$$\frac{\partial IV}{\partial M} = (-1)$$

$$\frac{\partial VI}{\partial M} = G'(S^* - \bar{R}) \frac{\left[E(1+k) + Dk(1+x) \right]}{(E+D-M)^2}$$

Sin embargo, podemos simplificar esta expresión dado que dos términos se cancelan (véase el apéndice A3). Por lo tanto la expresión final es:

$$\frac{\partial CPO}{\partial M} = \left(\frac{\partial A}{\partial M} B \right) - Dk \left(\frac{\partial C}{\partial M} * III + C \frac{\partial III}{\partial M} \right)$$

Suponiendo que $\overline{R}$ es suficientemente más bajo que la media de la distribución del retorno del activo ilíquido (R_j), nos aseguramos por un lado que el primer término es negativo (véase el apéndice A4), pero a su vez esto genera que el segundo término también sea negativo. Entonces para asegurarnos que el signo final de $\frac{\partial CPO}{\partial M}$ sea negativo, deberemos suponer también que $D - M + k(xD - M) > Dk\left[G(S^{*} - \overline{R})\right]$ (véase el apéndice A5).

El supuesto de que $R_j > \overline{R}$ se encuentra alineado con el supuesto previamente enunciado de que el gobierno es optimista a la hora de calcular como repartirá los recursos entre los dos tipos de activos, líquidos e ilíquidos. Se puede observar el optimismo dado que se piensa que el valor esperado del retorno del activo ilíquido será mayor al umbral que determina la ocurrencia de una crisis.

- <u>Cálculo de la derivada de la condición de primer orden con respecto a k:</u>

$$\frac{\partial CPO}{\partial k} = \left(\frac{\partial A}{\partial k} B\right) + \left(A \frac{\partial B}{\partial k}\right) - \frac{\partial V}{\partial k} - D\left(C * III\right) - Dk\left(\frac{\partial C}{\partial k} * III + C\frac{\partial III}{\partial k}\right) \qquad (27)$$

donde,

$$\frac{\partial A}{\partial k} = \frac{\partial I}{\partial k} * II + I\frac{\partial II}{\partial k}$$

$$A = I * II$$

$$B = III * IV$$

$$C = VI * II$$

$$\frac{\partial B}{\partial k} = \frac{\partial III}{\partial k} * IV + III * \frac{\partial IV}{\partial k}$$

$$\frac{\partial C}{\partial k} = \frac{\partial VI}{\partial k} * II + VI * \frac{\partial II}{\partial k}$$

$$\frac{\partial I}{\partial k} = \frac{xD - M}{E + D - M}$$

$$\frac{\partial II}{\partial k}=\left\{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}-R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]^2}\right\}\left\{(-1)\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}-R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]\right\}\left\{\sqrt{\rho}\left(\frac{xD-M}{E+D-M}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial III}{\partial k}=\left[\frac{E+D(1+x)(E+D-M)+2[E(1+k)+Dk(1+x)]}{(E+D-M)^3}\right]$$

$$\frac{\partial IV}{\partial k}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial k}=(-1)I*II*\frac{\partial I}{\partial k}$$

$$\frac{\partial VI}{\partial k}=G'(S^*-\overline{R_B})(-1)\left(\frac{xD-M}{E+D-M}\right)$$

Manteniendo el supuesto de que $R_j>\overline{R}$ nos aseguramos que $\left(\frac{\partial A}{\partial k}B\right)+\left(A\frac{\partial B}{\partial k}\right)-\frac{\partial V}{\partial k}$ sea mayor que cero (véase el anexo A6). No obstante, para asegurar el signo positivo de toda la expresión, se deberán mantener los dos supuestos previamente enumerados: que la diferencia $\overline{R}-R_j$ es lo suficientemente negativa y que $D-M+k(xD-M)>Dk[G(S^*-\overline{R})]$. De esta manera nos aseguramos que el aumento de $\frac{\partial A}{\partial k}$ sea mayor a la caída que produce $\frac{\partial C}{\partial k}$ (véase el apéndice A7*)*. Esto garantiza que el signo de la derivada de la condición de primer orden con respecto a k será positivo.

- <u>Cálculo de la derivada de la condición de primer orden con respecto a E:</u>

$$\frac{\partial CPO}{\partial E}=\left(\frac{\partial A}{\partial E}B\right)+\left(A\frac{\partial B}{\partial E}\right)-\frac{\partial V}{\partial E}-Dk\left(\frac{\partial C}{\partial E}*III+C\frac{\partial III}{\partial E}\right) \quad (28)$$

