CICLO DE SEMINARIOS 1996

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Interacción Estrategica en Elecciones Parlamentarias

Eduardo Engel

QUAERERE VERUM

Universidad de San Andres

Sem.
Eco.
96/29

Universidad de
San Andres

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Interacción Estrategica en Elecciones Parlamentarias

Eduardo Engel (Harvard University, Universidad de Chile)

Universidad de
SanAndrés

BIBLIOTECA

CICLO DE SEMINARIOS 1996

Día: Martes 29 de Octubre

9:00 hs.

Interacción Estratégica en Elecciones Parlamentarias

Eduardo Engel y Alejandro Neut[1]

Centro de Economía Aplicada (CEA)
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile

Primera versión: Agosto, 1996
Esta versión: Octubre, 1996

Resumen

En una elección parlamentaria se desarrollan simultáneamente varias campañas electorales (una en cada distrito). Esto plantea a los partidos políticos el problema de cómo distribuir sus recursos (monetarios y no monetarios) entre estas campañas. En este trabajo se presenta un modelo que describe la interacción estratégica de dos partidos (o coaliciones políticas) en una elección parlamentaria. Al estimar este modelo para las elecciones parlamentarias chilenas de 1989 y 1993, se concluye que hubo comportamiento estratégico y que éste se dio en un grado mucho mayor por parte de la coalición de partidos de oposición que por parte de la Concertación. Sin embargo, el costo que tuvo para la Concertación no haber asignado sus recursos eficientemente pareciera haber sido bajo. También se concluye que si los recursos de la Concertación, relativos a aquellos de la oposición, aumentan en un 50% en 1997, la coalición de gobierno puede esperar elegir 8 diputados adicionales.

---

[1] El primer autor está asociado al NBER. Los autores agradecen al apoyo financiero de Fondecyt (Proyectos 92-901 y 195-520) y la Fundación Mellon (Grant 9608). Este trabajo se benefició de comentarios de Ronald Fischer, Alexander Galetovic, Ricardo Sanhueza, Ennio Stacchetti, Ricardo Wilhelm y los participantes en seminarios de la Universidad de Harvard (Kennedy School) y la Universidad de Chile (CEA/DECON). Dirigir correspondencia a CEA, DII, U. de Chile, Casilla 2777, Santiago, CHILE o por correo electrónico a `eengel@dii.uchile.cl`

Universidad de San Andrés

1 Introducción

La antigua campaña pre-electoral, respaldada por un gran contingente de voluntarios, ha sido reemplazada por una campaña que es cada vez más costosa. Actualmente un asiento en la cámara baja en Chile 'cuesta' entre 30 y 60 millones de pesos, mientras el puesto por una senaturia cuesta cinco veces más[2]. En Estados Unidos un candidato con aspiraciones a diputado en 1980 debió solventar una campaña que en promedio alcanzó los 400,000 dólares, mientras un candidato al senado gastó un promedio de 4 millones de dólares. El gasto total en campañas electorales en los Estados Unidos ha aumentado a más del doble (en dólares de igual valor) entre 1976 y 1992[3,4].

Considerando que los gastos de campaña son cada vez mayores, cabe preguntarse cómo los partidos distribuyen aquellos recursos (monetarios y no monetarios) de que disponen entre las distintas campañas que se desarrollan simultáneamente. Esto será de interés en aquellos países en que los partidos deciden cómo gastar una fracción importante de los fondos electorales. Por ejemplo, en los Estados Unidos tanto la mesa central del Partido Republicano como del Partido Demócrata no tienen una gran participación en las campañas parlamentarias: las estrategias empleadas y la obtención de recursos corren por cuenta de cada candidato. En cambio en Chile la ingerencia que tienen las cúpulas de los partidos en las campañas para el Congreso es considerablemente mayor. Esta comienza con la designación de sus candidatos para cada distrito y continúa con la entrega de ayuda en materiales (afiches, pintura), el trabajo de voluntarios e incluso dinero que el partido distribuye a lo largo del país. Finalmente, los partidos apoyan ciertas campañas al manifestar un especial respaldo o interés por los candidatos de un lugar determinado. El mayor respaldo a ciertos distritos muestra la distincion que pueden hacer los partidos con el fin de cumplir sus metas electorales. Un caso particular se dio en la campaña de 1970 cuando la sede de la Unidad Popular decidió trasladarse a Iquique, y así dar un último impulso a los resultados esperados en ese distrito[5].

Que los partidos se comporten estratégicamente tiene varias consecuencias. En primer lugar una estrategia inter-distritos dependerá del sistema electoral empleado. En otras palabras, el sistema electoral determina cuán atractivo resulta para los partidos invertir en la campaña de un distrito particular (véase el cuadro I para un ejemplo). De esta manera se tiene que el sistema electoral afectará las votación obtenida en cada distrito.

Una segunda consecuencia se manifiesta cuando los analistas políticos hacen afirmaciones res-

[2] *El Mercurio*, pág. 1, 14 de Enero de 1996.

[3] Comisión Federal de Elecciones de EEUU.

[4] Este hecho ha sido tema de reflexión y debate permanente en el Congreso y la opinión pública de ese país, véase Levitt (1994).

[5] Fuente: Ricardo Wilhelm.

Universidad de SanAndrés

CUADRO I

Votación Esperada en Distitos Electorales		
	Distrito I	Distrito II
Partido A	51%	33%
Partido B	49%	67%

Para ejemplificar tomamos un país con dos partidos (A y B) y dos distritos (I y II) con las votaciones esperadas (antes de considerar los gastos electorales) descritas en la tabla de arriba.

Al aplicar el sistema D'Hont[a] con un sólo cupo por distrito (sistema uninominal) se tiene que el distrito I será el más conflictivo y atraerá más recursos de ambos partidos. El motivo es claro: basta un pequeño cambio en los resultados del distrito I para que el partido B le arrebate esa silla al partido A. En cambio en el distrito II es prácticamente imposible, independientemente de cuánto se gaste en esta campaña, que el partido A le arrebate la silla al partido B. Sin embargo, si con la misma votación esperada en la ausencia de gasto electoral se considera la situación con dos cupos por distrito (sistema binominal) la situación se invierte. En este caso variaciones pequeñas en los resultados obtenidos en el distrito II son determinantes para la asignación de las sillas parlamentarias. Por lo tanto será este distrito el que atraiga los recursos de los partidos.

[a]Este sistema, también llamado sistema n-nominal, corresponde al sistema de "cifra repartidora" utilizado tradicionalmente en Chile. Formalmente este sistema utiliza la siguiente regla para deteminar los n candidatos electos en un distrito:

- El primer candidato electo es el que obtiene la primera mayoría en el partido más votado, luego se 'ajusta' la votación de este partido dividiendola por 2.
- En base a los nuevos valores, se elige el siguiente candidato con el mismo criterio anterior.
- Si el partido ya tuvo un ajuste entonces la votación de este partido se reajusta dividiendo la votación total por 3, 4, 5 y así sucesivamente.
- Este proceso termina cuando se eligen los n candidatos.