Donde,

$$\frac{\partial A}{\partial E}=\frac{\partial I}{\partial E}*II+I\frac{\partial II}{\partial E}$$

$$A = I * II$$

$$B = III * IV$$

$$C = VI * II$$

$$\frac{\partial B}{\partial E} = \frac{\partial III}{\partial E} * IV + III * \frac{\partial IV}{\partial E}$$

$$\frac{\partial C}{\partial E} = \frac{\partial VI}{\partial E} * II + VI * \frac{\partial II}{\partial E}$$

$$\frac{\partial I}{\partial E} = \left[\frac{-(D-M)}{(E+D-M)^2} + \frac{(-k)(xD-M)}{(E+D-M)^2} \right]$$

$$\frac{\partial II}{\partial E} = \left\{ \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M} - R_j}{1/\sqrt{\rho}} \right]^2} \right\} \left\{ (-1) \left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M} - R_j}{1/\sqrt{\rho}} \right] \right\} \left\{ \sqrt{\rho} \left(\frac{-(D-M)}{(E+D-M)^2} + \frac{(-k)(xD-m)}{(E+D-M)^2} \right) \right.$$

$$\frac{\partial III}{\partial E} = \left[\frac{(1+k)(E+D-M)^2 - 2[E(1+k) + Dk(1+x)](E+D-M)}{(E+D-M)^4} \right]$$

$$\frac{\partial IV}{\partial E} = 1$$

$$\frac{\partial V}{\partial E} = (-1) I * II * \frac{\partial I}{\partial E}$$

$$\frac{\partial VI}{\partial E} = G'(S^* - \overline{R})(-1) \left[\frac{-(D-M)}{(E+D-M)^2} + \frac{(-k)(xD-M)}{(E+D-M)^2} \right]$$

Sin embargo, esta derivada parcial tiene dos términos que se cancelan, obteniendo la expresión:

$$\frac{\partial CPO}{\partial E} = \left(\frac{\partial A}{\partial E} B \right) - Dk \left(\frac{\partial C}{\partial E} * III + C \frac{\partial III}{\partial E} \right)$$

(véase el apéndice A8).

El supuesto de que la diferencia entre R_j y $\overline{R}$ sea lo suficientemente grande asegura que $\left(\frac{\partial A}{\partial E} B \right)$ sea menor que cero (véase el apéndice A9). A su vez, esto genera que $\frac{\partial C}{\partial E}$ sea menor que cero. Por lo tanto para poder afirmar que $\frac{\partial CPO}{\partial E}$ es positiva, se mantendrá el supuesto que $D - M + k(xD - M) > Dk\left[G(S^* - \overline{R_B})\right]$ (véase el apéndice A10).

- <u>Cálculo de la derivada de la condición de primer orden con respecto a D:</u>

$$\frac{\partial CPO}{\partial D} = \left(\frac{\partial A}{\partial D}B\right) + \left(A\frac{\partial B}{\partial D}\right) - \frac{\partial V}{\partial D} - k(C * III) - Dk\left(\frac{\partial C}{\partial D} * III + C\frac{\partial III}{\partial D}\right) \qquad (29)$$

donde,

$$\frac{\partial A}{\partial D} = \frac{\partial I}{\partial D} * II + I\frac{\partial II}{\partial D}$$

$$A = I * II$$

$$B = III * IV$$

$$C = VI * II$$

$$\frac{\partial B}{\partial D} = \frac{\partial III}{\partial D} * IV + III * \frac{\partial IV}{\partial D}$$

$$\frac{\partial C}{\partial D} = \frac{\partial VI}{\partial D} * II + VI * \frac{\partial II}{\partial D}$$

$$\frac{\partial I}{\partial D} = \left[\frac{E}{(E + D - M)^2} + \frac{k\left[(E + D - M) - (xD - M)\right]}{(E + D - M)^2}\right]$$

$$\frac{\partial II}{\partial D} = \left\{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M} + \frac{k(xD-M)}{E+D-M} - R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]^2}\right\}\left\{(-1)\left[\frac{\frac{D - M}{E + D - M} + \frac{k(xD - M)}{E + D - M} - R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]\right\}\left\{\sqrt{\rho}\left(\frac{E}{(E + D - M)^2} + \frac{k\left[(E + D - M) - (xD - M)\right]}{(E + D - M)^2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial III}{\partial D} = \left[\frac{k(1 + x)(E + D - M)^2 - 2\left[E(1 + k) + Dk(1 + x)\right](E + D - M)}{(E + D - M)^4}\right]$$

$$\frac{\partial IV}{\partial D} = 1$$

$$\frac{\partial V}{\partial D} = (-1)I * II * \frac{\partial I}{\partial D}$$

$$\frac{\partial VI}{\partial D} = G'(S^* - \overline{R})(-1)\left[\frac{E}{(E + D - M)^2} + \frac{k\left[(E + D - M) - (xD - M)\right]}{(E + D - M)^2}\right]$$

Nuevamente con el supuesto de una diferencia suficientemente grande entre R_j y $\overline{R}$ y el supuesto de $D - M + k(xD - M) > Dk\,G(S^* - \overline{R})$, se logra que la derivada parcial sea positiva. (véase el apéndice A11).

Finalmente, uniendo todos los resultados obtenidos se llega a que:

$$\frac{\partial M}{\partial k} = -\frac{\frac{\partial CPO}{\partial k}}{\frac{\partial CPO}{\partial M}} > 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial D} = -\frac{\frac{\partial CPO}{\partial D}}{\frac{\partial CPO}{\partial M}} > 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial E} = -\frac{\frac{\partial CPO}{\partial E}}{\frac{\partial CPO}{\partial M}} > 0$$

Esto significa que los supuestos anteriormente incluidos a lo largo de las deducciones de estas derivadas aseguran que incrementos marginales en los recursos disponibles en $t = 0$ o un incremento en el grado de iliquidez del activo de largo plazo incrementan la inversión en reservas (resultados todos con un alto grado de intuición).

V. <u>Efectos totales de las variables exógenas sobre el umbral</u>

Una vez obtenido el signo de las derivadas de M con respecto a las demás variables, nos encontramos en condiciones de analizar como afectarán estas variables al umbral $\overline{R_B}$. Dado que *R* se la supone una variable aleatoria, los cambios sobre el umbral se traducen de manera directa en cambios sobre la probabilidad de crisis.

El efecto total de cada una de las variables exógenas sobre $\overline{R}$ se obtiene derivando la ecuación que define implícitamente $\overline{R}$, considerando que M es función de las variables exógenas. Reemplazando en la expresión R_s dentro de la ecuación que define a $\overline{R}$, y luego tomando derivadas con respecto a E, D, y k a partir de la misma se obtiene que esta derivadas son las siguientes (véase el apéndice A.12 para las derivaciones correspondientes):

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial E}=\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial E}\right)\left[D\left(G\left(R^{*}-\overline{R}\right)-1\right)-E(1+k)\right]+M(1+k)-D\left[1+kG\left(R^{*}-\overline{R}\right)\right]}{(D+E-M)^{2}\left[1+\frac{kG'\left(R^{*}-\overline{R}\right)D}{(D+E-M)}\right]}$$

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial D}=\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial D}\right)\left[D\left(G\left(R^{*}-\overline{R}\right)-1\right)-E(1+k)\right]+kG\left(R^{*}-\overline{R}\right)(E-M)+E+kM}{(D+E-M)^{2}\left[1+\frac{kG'\left(R^{*}-\overline{R}\right)D}{(D+E-M)}\right]}$$

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial k}=\frac{\left(\frac{G\left(R^{*}-\overline{R}\right)D-M}{D+E-M}+\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial k}\right)\left(D\left[G\left(R^{*}-\overline{R}\right)-1\right]-E(1+k)\right)}{(D+E-M)^{2}}\right)}{\left[1+\frac{kG'\left(R^{*}-\overline{R}\right)D}{D+E-M}\right]}$$

En cualquiera de los tres casos, estas expresiones indican que el cambio en el valor de umbral cuando cambian *D*, *E* o *k* es la suma de dos efectos, uno "directo" (el cual sería el único efecto de suponer un nivel de reservas exógeno) más uno "indirecto", el cual surge por la endogeneidad del nivel de reservas, que cambia precisamente con variables como *D*, *E* o *k*, pero donde además ese nivel de reservas afecta al umbral.

En estas expresiones el efecto directo sobre el umbral depende de la variable exógena que varía. Lo que es común a las tres expresiones es que el signo de este efecto directo es ambiguo, dependiendo de los valores de *D* o *E* respecto a *M* y otros parámetros. Lo que también sobresale de estos ejercicios de estática comparativa es que, el efecto indirecto es siempre negativo, lo cual se demuestra rápidamente examinando el signo de la expresión que captura tal efecto, $\left(\frac{\partial M}{\partial k}\right)(kD[G(s^* - \bar{R}) - 1] - E(1+k))$, el cual es estrictamente negativo dado que $0 < G < 1$.

Esto muestra que en esta versión del modelo CGR con una decisión explícita del nivel de reservas tiende a que un incremento tanto de los recursos propios *E*, como del endeudamiento *D*, como del nivel de iliquidez *k*, ceteris paribus, tiende a reducir la probabilidad de crisis, o al menos, a reducir el incremento en esa probabilidad, respecto del caso de reservas exógenas, dado que estos incrementos aumentan el incentivo a acumular reservas líquidas. Nótese que, para que esto último ocurra, algunas condiciones específicas sobre variables exógenas del modelo deben verificarse. Es conjeturable que, de utilizarse otra función objetivo de la institución que elige el nivel de reservas en $t = 0$ que contemple los rangos de crisis para *R*, las condiciones para que las reservas sean monótonas en las variables exógenas *E*, *D* o *k* sean menos restrictivas que en esta versión del modelo, con lo que también podría conjeturarse que las condiciones para que se reduzca la probabilidad de crisis con el incremento de estas tres variables sean más generales que las que se proponen en esta versión más simplificada de la extensión de CGR.