Universidad de SanAndrés

CUADRO II

Votación Esperada en Distritos Electorales		
	Distrito I	Distrito II
Partido A	48%	35%
Partido B	52%	65%

Supongamos que la tabla del cuadro I muestra los resultados de una elección uninominal y se desea determinar cuántas sillas hubiese ganado cada partido si el sistema hubiese sido binominal. La primera aproximación al problema es aplicar el nuevo criterio de selección a las votaciones obtenidas[a]. De esa manera se deduce que el partido A habría ganado un diputado y el partido B habría obtenido los otros tres. Sin embargo esta conclusión puede ser equivocada. Suponiendo que el partido A dispuso de más recursos que el partido B y los destinó preferentemente a la campaña del primer distrito, ante un sistema binominal le hubiese convenido concentrar su inversión en el segundo distrito. Esta nueva estrategia pudo implicar los resultados que aparecen en la tabla de encima, resultando en 2 diputados para cada partido.

[a]Siavelis (1994).

Universidad de SanAndrés

pecto de cuál hubiese sido el resultado si el sistema electoral hubiera sido otro. Como los partidos habrían asignado sus recursos de manera diferente, es incorrecto inferir el número de senadores y diputados de cada partido suponiendo los mismos resultados electorales obtenidos en el caso real. El Cuadro II presenta un ejemplo de este fenómeno.

Una tercera consecuencia —asociada a la asignación estratégica de recursos por parte de los partidos— es que el sistema electoral puede influir en el grado de polarización que existe en un país determinado[6]. A medida que crece el gasto asociado a las campañas electorales de un determinado distrito, es de esperar que el indice de polarización también crezca en dicho lugar. Recordando que el tamaño de las campañas dependerá del sistema electoral empleado, se tiene que el sistema electoral puede afectar el grado de polarización del país. Por ejemplo, es posible argumentar que un país con un sistema proporcional tiene, ceteris paribus, un menor grado de polarización promedio a nivel nacional que uno con un sistema binominal. En efecto, con el sistema proporcional la distribución de recursos entre las campañas de los diversos distritos será aproximadamente uniforme (v.g., proporcional al número de electores en cada distrito), pues no habrá distritos 'críticos' que induzcan un gasto muy superior al promedio[7]. Combinando lo anterior con el supuesto que el grado de polarización crece más que proporcionalmente con el gasto en la campaña del distrito, lleva a la conclusión antes planteada.

El tema de las estrategias inter-distritos ha sido comentado por distintos autores[8]. Pero a diferencia de otros tópicos de las ciencias políticas que han sido abordados económicamente, este problema no ha sido formalizado ni su relevancia empírica testeada[9].

El resto de este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 se presenta evidencia 'directa' —es decir, independiente de un modelo formal— que sugiere que hubo comportamiento estratégico en las elecciones parlamentarias chilenas de 1989 y 1993. Los resultados de la sección 2 motivan desarrollar un modelo formal. La sección 3 presenta un modelo en que los partidos deben distribuir sus recursos entre diversas contiendas electorales, en un entorno con incertidumbre respecto del efecto que tienen los recursos asignados en cada campaña. En esta

[6]Para una definición formal de *indices de polarización* véase Esteban y Ray (1994). Estos índices intentan medir diferencias inter-distritos en variables tales como 'derecha' vs. 'izquierda' o participación electoral 'alta' vs. 'baja'.

[7]Por distrito 'crítico' se entiende uno en que el resultado se presume cercano a porcentajes en que el número de parlamentarios elegidos por al menos uno de los partidos crece. Por ejemplo, en el caso de una elección por sistema binominal entre dos partidos políticos, los valores críticos son 1/3 y 2/3.

[8]Randall (1991) y Gunlicks (1984).

[9]La aplicación de un análisis económico para explicar otros fenómenos políticos ha generado una extensa literatura. Por el lado teórico existe abundante literatura que modela el comportamiento de los distintos agentes políticos (véase, v.g., Coughlin, 1992). En cuanto a trabajos empíricos, existen muchos modelos estadísticos, principalmente modelos lineales. En ellos se intenta determinar las variables que influyen en el resultado electoral (Gunlicks, 1984; Lewis-Beck, 1990).

Universidad de San Andrés

sección se caracterizan los equilibrios de Nash y Stackelberg del juego de suma cero resultante. La sección 4 estima el modelo anterior utilizando los resultados de las elecciones parlamentarias chilenas de 1989 y 1993. Las estimaciones 'estructurales' correspondientes confirman la evidencia informal presentada en la sección 2, indicando además que la coalición de partidos de oposición asignó sus recursos de manera más eficiente que la Concertación. En la sección 5 se presentan algunas consecuencias del modelo estimado. Entre ellas destaca que el costo para la Concertación de no haber asignado estratégicamente sus recursos ha sido bajo, aunque esto no tendría por qué repetirse en el futuro. También se estima que si los recursos de la Concertación aumentan en un 50% comparado con aquellos de la coalición de Derecha, el número de diputados que espera elegir la coalición de gobierno en las elecciones parlamentarias de 1997 aumenta en aproximadamente 8. La sección 6 concluye.

2 Evidencia Preliminar

Con objeto de determinar si existe evidencia en favor de comportamiento estratégico de los partidos, una alternativa natural es ver si los partidos asignan más recursos a aquellos distritos en que esperan resultados cercanos a valores 'críticos', donde las fracciones de votación críticas se definen como aquellas en que el último voto escrutado determina cuáles son los candidatos electos[10]. Desgraciadamente, en el caso chileno no existe información sobre el gasto de los partidos en las campañas de los distintos distritos y tampoco se conocen las votaciones que los partidos esperaban en cada uno de ellos. La falta de datos obliga a ser más creativos y a hacer más supuestos.

El supuesto central en que se basa el test que presentamos a continuación es que en aquellos distritos en que los partidos gastan grandes sumas, los resultados presentan sorpresas menores que en aquellos distritos a los cuales destinan pocos recursos. Si además los partidos actúan estratégicamente, gastarán más recursos en distritos en que esperan resultados en las inmediaciones de un valor crítico. Combinando las dos ideas anteriores se tiene que, en la medida que los partidos actúen estratégicamente, habrá una correlación positiva entre el valor absoluto del error de predicción de la votación obtenida y la distancia entre la votación esperada y el valor crítico más cercano. A continuación describimos cómo implementamos esta idea.

Denotamos mediante v_{it} la fracción de la votación obtenida por la Derecha en el distrito i en la elección t. Sólo consideramos la votación de la coalición de partidos de derecha y la Concertación, de modo que la votación obtenida por esta última es igual a $1 - v_{it}$. Suponemos

[10]En el caso del sistema binominal imperante en Chile y suponiendo que sólo hay dos partidos, estos valores son 1/3 y 2/3.

QUAERERE VERUM
Universidad de San Andrés

que v_{it} evoluciona de acuerdo a

$$v_{it} = v_{i,\text{ref}} + \mu + e_{it}, \tag{1}$$

donde μ captura el cambio promedio en la votación de la coalición de derecha y $v_{i,\text{ref}}$ denota la votación obtenida en el distrito i en la última campaña en que no hubo comportamiento estratégico en la asignación de recursos. La condición anterior es con objeto de evitar problemas de endogeneidad. En los tests que presentamos, la elección de referencia será el plebiscito de 1988, donde no hubo asignación de recursos inter-distritos de importancia, pues el factor determinante fue la campaña televisiva, la cual llegó de manera similar a todos los distritos.