VI. Conclusión

El estudio realizado permite observar la relación que existe entre las variables *D* (tope de endeudamiento), *E* (recursos propios de la economía) y *k* (el grado de iliquidez del activo de largo plazo) con el umbral que determina la probabilidad de crisis. A diferencia del modelo original de Corsetti et al. (2006), no sólo se estudia el efecto que tienen estas variables exógenas sobre el umbral, sino que a su vez se ve como afectan la probabilidad de crisis indirectamente por medio de la variación generada en el nivel de reservas *M*, previamente endogeneizado. Si bien no se obtiene un signo concreto cuando se intenta analizar el efecto que genera una variación de k en el umbral, se puede observar que existe una tensión entre el efecto directo e indirecto. El primero aumenta la probabilidad de crisis y el segundo la reduce, vía el aumento del nivel de reservas generado por el aumento en los costos de liquidación.

Respecto de las otras dos variables D y E, se puede afirmar que el efecto de una variación de las mismas en el umbral de crisis tiende a tener un signo único, que concuerda con la intuición económica esperada. Un aumento en los recursos disponibles, ya sea vía el monto máximo de préstamos disponible (D) o la cantidad de recursos disponibles en el período cero (E), generan un desplazamiento del umbral del retorno del activo líquido hacia la izquierda, lo cual sería equivalente a decir que reducen la probabilidad de que ocurra una crisis. De todos modos, como se menciona en la sección anterior, las restricciones impuestas por la simplicidad de la función objetivo del decisor del nivel de reservas inicial obligan a imponer supuestos adicionales para garantizar la nitidez de los resultados anteriormente descritos. Es misión de futuras investigaciones la generalización de este modelo, especialmente pensando en funciones objetivo más generales, el verificar la robustez de estos resultados con estas modificaciones.

Referencias

- Corsetti, Giancarlo; Guimaraes, Bernardo and Roubini, Nouriel (2006). “International Lending of Last Resort and Moral Hazard: A Model of IMF´s Catalytic Finance”, *Journal of Monetary Economics* 53, 441-471

- Morris, Stephen and Shin Hyun Song (1998). “Unique Equilibrium in a Model of Self-Fulfilling Currency Attacks”, *American Economic Review* 88, 587-97

- Obstfeld, Maurice; Shambaugh, Jay and Taylor, Alan M. (2008). “Financial Stability, the Trilemma, and International Reserves”. CEPR

- Rochet, Jean-Charles and Vives, Xavier (2004). “Coordination Failures and the Lender of Last Resort: Was Bagehot Right After All?”, *Journal of the European Economic Association* 2, 1116-1147

- Rodrik, Dani (2006). “The Social Cost of Foreign Exchange Reserves”, *International Economic Journal* Vol. 20(3), 253-266

Apéndices

A1. Demostración de la obtención del posterior en el modelo modificado

La distribución del retorno del activo ilíquido es conocida en la economía, $R \sim N(R_j, \frac{1}{\alpha})$. En $t = 1$, los managers de fondos reciben una señal $\tilde{s}_i = R + \varepsilon_i$ donde $\varepsilon_i \sim N(0, \frac{1}{\alpha})$, de esta manera, $\tilde{s}_i \sim N(R, \frac{1}{\alpha})$. Entonces los managers de fondos usan su información para deducir una distribución posterior. La realización de R es desconocida, pero sí se conoce su distribución previa a la realización. Luego se observa una muestra $\tilde{s}_i$ y entonces los managers actualizan su distribución previa para obtener la distribución posterior. Esta actualización se hace utilizando la regla de Bayes.

La distribución posterior se define como:

$$g(R/\tilde{s}_i) = \frac{f(\tilde{s}_i/R)f(R)}{m(\tilde{s}_i)}$$

donde $m(s) = \int f(\tilde{s}_i/R)f(R)dR$

$$f(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi/\rho}} e^{\frac{-\rho}{2}(R-R_j)^2}$$

$$f(s/R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi/\alpha}} e^{\frac{-\alpha}{2}(\tilde{s}_i-R)^2}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$m(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\alpha\rho}} e^{\frac{-\alpha\rho}{2}\left[\frac{1}{\rho}(s-R)^2 + \frac{1}{\alpha}(R-R_j)^2\right]} dR$$

Y luego multiplicando por $\frac{(1/\alpha + 1/\rho)^{1/2}}{(1/\alpha + 1/\rho)^{1/2}}$ y multiplicando el exponente por $\frac{(1/\alpha + 1/\rho)}{(1/\alpha + 1/\rho)}$, llegamos a:

$$m(s)=\frac{(1/\alpha+1/\rho)^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left[\frac{(s/\rho+R_j/\alpha)}{(1/\alpha+1/\rho)}\right]^2+\frac{(s^2/\rho+R_j^2/\alpha)}{(1/\alpha+1/\rho)}}$$

Finalmente la fórmula del posterior será:

$$g(R/s)=\frac{(1/\alpha+1/\rho)^{1/2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/\alpha\rho}}e^{-\frac{\alpha\rho(1/\alpha+1/\rho)}{2}\left(R-\left(\frac{s/\rho+R_j/\alpha}{1/\alpha+1/\rho}\right)\right)}$$

Que es precisamente una normal:

$$N\sim\left(\frac{s/\rho+R_j/\alpha}{1/\alpha+1/\rho};\frac{1/\alpha\,1/\rho}{1/\alpha+1/\rho}\right)$$

<u>A2. Función objetivo inicial</u>

En un principio, confeccionamos una función objetivo que representara las preferencias del gobierno local, en la elección de la canasta activo líquido (M)/activo ilíquido(I). El gobierno lo que hace es maximizar el Producto Bruto Neto esperado, para poder decidir cual será el nivel óptimo de reservas acumuladas.

Dada la modificación que realizamos en el modelo, nos queda un único umbral $\overline{R}$, que divide el espacio entre el caso de crisis y el de no crisis. Entonces para confeccionar esta ecuación ex ante, debimos tener en cuenta cuando $R>\overline{R}$ (i.e. no hay default y el GNP es positivo) y cuando $R<\overline{R}$ (i.e. el país defaultea y entonces el GNP se vuelve cero). Pero dado que este último caso vuelve cero el GNP, podemos deshacernos de él.

Sin embargo, para el caso en que $R\geq\overline{R}$, tenemos dentro 3 subcasos:

1. Cuando $xD \leq M$, la liquidez alcanza para cubrir la deuda de corto plazo, por lo tanto no hay liquidación de activos ilíquidos (i.e. $z = 0$)
2. Cuando $M \leq xD \leq M + \frac{RI}{1+k}$, el activo líquido no alcanza para cubrir la deuda de corto plazo, pero ésta es lo suficientemente baja como para poder cubrirse con la liquidación de activos ilíquidos y no entrar en default.
3. Cuando $xD > M + \frac{RI}{1+k}$, el país no llega a cubrir la deuda de corto plazo ni sumando sus activos líquidos con lo que obtiene por liquidar *todos* sus activos ilíquidos. Por lo tanto el país defaultea y el GNP se vuelve cero. Entonces este último término se va a volver cero y podrá omitirse en la resolución de la ecuación.

De esta manera, la ecuación que representa el PBN esperado sería:

$$Máx\ U = P(R \geq \overline{R_A})P(xD \leq M)\ R_A I + M - D\ + P(R \geq \overline{R_B})P(M \leq xD \leq \frac{R_B I}{1+k})\left\{R_B I - D\left[E(x / R \geq \overline{R_B})k + 1\right] + M(1+k)\right\} + \left[P(R \geq \overline{R})P(xD > M + \frac{RI}{1+k})(x-1)D\right]$$

s.a. $E + D = M + I$.

Donde

R: retorno del activo ilíquido en $t = 2$.

x: proporción de gente que retira en $t = 1$.

D: préstamos tomados en $t = 1$.

E: dotación de los agentes en $t = 0$.

M: activo líquido

I: Activo líquido

k : costo de liquidación del activo ilíquido (por unidad invertida)

$\overline{R_A}$: es el $\overline{R}$ que queda definido para el caso en que $xD \leq M$, entonces volviendo a la ecuación (11) del modelo original (i.e. $\overline{R} = R_S + k\left\{\frac{xD - M}{I};0\right\}$ donde $R_S = \frac{D-M}{I}$) y así vemos que $\overline{R_A} = R_S$.

R_A: es el retorno del activo ilíquido dado el caso en que no hay default y que el activo líquido alcanza para cubrir la deuda de corto plazo.

$$R_A = E(R / R \geq \overline{R_A})$$

$\overline{R_B}$: es el $\overline{R}$ que queda definido para el caso en que $M \leq xD \leq \frac{R_B I}{1+k}$. Al igual que $\overline{R_A}$ sale de reemplazar en la ecuación (11) del modelo original.

$$R_B = R_S + k(\frac{xD-M}{I})$$

R_B: es el retorno del activo ilíquido dado el caso en que no hay default pero el activo líquido no alcanza para cubrir la deuda de corto plazo, por lo tanto se liquida una proporción de los activos ilíquidos.

$$R_B = E(R / R \geq \overline{R_B})$$

Esta función objetivo del gobierno abarca todos los casos que se pueden dar en la economía. Pero al intentar derivar el nivel óptimo de reservas nos encontramos con obstáculos algebraicos infranqueables, que nos obligaron a realizar algunos supuestos para limitar los casos que serán evaluados.