Al momento de distribuir sus recursos entre los distintos distritos, los partidos no conocen μ y e_{it}. Suponemos que el factor de tendencia μ es estimado mediante:

$$\widehat{\mu}_t = \overline{v}_{\cdot,t} - \overline{v}_{\cdot,\text{ref}}, \tag{2}$$

donde $\overline{v}_{\cdot,t}$ y $\overline{v}_{\cdot,\text{ref}}$ denotan el promedio sobre los distritos de los v_{it} y $v_{i,\text{ref}}$, respectivamente. En la ausencia de más información, el supuesto anterior posiblemente sea el más natural. Los valores estimados de los e_{it} antes de decidir cómo asignar recursos se suponen iguales a cero.

Si los partidos no asignan recursos estratégicamente, esperaríamos que los valores ex-post de los e_{it} fueran i.i.d., con media nula[11]. En cambio, si ambos partidos asignan recursos estratégicamente, la media de los e_{it} seguirá siendo nula pero su varianza debiera ser menor en aquellos distritos en que los partidos esperaban resultados cercanos a valores críticos[12].

Denotamos mediante $\mathcal{V} = \{1/3, 2/3\}$ el conjunto con las votaciones críticas para el sistema binominal chileno. La distancia esperada entre la votación del distrito i y el valor crítico más cercano se estima mediante:

$$d_{it} = \text{Distancia}(\widehat{v}_{i,t}\,,\ \mathcal{V}), \tag{3}$$

donde:

$$\widehat{v}_{it} = v_{i,\text{pleb}} + \widehat{\mu}_t.$$

El error de predicción ex-post en el distrito i se estima mediante:

$$\widehat{e}_{it} = v_{it} - \widehat{v}_{it}. \tag{4}$$

[11]El hecho que los v_{it} toman valores entre 0 y 1 limita la validez del supuesto de distribuciones iguales. Con tal objeto presentaremos en pies de página los resultados que se obtienen si se trabaja con la transformación logit de los v_{it}, $l_{it} \equiv \log(v_{it}/(1-v_{it}))$, en (1). Las conclusiones obtenidas no varían con esta transformación.

[12]Si sólo la Concertación actúa estratégicamente, esperaríamos que los e_{it} fueran positivos en aquellos distritos en que se esperaban resultados en torno a valores críticos y negativos en los demás distritos. Si sólo la Derecha optimiza, la situación anterior se invierte. Sobre esta posibilidad volvemos en la sección 4.

PARA : WALTER

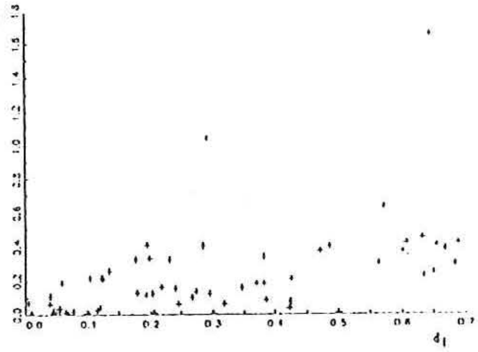

Figura 1: d_i vs $|e_i|$ para la elección de 1989.

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés

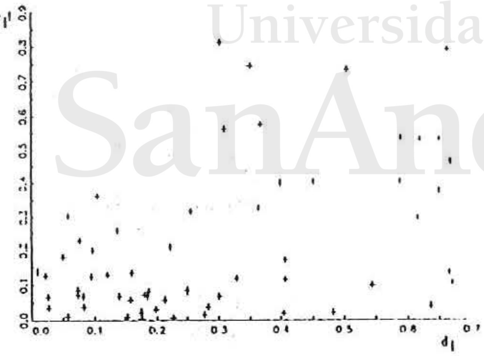

Figura 2: d_i vs $|e_i|$ para la elección de 1993

La Figuras 1 y 2 muestran, para las elecciones parlamentarias de 1989 y 1993, los pares ordenados $(|\widehat{e}_{it}|, d_{it})$, donde los $|\widehat{e}_{it}|$ denotan el valor absoluto del error de predicción ex-post correspondiente. En estas figuras se observa una correlación positiva entre ambas variables; la correlación correspondiente es 0.46 para el año 1989 y 0.32 para el año 1993[13].

Con objeto de determinar si estas correlaciones pueden darse aún si en realidad no hay comportamiento estratégico, calculamos cuán probable es obtener valores mayores que cada una de ellas suponiendo que los $\widehat{e}_{it}$ son independientes e idénticamente distribuidos, donde la distribución común es aquella de los residuos calculados en (4). Las probabilidades correspondientes resultaron ser 0.000 para 1989 y 0.010 para 1993[14]. Se concluye que la evidencia presentada sugiere fuertemente la existencia de comportamiento estratégico.

3 Modelo

En esta sección se desarrolla un modelo en el cual los resultados de una elección parlamentaria dependen de la cantidad de recursos que los partidos destinan a las distintas campañas locales. Los recursos con los que un partido puede apoyar una campaña local son variados y de distinta naturaleza, por ejemplo: dinero, esfuerzo de voluntarios o un especial respaldo de la directiva del partido. Para simplificar el problema se resumirá esta gama de posibilidades en una variable unidimensional denotada por M, donde M crece a medida que aumentan los recursos destinados a la localidad. Las hipótesis que hacemos son las siguientes:

Supuestos:

1. Existen sólo dos partidos (A y B) en un país que está dividido en I circunscripciones electorales ($i = 1, \ldots, I$). En la circunscripción (o el distrito) i se utiliza el sistema con cifra repartidora (sistema D'Hont) para elegir n_i representantes[15]. El número total de sillas de denota mediante $N = \sum_i n_i$.

[13]Si se trabaja con la transformación logit de los v_{it} se obtiene correlaciones de 0.30 y 0.43, respectivamente. Siendo consistentes con el cambio de métrica, en este caso la distancia se mide respecto de la transformación logit del conjunto $\mathcal{V}$.

[14]Se utilizó el método bootstrap para estimar los p-values, generando 3000 muestras bootstrap en cada caso y calculando las correlaciones correspondientes. Éstas fueron mayores que las encontradas en los datos en ninguna oportunidad para la elección de 1989 y en 30 oportunidades para la elección de 1993. En estricto rigor, lo que hemos hecho es aplicar un 'test de significación pura', véase Cox y Hinkley (1974, cap. 3). También cabe notar que los p-values en el caso que se trabaja con transformaciones logit son 0.010 y 0.001, respectivamente.

[15]Ver pie de página en cuadro I de la Introducción para la definición correspondiente.

Universidad de San Andrés

2. La función objetivo de cada partido es maximizar el número esperado de parlamentarios elegidos[16]. Con tal objeto el partido A cuenta con recursos iguales a $\overline{M}^A$, los cuales debe distribuir entre las I campañas que se desarrollan simultáneamente, asignando M_i^A a la campaña del distrito i, con $\sum_i M_i^A = \overline{M}^A$. La situación que enfrenta el partido B es análoga. Los recursos totales de que dispone cada partido, $\overline{M}^A$ y $\overline{M}^B$, son exógenos al modelo.

3. Aquí hacemos una serie de supuestos sobre la función

$$G_i(v|M_i^A, M_i^B) \equiv I\!P_i[v_i^A > v|M_i^A, M_i^B],$$

que denota la probabilidad que tiene el partido A de obtener al menos una fracción v de los votos en el distrito i cuando los partidos A y B asignan M_i^A y M_i^B a este distrito[17].