<u>A3. Cancelación de términos en la derivada de la CPO con respecto a M</u>

$$A\frac{\partial B}{\partial M} = I * II * III$$

$$I * II * \left[\frac{\partial III}{\partial M} * IV + III * \frac{\partial IV}{\partial M}\right] = I * II * III$$

$$\frac{\partial III}{\partial M} * IV + III * \frac{\partial IV}{\partial M} = III$$

$$\left[\frac{2\left[E(1+k)+Dk(1+x)\right]}{(E+D-M)^3}\right](E+D-M) + \frac{\left[E(1+k)+Dk(1+x)\right]}{(E+D-M)^2}(-1) = \frac{\left[E(1+k)+Dk(1+x)\right]}{(E+D-M)^2}$$

Observamos que ambos lados de la igualdad son equivalentes.

<u>A4. Signo de la derivada de la CPO con respecto a M</u>

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \frac{\partial I}{\partial M} * II + I\frac{\partial II}{\partial M}$$

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \left[-\frac{\left[E(1+k)+Dk(1+x)\right]}{(E+D-M)^2}\right]\left\{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}-R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]^2}\right\}+$$

$$+\left[\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}\right]\left\{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}-R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]^2}\right\}\left\{(-1)\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}-R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]\right\}$$

$$\left\{\sqrt{\rho}\left[-\frac{E(1+k)+Dk(1+x)}{(E+D-M)^2}\right]\right\}$$

Como se puede observar, el primer término es negativo. Por lo tanto si asumimos que:

$$\overline{R_B}=\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}<R_j$$

Entonces el segundo término también se vuelve negativo. Por lo tanto $\frac{\partial A}{\partial M}$ <0.

<u>A5. Signo final de la derivada de la CPO con respecto a M</u>

Para asegurarnos que $\frac{\partial CPO}{\partial M}$ es negativa, necesitamos que:

$$\frac{\partial CPO}{\partial A/\partial M}\frac{\partial A/\partial M}{\partial Z}>\frac{\partial CPO}{\partial C/\partial M}\frac{\partial C/\partial M}{\partial Z}$$

donde Z representa a $\left\{(-1)\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}-R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]\right\}$, como ya fue previamente definido. La razón por la cual derivamos con respecto a esta variable Z es porque al ser a la cual se ve afectada por el supuesto va a ser la que defina el signo de la derivada parcial. Entonces la expresión de arriba quedaría:

$$B*\frac{\partial\left(I*\frac{\partial II}{\partial k}\right)}{\partial Z}>Dk\left[III*\frac{\partial\left(VI*\frac{\partial II}{\partial k}\right)}{\partial Z}\right]$$

$$(II*IV)*I*\left(\frac{\frac{\partial II}{\partial k}}{\partial Z}\right)>Dk\left[III*VI*\left(\frac{\frac{\partial II}{\partial k}}{\partial Z}\right)\right]$$

$$I*IV>Dk*VI$$

$$\left(\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}\right)(E+D-M) > Dk\,G(S^{*}-\overline{R_B})$$

Así llegamos al supuesto necesario para que $\dfrac{\partial CPO}{\partial M}$ sea negativa:

$$D-M+k(xD-M) > Dk\,G(S^{*}-\overline{R_B})$$

<u>A6. Signo de la derivada de la CPO con respecto a k</u>

De la expresión $\left(\dfrac{\partial A}{\partial k}B\right)+\left(A\dfrac{\partial B}{\partial k}\right)-\dfrac{\partial V}{\partial k}$, el único término que no tiene el signo determinado sin realizar ningún supuesto es $\dfrac{\partial A}{\partial k}$. Sabemos que:

$$\frac{\partial A}{\partial k}=\frac{\partial I}{\partial k}*II+I\,\frac{\partial II}{\partial k}$$

Y de esta expresión tanto $\dfrac{\partial I}{\partial k}*II$ como I, tienen signo positivo. Por lo tanto lo único que queda para asegurarnos el signo positivo de toda la expresión es analizar la definición de $\dfrac{\partial II}{\partial k}$.

$$\frac{\partial II}{\partial k}=\left\{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}-R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]^{2}}\right\}\left\{(-1)\left[\frac{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}-R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]\right\}\left\{\sqrt{\rho}\left(\frac{xD-M}{E+D-M}\right)\right\}$$

Tanto el primer multiplicador como el último tienen signo positivo. Por lo tanto con sólo asumir que $R_j > \overline{R_B}$, nos aseguramos que la expresión $Z=\left\{(-1)\left[\dfrac{\frac{D-M}{E+D-M}+\frac{k(xD-M)}{E+D-M}-R_j}{1/\sqrt{\rho}}\right]\right\}$ sea mayor que cero, asegurándonos que $\left(\dfrac{\partial A}{\partial k}B\right)+\left(A\dfrac{\partial B}{\partial k}\right)-\dfrac{\partial V}{\partial k}$ es mayor que cero.

A7. Signo final de la derivada de la CPO con respecto a k

Para poder afirmar que el signo de $\frac{\partial CPO}{\partial k}$ es mayor que cero, ahora necesitaremos analizar el signo de los últimos dos términos.
Se puede observar que $D(C * III)$ es positivo sin realizar ningún supuesto.
Por otro lado, de la expresión $Dk\left(\frac{\partial C}{\partial k} * III + C\frac{\partial III}{\partial k}\right)$, sólo desconocemos el signo de $\frac{\partial C}{\partial k}$.
Pero si observamos su definición, junto con el supuesto de que R_j es lo suficientemente mayor a $\overline{R_B}$ podemos afirmar que $Dk\left(\frac{\partial C}{\partial k} * III + C\frac{\partial III}{\partial k}\right)$ es positiva en su totalidad.
$\frac{\partial C}{\partial k} = \frac{\partial VI}{\partial k} * II + VI * \frac{\partial II}{\partial k}$, de esta expresión sólo desconocemos el signo de $\frac{\partial II}{\partial k}$. Pero dado el supuesto recién enumerado, podremos afirmar que esta expresión es negativa. Y como decimos lo suficientemente grande, por más que el primer término de $\frac{\partial C}{\partial k}$ sea negativo, sabremos que el segundo término será mayor, haciendo que la expresión sea positiva en su totalidad.
Ahora esto nos trae el problema de que tenemos los dos primeros términos de la derivada de la CPO positivos y los segundos dos términos negativos, entonces para poder afirmar que toda la expresión es positiva deberemos realizar un supuesto más. Debemos suponer que el aumento de $\frac{\partial A}{\partial k}$ sea mayor a la caída generada por $\frac{\partial C}{\partial k}$.

$$\frac{\partial CPO}{\partial A/\partial k}\frac{\partial A/\partial k}{\partial Z} > \frac{\partial CPO}{\partial C/\partial k}\frac{\partial C/\partial k}{\partial Z}$$

Que como se puede observar en A5 se cumple cuando:

$$D - M + k(xD - M) > Dk\left[G(S^* - \overline{R_B})\right]$$

Entonces podemos afirmar que $\frac{\partial CPO}{\partial k}$ será positiva.

A8. Cancelación de términos en la derivada de la CPO con respecto a E

$$\left(A\frac{\partial B}{\partial E}\right) = \frac{\partial V}{\partial E}$$

$$I * II * \left[\frac{\partial III}{\partial E} * IV + III * \frac{\partial IV}{\partial E}\right] = (-1) I * II * \frac{\partial I}{\partial E}$$

$$\left[\frac{(1+k)(E+D-M)^2-2\left[E(1+k)+Dk(1+x)\right](E+D-M)}{(E+D-M)^4}\right](E+D-M)+$$

$$+\left[\frac{E(1+k)+Dk(1+x)}{(E+D-M)^2}\right](-1)=(-1)\left[\frac{-(D-M)}{(E+D-M)^2}+\frac{(-k)(xD-m)}{(E+D-M)^2}\right]$$

Distribuyendo los términos se puede observar que ambos lados de la igualdad se van a cancelar.

<u>A9. Signo de la derivada de la CPO con respecto a E</u>

B por las expresiones que la componen ya sabemos que es positiva, sin realizar ningún supuesto. Pero en el caso de $\frac{\partial A}{\partial E}$, el signo va a depender de $\frac{\partial II}{\partial E}$.

$$\frac{\partial A}{\partial E}=\frac{\partial I}{\partial E}*II+I\,\frac{\partial II}{\partial E}$$

Con el supuesto de que la diferencia entre el R_j y $\overline{R_B}$ sea lo suficientemente grande, nos aseguramos que $\frac{\partial II}{\partial E}$ sea menor que cero y por lo tanto, $\frac{\partial A}{\partial E}$ es negativo.

<u>A10. Signo final de la derivada de la CPO con respecto a E</u>

Siguiendo argumentos similares a los de A5, la condición que se debe cumplir es:

$$\frac{\partial CPO}{\partial A/\partial E}\frac{\partial A/\partial E}{\partial Z}<\frac{\partial CPO}{\partial C/\partial E}\frac{\partial C/\partial E}{\partial Z}$$

$$B*\frac{\partial\left(I*\frac{\partial II}{\partial E}\right)}{\partial Z}<Dk\left[III*\frac{\partial\left(VI*\frac{\partial II}{\partial E}\right)}{\partial Z}\right]$$

$$(II*IV)*I*\left(\frac{\frac{\partial II}{\partial E}}{\partial Z}\right)<Dk\left[III*VI*\left(\frac{\frac{\partial II}{\partial E}}{\partial Z}\right)\right]$$

Pero al cancelar $\left(\dfrac{\frac{\partial II}{\partial E}}{\partial Z}\right)$, como en este caso tiene signo negativo, nos queda nuevamente

$$I * IV > Dk * VI$$

Por lo tanto debemos asumir que $D - M + k(xD - M) > Dk\,G(S^* - \overline{R_B})$

<u>A11. Signo de la derivada de la CPO con respecto a D</u>

$$\frac{\partial A}{\partial D} = \frac{\partial I}{\partial D} * II + I\frac{\partial II}{\partial D}$$

De esta expresión desconocemos el signo de $\frac{\partial I}{\partial D}$ y de $\frac{\partial II}{\partial D}$. Con asumir que $kx(E + D) + M + E > x(kM + D)$ nos aseguramos que el signo de será $\frac{\partial I}{\partial D}$ positivo (i.e. esto se cumple para un E lo suficientemente grande).