Suponemos que la función $G_i(v|M_i^A, M_i^B)$:

(a) Es creciente en M_i^A y decreciente en M_i^B.

(b) Es diferenciable en cada uno de sus argumentos.

(c) Es cóncava en M_i^A y convexa en M_i^B.

(d) Cumplen condiciones de Inada en M_i^A y M_i^B.

4. El efecto que logra el partido A al aumentar su inversión en la circunscripción i en un 1% se puede anular si el partido B aumenta su inversión en α%, donde α denota una constante positiva[18].

Este supuesto puede replantearse en términos de elasticidades de la manera siguiente:

$$\epsilon_i^A(M_i^A, M_i^B) = -\alpha\epsilon_i^B(M_i^A, M_i^B) \quad i = 1, \ldots, I; \tag{5}$$

donde ϵ_i^A y ϵ_i^B representan la elasticidad-recursos de $G_i(v)$ para el partido A y el partido B respectivamente:

$$\begin{aligned} \epsilon_i^A &\equiv \frac{\partial G_i(v|M_i^A,M_i^B)}{\partial M_i^A}\frac{M_i^A}{G_i(v|M_i^A,M_i^B)}, \\ \epsilon_i^B &\equiv \frac{\partial G_i(v|M_i^A,M_i^B)}{\partial M_i^B}\frac{M_i^B}{G_i(v|M_i^A,M_i^B)}. \end{aligned}$$

---

[16]Existen otras funciones objetivo razonables, tales como maximizar la probabilidad de alcanzar cierto porcentaje de los parlamentarios elegidos. Es posible demostrar que, bajo ciertas condiciones, el objetivo anterior es asintóticamente equivalente (a medida que N tiende a infinito) al considerado en este trabajo.

[17]Una versión más general del modelo supone que G_i depende no sólo de (M_i^A, M_i^B), sino también de $(\overline{M}^A, \overline{M}^B)$. De esta manera se puede capturar que los recursos asignados se dividen entre aquellos que benefician sólo a los candidatos de un distrito determinado y aquellos que benefician a todos los candidatos del partido.

[18]La condición se cumple, en particular, si la dependencia de los G_i de M_i^A y M_i^B es sólo a través de $(M_i^A)^x/(M_i^B)^y$. En tal caso $\alpha = x/y$.

5. Los partidos deben gastar un mínimo positivo, M_{min}, en cada distrito. ▮

A partir del supuesto 2 se puede obtener una expresión explícita para la función objetivo de los partidos A y B:

Proposición 1 *Bajo los supuestos 1 y 2 la función de reacción del partido A se determina maximizando*

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{n_i} G_i\left(\frac{k}{n_i+1}|M_i^A, M_i^B\right) \tag{6}$$

sobre los valores de $M_1^A, M_2^A, \ldots, M_I^A$, que satisfacen la restricción presupuestaria $\sum_i M_i^A = \overline{M}^A$. Análogamente, la función de reacción del partido B se obtiene minimizando la expresión anterior sobre los valores de $M_1^B, M_2^B, \ldots, M_I^B$ que satisfacen la restricción presupuestaria correspondiente.

DEMOSTRACIÓN Ver el Apéndice. ▮

El carácter de juego de suma cero es aparente en la proposición anterior. También cabe destacar que la expresión no requiere que los sistemas electorales sean los mismos en todos los distritos[19].

El siguiente resultado establece la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Proposición 2 *Bajo los supuestos 1, 2, 3 (a, b y c) y 5 se tiene que existe (al menos) un equilibrio de Nash en estrategias puras.*

DEMOSTRACIÓN Es una aplicación de uno de los resultados standard sobre equilibrios de Nash (véase el Teorema 1.2 en Fudenberg y Tirole, 1993). ▮

El siguiente resultado presenta una interesante propiedad que cumplen todos los equilibrios de Nash del juego en estudio:

Proposición 3 *Bajo las hipótesis 1, 2, 3 (a, b y d) y 4 se tiene que en todo equilibrio de Nash la fracción de recursos que cada partido invierte en un distrito determinado es la misma. Es decir, $M_i^A/\overline{M}^A = M_i^B/\overline{M}^B$, $i = 1, \ldots, I$.*

[19] Aún cuando en la actualidad todos los distritos en Chile tienen sistema binominal, antes de 1973 el número de senadores y diputados que se elegía variaba de un distrito a otro.

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés

DEMOSTRACIÓN El resultado es consecuencia del supuesto 3, véase el Apéndice para detalles. ∎

La fracción de los recursos que invertirá cada partido en un distrito determinado dependerá del sistema electoral: los partidos asignarán más recursos a aquellos distritos en que los resultados esperados se encuentran en torno a valores críticos[20]. Sin embargo, el resultado anterior dice que el carácter estratégico de la interacción entre partidos lleva a que la fracción de recursos que cada uno gasta en un distrito determinado sea la misma. Así, por ejemplo, si hay dos distritos y el partido A gasta el 10% de sus recursos en el primero y el 90% de sus recursos en el segundo, entonces el partido B también gastará el 10% de sus recursos en el primer distrito y el 90% restante en el segundo.

El supuesto 4 puede relajarse de modo que la eficacia relativa de los gastos de ambos partidos varíe de un distrito a otro (α_i en el distrito i). En tal caso una demostración similar lleva a concluir que en todo equilibrio de Nash el cuociente M_i^A/M_i^B será proporcional a α_i: el partido A invierte una fracción mayor de sus recursos que el partido B en aquellas circunscripciones donde su esfuerzo se ve recompensado relativamente más.

El equilibrio de Nash de la proposición anterior resulta de suponer que ambos partidos toman sus decisiones en forma simultánea. Esto implica que ambos disponen de la misma información al momento de elegir la manera de distribuir sus recursos. Un caso igualmente interesante es cuando la acción de los partidos es secuencial. Esto implica que uno de los dos partidos —por ejemplo el partido A— tiene la posibilidad de actuar primero y con esto 'trazar el rayado', para que luego actúe el otro partido. La siguiente proposición muestra que mover primero no reporta ventaja alguna.

Proposición 4 *Bajo las hipótesis 1, 2, 3 (a, b y d) y 4 se tiene que todo equilibrio de Nash es un equilibrio de Stackelberg (donde puede mover primero cualquiera de los partidos).*

DEMOSTRACIÓN Ver el Apéndice. ∎

Pueden existir equilibrios de Stackelberg que no son de Nash, sin embargo de la proposición anterior se infiere que en estos equilibrios el número esperado de sillas es el mismo que en los equilibrios de Nash. Más aún, es fácil adaptar la demostración de la Proposición 3 para mostrar que el resultado de proporcionalidad en la asignación de recursos también es válido para todo

[20] Véase la sección 2 para la definición de este concepto. Con la formulación rigurosa de esta sección es aparente que las circunscripciones con resultados esperados cercanos a valores críticos y la distribución de recursos entre distritos se determinan simultánea y no secuencialmente.

equilibrio de Stackelberg (aún si este no es equilibrio de Nash).

El sistema electoral de D'Hont es criticado por su falta de proporcionalidad en los resultados. Esta crítica es válida cuando las sillas parlamentarias en disputa son pocas. Pero a medida que crece el número de representates locales dentro del Congreso crece también la proporcionalidad de este sistema. La proposición siguiente formaliza esta idea.

Proposición 5 *Suponemos que se cumplen los supuestos 1, 2, 3 (a, b, d) y 4. Denotamos mediante* Q *el conjunto de los equilibrios de Nash que se obtienen cuando cada partido maximiza su votación total esperada (sistema proporcional). Denotamos mediante* ρ_i *la fracción de votantes en el distrito i y consideramos I sucesiones* $(n_{ik})_{k\geq 1}$, $i = 1, \ldots, I$, *con* $N_k \equiv \sum_i n_{ik}$. *Cada una de estas sucesiones tiende a infinito a medida que k tiende a infinito, de manera tal que* n_{ik}/N_k *converge a* ρ_i; $i = 1, \ldots, I$. *Sea* q_k *algún equilibrio de Nash asociado al juego correspondiente a* $(n_{ik})_{i=1,\ldots,I}$. *Entonces la sucesión* $(q_k)_{k\geq 1}$ *converge al conjunto* Q.

DEMOSTRACIÓN Ver apéndice. ∎

4 Estimación

Para observar el real comportamiento de los partidos se hace necesario un análisis econométrico de la información disponible. Los datos relevantes para este modelo son por un lado el tamaño de las distintas campañas electorales y por otro el resultado de las votaciones en cada distrito. Hay que notar que el primer set de datos —el tamaño de las campañas— es difícil de medir ya que los candidatos tienen claros incentivos para esconder esta información; en varios paises estos incentivos suelen estar asociados a leyes que norman el financiamiento y costo de las campañas. Por otro lado países como EEUU —donde existe información detallada del tamaño de las campañas— no cumplen con el requisito de tener partidos centralizados que tengan ingerencia significativa en las campañas locales. Por lo tanto el estudio empírico debe basarse sólo en el conocimento del segundo set —el resultado final de las votaciones—. Con tal objeto en la sección 4.1 se plantea y estima un modelo que corresponde a un caso particular de los modelos estudiados en la sección 3. Al estimar el modelo se concluye que la derecha optimiza, mientras que la concertación no lo hace. Esta conclusión se ve corroborada en la sección 4.2 utilizando un test menos estructural pero más robusto, basado en intuiciones similares a aquellas de la sección 2.

Universidad de San Andrés

4.1 Modelo Estructural

Las observaciones que se utilizarán en el análisis empírico –votación de ambas coaliciones en cada distrito– toman valores entre 0 y el número total de votantes en el distrito. Con objeto de postular un modelo con términos de error normal, se trabaja con la transformación logit de las fracciones de los votos obtenidos por ambos partidos: $l_{i,t} \equiv \log \frac{v^A_{i,t}}{1-v^A_{i,t}}$, donde $v^A_{i,t}$ denota la fracción que obtuvo el partido A en la $i^{ésima}$ circunscripción para las elecciones del periodo t. Además $M^A_{i,t}$ indica el esfuerzo de este partido dirigido a ese distrito denotamos $m^A_{i,t} \equiv \log M^A_{i,t}$ y $m^B_{i,t} \equiv \log M^B_{i,t}$.

Para determinar la racionalidad de las estrategias empleadas por los partidos se considera el siguiente modelo:

$$l_{i,t} = l_{i,t-1} + \frac{\alpha}{\mathrm{Pob}_i^\gamma}(m^A_{i,t} - \delta m^A_{i,t-1}) - \frac{\beta}{\mathrm{Pob}_i^\gamma}(m^B_{i,t} - \delta m^B_{i,t-1}) + \mu_t + e_{i,t}.$$

donde:

- $t = 1988$ (plebiscito), 1989 y 1993. Además $t-1$ denota el año de la elección anterior.
- $i = 1, \ldots, 60$: indica las distintas circunscripciones electorales que eligen diputados.
- El parámetro γ, que por simplicidad suponemos común a ambos partidos, captura la efectividad del gasto electoral como función del número de electores en un distrito; Pob_i denota el número de votantes del distrito i. Suponemos $\gamma \geq 0$, por lo cual la efectividad de los recursos gastados sobre la fracción de votos obtenidos decrece con el número de electores en el distrito, salvo en el caso $\gamma = 0$ en que esta efectividad no depende del número de electores. Si $\gamma < 1$ tenemos que hay retornos crecientes al gasto de los partidos.
- $\alpha/\mathrm{Pob}_i^\gamma$ es la elasticidad de l_i respecto al gasto del partido A en el distrito i.
- $-\beta/\mathrm{Pob}_i^\gamma$ es la elasticidad de l_i respecto al gasto del partido B en el distrito i.
- El parámetro δ, que toma valores entre 0 y 1 y que suponemos igual para ambos partidos, captura en qué medida el gasto en elecciones anteriores afecta la votación en la elección corriente. Así, por ejemplo, si los efectos del gasto en la elección anterior son permanentes, entonces $\delta = 0$; en cambio, si estos se disipan por completo, se tiene $\delta = 1$.
- $e_{i,t}$: shock aleatorio independiente del tamaño de la campaña. Se tiene que $e_{i,t} \rightsquigarrow \mathrm{N}(\mu_t, \sigma^2)$ independientes entre si, donde por simplicidad asumimos las varianzas iguales.

Al estimar el modelo anterior se distinguen los siguientes escenarios posibles:

Ambos partidos se comportan estratégicamente: En este caso al estimar los estadísticos máximo-verosímiles se supone que los partidos realizan sus estrategias de equilibrio, las cuales son únicas dadas las formas funcionales consideradas. De esta forma los parámetros que rigen la distribución del vector aleatorio

$$(l_{1,1989}, l_{2,1989}, \ldots, l_{60,1989}, l_{1,993}, \ldots, l_{60,1993}),$$

condicional en los resultados del plebiscito de 1988, se reducen drásticamente. La razón es que en principio los parámetros a estimar son[21]:

$$\alpha, \beta, \mu_t, \sigma, \delta, \gamma, M_{i,t}^A, M_{i,t}^B, \quad i = 1, \ldots, 60; t = 1989, 1993,$$

que suman 247 parámetros. Sin embargo al considerar el equilibrio se tiene que los únicos parámetros son:

$$\overline{M}_t^A, \overline{M}_t^B, \alpha, \beta, \mu_t, \delta, \gamma, \sigma,$$

lo que reduce el número de parámetros a estimar a 11.

Sólo un partido se comporta estratégicamente: En este caso se procede exactamente igual que en el punto anterior, excepto que el partido B no aplica una estrategia óptima sino que distribuye sus recursos en forma pareja ($m_{i,t}^B = m_{j,t}^B$) mientras el partido A distribuye en forma óptima tomando en cuenta la estrategia aplicada por el otro partido. La estrategia subóptima del partido B podría deberse, por ejemplo, al que para evitar favoritismos (por parte de la dirigencia de la coalición, respecto de los candidatos) se asigna los recursos de manera equitativa (proporcional al número de asientos en cada distrito).

Ningún partido se comporta estratégicamente: En este caso se supone que ambos partidos gastan por igual en todos los distritos. Para efectos de encontrar el estadístico máximo verosímil se puede reducir la ecuación a

$$l_{i,t} = l_{i,t-1} + \mu + e_{i,t}.$$

Se tiene que este último escenario constituye un problema anidado en los problemas anteriores (figura 3). En otras palabras se trata de un caso particular tanto del problema en que ambos partidos se comportan estratégicamente como del problema en que sólo un partido, ya sea el partido A o el B, desarrollan una estrategia optimizante. Lo anterior se comprueba al considerar los parámetros $\alpha = \beta = 0$. Por lo tanto se puede entender la significancia de los distintos comportamientos estratégicos como la significancia que tiene agregar parámetros adicionales al

[21]Por simplicidad estamos suponiendo que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y σ no varían de una elección a otra.