Dada la definición de $\frac{\partial II}{\partial D}$:

$$\frac{\partial II}{\partial D} = II * Z * \sqrt{\rho} * \frac{\partial I}{\partial D}$$

y el supuesto previamente enunciado sumado al supuesto de que de una diferencia suficientemente grande entre R_j y $\overline{R_B}$, que genera que el Z sea positivo y grande, podemos afirmar que la $\frac{\partial A}{\partial D}$ es positiva.

El problema surge dado que al suponer una diferencia suficientemente grande entre R_j y $\overline{R_B}$, también la $\frac{\partial C}{\partial D}$ se va a hacer más positiva, y al estar restando en la expresión va a contrarrestar el signo de la $\frac{\partial A}{\partial D}$. Por lo tanto para asegurarnos que la $\frac{\partial CPO}{\partial D}$ sea positiva deberemos hacer un supuesto más:

$$\frac{\partial CPO}{\partial A/\partial D}\frac{\partial A/\partial D}{\partial Z} > \frac{\partial CPO}{\partial C/\partial D}\frac{\partial C/\partial D}{\partial Z}$$

Que como se puede observar en A5 se cumple cuando:

$$D - M + k(xD - M) > Dk\,G(S^* - \overline{R_B})$$

A12. Demostraciones de las estáticas comparativas con respecto al valor de umbral

En el trabajo se mostró que el valor de umbral debe satisfacer la ecuación:

$$\bar{R} = R_S\left[1 + k\frac{\left[G(s^* - \bar{R})D - M\right]}{D - M}\right]$$

donde

$$R_S = \frac{D-M}{I} = \frac{D-M}{E+D-M}$$

Por lo tanto, reemplazando esta última expresión en la anterior arribamos a la ecuación siguiente:

$$\bar{R} = \frac{D-M}{E+D-M}\left[1 + k\frac{\left[G(s^* - \bar{R})D - M\right]}{D - M}\right]$$

$$\bar{R} = \frac{D-M}{E+D-M} + k\frac{\left[G(s^* - \bar{R})D - M\right]}{E+D-M}$$

Teniendo en cuenta que M es función de (E,D,k), como lo es $\bar{R}$, entonces aplicando el concepto de derivada implícita con respecto a cada una de estas tres variables se obtiene que

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial E} = \frac{\left(-\frac{\partial M}{\partial E}\right)(E+D-M) + (D-M)\left(\frac{\partial M}{\partial E} - 1\right)}{(E+D-M)^2}$$

$$+ k\frac{\left[\left(G'(s^* - \bar{R})D\left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial E}\right) - \frac{\partial M}{\partial E}\right)(E+D-M) + \left(G(s^* - \bar{R})D - M\right)\left(\frac{\partial M}{\partial E} - 1\right)\right]}{(E+D-M)^2}$$

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial D}=\frac{\left(1-\frac{\partial M}{\partial D}\right)(E+D-M)-(D-M)\left(1-\frac{\partial M}{\partial D}\right)}{(E+D-M)^2}$$
$$+k\frac{\left[\left(-G'(s^*-\overline{R})D\frac{\partial \overline{R}}{\partial D}-G'(s^*-\overline{R})-\frac{\partial M}{\partial D}\right)-(G(s^*-\overline{R})D-M)\left(1-\frac{\partial M}{\partial D}\right)\right]}{(E+D-M)^2}$$

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial k}=\frac{\left(-\frac{\partial M}{\partial k}\right)(E+D-M)-(D-M)\left(-\frac{\partial M}{\partial k}\right)}{(E+D-M)^2}+\frac{\left[G(s^*-\overline{R})D-M\right]}{E+D-M}$$
$$+k\frac{\left[\left(-G'(s^*-\overline{R})D\left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial k}\right)-\left(\frac{\partial M}{\partial k}\right)\right)(E+D-M)+(G(s^*-\overline{R})D-M)\left(\frac{\partial M}{\partial k}\right)\right]}{(E+D-M)^2}$$

En estas derivadas debe aclararse que los términos $\frac{\partial \overline{R}}{\partial E}$, $\frac{\partial \overline{R}}{\partial D}$ y $\frac{\partial \overline{R}}{\partial k}$ denotan el efecto *total* de cambios de *E*, *D* y *k* sobre el umbral. Despejando de estas igualdades las derivadas mencionadas se obtienen las ecuaciones de la sección V.