Universidad de San Andrés

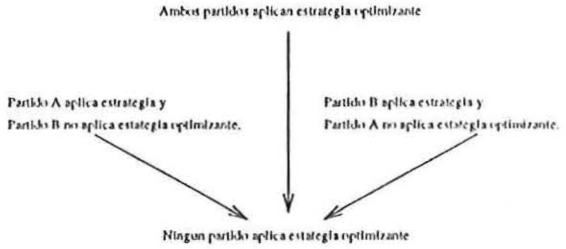

Figura 3: Diagrama de anidación de modelos.

modelo en que no existe comportamiento estratégico (hipótesis nula). A pesar de tener que el escenario de no-estrategias esta anidado tanto en el escenario en que sólo uno maximiza como en el escenario en que ambos maximizan, no se tiene ninguna relación de inclusión entre estos dos últimos modelos.

Al considerar los cuatro escenarios descritos, se maximiza la función de verosimilitud en cada uno de estos casos. La alta no-linealidad de la función de verosimilitud y el hecho que evaluarla requiere determinar un equilibrio de Nash, hace que la estimación de los 11 parámetros del modelo sea infactible en la prácitca. Por este motivo, se impone una serie de restricciones con el fin de disminuir el número de parámetros a estimar. La idea es seleccionar los mejores escenarios, para luego relajar algunas de las restricciones y estimar un número mayor de parámetros sólo en esos casos. Las restricciones empleadas inicialmente son las siguientes:

- Los cambios de tendencia μ_t se estiman mediante $\widehat{\mu}_t \equiv l_{\cdot,t} - l_{\cdot,t-1}$. Es decir, $\widehat{\mu}_t$ es igual al *verdadero* cambio tendencial (expectativas racionales en caso sin incertidumbre).
- El total de recursos del partido A se toma como numerario:
$$\overline{M}^A_{88} = \overline{M}^A_{89} = \overline{M}^A_{93} = 10.$$
A pesar que este problema es altamente no-lineal (y no homogéneo) se tiene que fijar los valores de $\overline{M}^A_t$ en un nivel distinto de 10 no produce ningún cambio significativo en los resultados obtenidos[22].
- Se supone $\alpha = \beta$. El supuesto anterior se hace porque con los grados de libertad disponibles es difícil distinguir una diferencia entre α y β de una diferencia entre $\overline{M}^A_t$

[22]Nótese que en el caso en que $\alpha = \beta$ se tiene que los parámetros α y $\overline{M}^A$ no están identificados por separado. Lo mismo sucede con β y $\overline{M}^B$.

Logaritmo de la Máxima Verosimilitud			
	Comportamiento Estratégico		
Caso	Concertación	Derecha	LOG. VEROS.
1	NO	NO	-52.25
	SI	NO	—
	NO	SI	-48.68
	SI	SI	—
2	NO	NO	-52.25
	SI	NO	—
	NO	SI	—
	SI	SI	—
3	NO	NO	-52.25
	SI	NO	—
	NO	SI	-47.06
	SI	SI	—
4	NO	NO	-52.25
	SI	NO	—
	NO	SI	-50.12
	SI	SI	—

Tabla 1: Estimación Estructural: Escenarios para γ y δ

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés

y $\overline{M}_t^B$. Es decir, el partido A se ve igualmente beneficiado con un aumento de α (sus recursos son mejor empleados) que con un aumento de $\overline{M}_t^A$ (obtiene más recursos).

Dadas estas restricciones se toman cuatro casos extremos para los valores de γ y δ:

1. $\gamma = 0$ y $\delta = 1$,
2. $\gamma = 1$ y $\delta = 1$,
3. $\gamma = 0$ y $\delta = 0$,
4. $\gamma = 1$ y $\delta = 0$.

Al maximizar la función de verosimilitud bajo los supuestos anteriores, se obtienen los resultados de la tabla 1. En esta tabla, la primera columna indica el caso relacionado a los valores de γ y

δ, la segunda y tercera columnas establecen si los partidos están o no optimizando y la última entrega el valor máximo de la función de verosimilitud. En esta última columna no se escribe el valor de la función en los casos en que el modelo estimado se reduce al primero[23]. Las mejores verosimilitudes se obtienen en los casos 1 y 3, por lo cual en lo que sigue se asume que $\gamma = 0$. Para los casos en que $\delta = 0$ y $\delta = 1$ se estima modelos con un mayor número de parámetros que aquellos en la Tabla 1. Los modelos que se estiman son los siguientes:

1. $M_{88}^A = M_{89}^A = M_{93}^A = 10$
   $$\left.\begin{array}{l} M_{88}^B = M_{89}^B = M_{93}^B = M \\ \alpha = \beta \\ \sigma \end{array}\right\} \text{3 parámetros}$$
2. Igual que en 1, pero con $\alpha \neq \beta$ (4 parámetros)
3. Como en 1, con M_{88}^B libre, $M_{89}^B = M_{93}^B = M$ (4 parámetros)
4. Como en 1, con $M_{88}^B, M_{89}^B, M_{93}^B$ libres (5 parámetros)
5. Como en 3, con $\alpha \neq \beta$ (5 parámetros)
6. Como en 4, con $\alpha \neq \beta$ (6 parámetros).

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 2, la cual no muestra los resultados cuando éstos no cambian en relación al modelo precedente (en la misma fila en el caso de modelos que no están en la primera columna; en la misma columna en el caso de modelos de la primera columna).

En primer lugar cabe observar que las mejores verosimilitudes se obtienen cuando $\delta = 0$; este caso domina –para los 6 modelos y las 4 combinaciones de comportamientos estratégicos– al caso $\delta = 1$. Luego nos centramos en ese caso. La Tabla 2 muestra que no se obtienen mejoras significativas al pasar del modelo 1 a alguno de los restantes 5 modelos. Por eso consideramos sólo el modelo 1. Para este modelo se tiene que se puede rechazar el caso en que ambos partidos no optimizan en favor del caso en que sólo la derecha actúa estratégicamente; usando un test de razón de verosimilitud se obtiene un rechazo con un nivel de significancia del 99.4%.

Como no existe anidación entre el supuesto en que sólo la Derecha máximiza y los demás supuestos en que existen estrategias, se aplica el Criterio de Selección Bayesiano (BIC) para

[23]Nótese que, debido al supuesto que hemos hecho respecto de cómo los partidos asignan sus recursos cuando no actúan estratégicamente, los valores de la función de verosimilitud en estos casos no dependen de γ y δ.

Universidad de San Andrés

UNIVERSIDAD DE SAN ANDRES
BIBLIOTECA

Logaritmo de la Máxima Verosimilitud								
	Comportamiento Estratégico		Modelo					
δ	Concertación	Derecha	1	2	3	4	5	6
1	NO	NO	−52.25	—	—	—	—	—
	SI	NO	—	—	—	—	—	—
	NO	SI	−48.73	—	−48.68	−48.57	−48.68	−48.57
	SI	SI	—	—	—	—	—	—
0	NO	NO	−52.25	—	—	—	—	—
	SI	NO	—	—	—	—	—	—
	NO	SI	−47.06	—	—	−46.94	—	−46.94
	SI	SI	—	—	—	—	—	—

Tabla 2: Estimaciones Estructurales de M, $\alpha = \beta$ y σ.

Concertación optimiza	Derecha optimiza	BIC
NO	NO	214.17
SI	NO	223.74
NO	SI	193.03
SI	SI	223.74

Tabla 3: Criterio de Información Bayesiana.

QUAERERE VERUM
Universidad de San Andrés

comparar modelos no anidados[24]. Se vuelve a observar que el mejor modelo es aquel en que sólo la Derecha optimiza (ver Tabla 3).

El valor de las estimaciones para este caso son:

- $M^{\text{Derecha}} = 9.9$,
- $\sigma = 0.36$,
- $\alpha = \beta = 0.41$,

con las desviaciones estándar siguientes:

- desviación de $M^{\text{Derecha}} = 0.47$.

[24] Ver Geweke y Meese (1982). Este criterio provee una función de penalización por el número de parámetros de los distintos modelos que lleva a propiedades asintóticas deseables.

- desviación de $\sigma = 0.02$.
- desviación de α y $\beta = 0.162$.

Se concluye que la estimación estructural del modelo indica que la coalición de derecha actúa estratégicamente mientras que la Concertación no lo hace. A continuación vemos hasta qué punto esta conclusión es consistente con el enfoque menos estructural utilizado en la sección 2.

4.2 Corroboración

Para comprobar el resultado de la sección anterior, se genera un test de significancia pura que discrimina el caso en que sólo uno de los partidos optimiza. Usando la misma nomenclatura de la sección 2, se define

$$\mathcal{V}_C \equiv \{i \ : \ d_i \text{ se encuentra en el cuartil más bajo}\},$$

$$\mathcal{V}_L \equiv \{i \ : \ d_i \text{ se encuentra en el cuartil más alto}\}.$$

En palabras, el conjunto $\mathcal{V}_C$ corresponde a aquellos distritos más cercanos a valores críticos (es decir, donde más conviene aumentar la votación). Por otro lado el conjunto $\mathcal{V}_L$ corresponde a los distritos más alejados de un valor crítico.

En función de estos conjuntos se define el estadístico

$$T^A \equiv (\text{fracción de distritos en } \mathcal{V}_C \text{ con } e_i > 0) + (\text{fracción de distritos en } \mathcal{V}_L \text{ con } e_i < 0). \quad (7)$$

Nótese que $T^A \in [0, 2]$ y que bajo la hipótesis nula (falta de comportamineto estratégico) se debiera esperar que tanto el primer como segundo sumando de T^A valga alrededor de 0.5, obteniendo así un valor T^A cercano a 1. Un T^A significativamente mayor que 1 indica que la coalición de Derecha fue más eficiente en la asignación de recursos, pues ganó un mayor número de distritos que se presumían cercanos a valores críticos que la Concertación. Por otra parte, valores de T^A menores que 1 indican que la Concertación fue más eficiente[25].

En las Figuras 4 y 5 se observa que para distritos 'críticos' la Derecha obtuvo típicamente más votos que los proyectados mientras que la Concertación obtuvo menos votos de los proyectados. La situación se revierte en distritos alejados de valores críticos. Lo anterior se ve corroborado

[25] Esto último se percibe mejor al considerar el problema desde la óptica del partido B, definiendo T^B en forma analoga a T^A. Es fácil mostrar que $T^A + T^B = 2$ por lo que un bajo valor de T^A es consistente con un alto valor de T^B.

Universidad de San Andrés

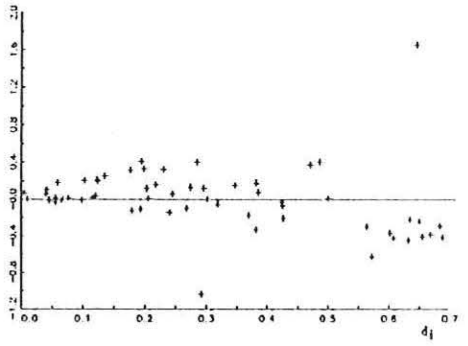

Figura 4: d_i vs e_i para la elección de 1989.

por el hecho que $T_{89}^{A} = 1.25$ y $T_{93}^{A} = 1.40$[26]. Estos resultados indican que la Derecha aplica una mejor estrategia que La Concertación. Para medir la significancia estadística de esta aseveración se generan las distribuciones de T_{89}^{A} y T_{93}^{A} bajo la hipótesis nula de ninguna estrategia por parte de ambos partidos[27]. Los p-values correspondientes resultan ser 0.080 y 0.008, respectivamente. Por lo tanto se rechaza la hipótesis nula.

Universidad de SanAndrés

5 Consecuencias

En esta sección aplicamos el modelo estimado al final de la sección 4.1 para responder varias preguntas. En primer lugar se tiene que el costo que ha tenido para la Concertación no actuar de manera estratégica es bajo. Si también hubiese asignado sus recursos estratégicamente habría obtenido, en valor esperado, 1.1 diputados adicionales en 1989 y 0.8 diputados adicionales en 1993. El bajo costo de no actuar estratégicamente se debe a que en las dos elecciones la estrategia óptima de la Concertación no difiere marcadamente de repartir sus recursos uniformemente

[26]Si se trabaja con la transformación logit se obtiene 1.25 y 1.35, respectivamente.

[27]Al igual que en la sección 2, estas distribuciones se generaron usando el método bootstrap. El número de muestras bootstrap generado es 3,000.

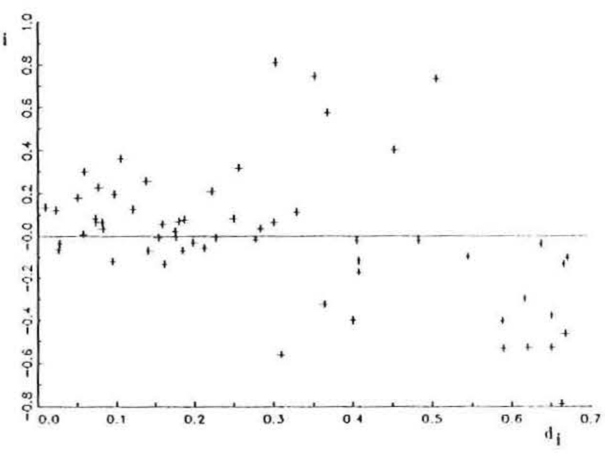

Figura 5: d_i vs e_i para la elección de 1993.

entre todos los distritos. Esta situación no tendría por qué repetirse en el futuro (para un caso concreto, véase más abajo).

Los resultados anteriores posiblemente subestimen el costo que tiene para la Concertación no haber asignado sus recursos eficientemente. En la sección 4 la falta de datos obligó a estimar menos de la mitad de los parámetros del modelo. Con objeto de dar una idea de la medida en que se está subestimando el efecto anterior, adaptamos el enfoque 'semiestructural' de la sección 2 para estimar los resultados que hubiesen acaecido en escenarios contrafactuales.

Consideramos la situación en que es la Derecha la que no optimiza y la Concertación asigna eficientemente sus recursos. En tal caso podemos obtener una aproximación a cuál hubiese sido el número de diputados elegidos por cada coalición, invirtiendo el signo de los $\widehat{e}_{it}$ calculados en (4) y determinando cuál hubiese sido el resultado en tal caso. Procediendo de esta manera se concluye que la Concertación hubiese elegido 13 diputados más en 1989 y 11 diputados adicionales en 1993. Estas cifras se deben comparar con las que se obtienen si se emplea el modelo estructural estimado en la sección 4.1: 4.8 diputados en ambos casos.

A continuación vemos cómo habrían variado el número de diputados elegidos por ambas coaliciones si el sistema hubiese sido uninominal o trinominal en lugar de binominal (ver Tabla 4).

QUAERERE VERUM Universidad de SanAndrés

Año	Sistema Uninominal	Sistema Trinominal
1989	10.8	−0.5
1993	13.6	−0.1

Tabla 4: Valor Esperado Diputados Adicionales Elegidos por la Concertación

siempre suponiendo que sólo la Derecha optimiza. Aquí se observa que con un sistema uninominal (como el que tiene Inglaterra) la Concertación elegiría un número considerablemente mayor de diputados (en promedio alrededor de 12 diputados más). En cambio con un sistema trinominal –los resultados son similares si se elige más de tres diputados por distrito – el número de diputados que eligen ambas coaliciones no varía de manera importante[28].

Varios países restringen las contribuciones que pueden hacer las personas y las empresas a las campañas electorales, contemplan criterios para asignar financiamiento estatal a los partidos y obligan a hacer públicos los nombres de quienes contribuyen a los partidos.

En Chile no existe una legislación que regule el gasto de los partidos políticos. El Congreso ha discutido proyectos de ley sobre este tema en varias oportunidades, pero la oposición (particularmente la UDI) se ha opuesto a legislar sobre el tema. Lo anterior posiblemente indique que la Concertación se beneficiaría (y la Derecha se vería perjudicada) si se aprobara una ley de Financiamiento Electoral. Esto motiva utilizar el modelo estimado en la sección 4.1 para determinar cuántos diputados adicionales elegiría la Concertación en 1997 si aumentaran los recursos de que dispone para financiar su campaña[29]. La Tabla 5 muestra los valores esperados correspondientes para distintos escenarios. Estas tablas permiten concluir que si los recursos que recibe la Concertación aumentan en un 50%, ésta espera obtener alrededor de 8 diputados adicionales; si se duplican, el número adicional de diputados se haya entre 13 y 14[30].

[28]Cabe notar que, en el caso uninominal, el costo que tiene para la Concertación no optimizar su asignación de recursos es mucho mayor que en el caso binominal. En efecto, si ambas coaliciones hubiesen actuado estratégicamente, en promedio la Concertación hubiese obtenido 9.7 diputados adicionales en cada una de las elecciones de la Cámara Baja.

[29]Suponemos que no hay cambio en la votación promedio de ambas coaliciones.

[30]La situación anterior se revierte si la Derecha aumenta sus recursos, aunque el beneficio asociado es algo menor.

Universidad de San Andrés

Número Esperado de Diputados Adicionales Para La Concertación en la Elección de 1997.							
Comportamiento Estratégico		Aumento de Recursos: Concertación					
Concertación	Derecha	10%	20%	30%	50%	75%	100%
NO	SI	1.7	3.4	4.8	7.6	10.4	13.3
SI	SI	1.8	3.6	5.2	8.2	11.4	14.0

Tabla 5: Resultados ante un Aumento de los Recursos de la Concertación.

6 Conclusión

Este trabajo comienza por presentar evidencia 'semiestructural' que al menos una de las coaliciones de partidos políticos chilenos actuó de manera estratégica en las elecciones parlamentarias de 1989 y 1993[31]. A continuación se construye un modelo formal en que dos coaliciones asignan sus recursos de manera eficiente en las distintas campañas que se desarrollan en paralelo durante una elección parlamentaria. Se presentan una serie de resultados para este modelo, en particular, se determinan condiciones bajo las cuales a pesar que la fracción de los recursos que un partido gasta en una campaña puede variar mucho de un distrito a otro, ambos partidos gastarán la misma fracción de sus recursos en cada distrito. Testear la validez de estos resultados y con ello la validez del modelo, requiere tener información acerca del gasto de los partidos en las distintas campañas electorales, información que desgraciadamente no está disponible. Por este motivo se estima algunos de los parámetros del modelo propuesto, dejando abierta la posibilidad que ambos, sólo una o ninguna de las coaliciones actúe estratégicamente. Se concluye que la coalición de Derecha asignó de manera más eficiente sus recursos que la Concertación. Esta conclusión se ve corroborada por evidencia semiestructural.

El modelo estimado indica que el costo que tiene para la Concertación no asignar sus recursos óptimamente es bajo. Sin embargo, se presenta evidencia a partir del enfoque semiestructural que indica que la magnitud anterior podría estar subestimada, debido a las simplificaciones necesarias para estimar versiones estructurales del modelo.

Finalmente se muestra que el impacto que tendría incrementar los fondos de que dispone la Concertación para las elecciones parlamentarias de 1997 sería importante: un incremento de los recursos disponibles en un 50% se traduciría en la elección de 8 diputados adicionales.

El modelo de este trabajo deja fuera varios aspectos que posiblemente sean relevantes. Uno de

[31] La palabra 'semiestructural' se usa en el sentido que no hay un modelo formal subyacente.

Universidad de SanAndrés

ellos es que en la realidad la asignación de recursos durante una elección parlamentaria no se efectúa de una vez sino que se va realizando de manera parcelando a lo largo de la campaña. Incorporar este aspecto lleva a un problema de teoría de juego bastante más complejo que aquel considerado en este trabajo. Más aún, si un modelo de este tipo fuera desarrollado, llevarlo a los datos sería prácticamente imposible, dadas las limitaciones de información.

El marco conceptual de este trabajo también se puede aplicar al caso de una elección presidencial como la de los Estados Unidos, la cual se compone de 50 elecciones simultáneas –una en cada estado–, ya que el candidato que gana un estado se lleva todos los votos electorales correspondientes a ese estado. Esperamos adaptar el enfoque de este trabajo a este problema en un futuro cercano. Particularmente promisiorio es el hecho que en este caso existe información respecto del gasto de las campañas presidenciales en cada estado, de modo que se pueden testear las predicciones del modelo directamente.

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés

Apendice

Demostración de Proposición 1.

Por la linealidad de la esperanza se tiene que el problema de maximización de los partidos es equivalente a:

Partido A	Partido B
$\max\limits_{M_1^A,\dots,M_N^A} \sum\limits_{i=1}^{N} I\!E(S_i \mid M_i^A, M_i^B)$	$\min\limits_{M_1^B,\dots,M_N^B} \sum\limits_{i=1}^{N} I\!E(S_i \mid M_i^A, M_i^B)$
$s.a. \sum\limits_{i=1}^{N} M_i^A = M^A$	$s.a \sum\limits_{i=1}^{N} M_i^B = M^B$
$M_i^A \geq 0.$	$M_i^B \geq 0.$

Como en la $i^{ésima}$ circunscripción se utiliza el sistema n_i-nominal (o método D'Hont) se tiene que la adquisición de sillas para el partido A segirá la regla siguiente:

$$S_i^A = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq v_i^A \leq \frac{1}{n_i+1}, \\ 1 & si \quad \frac{1}{n_i+1} < v_i^A \leq \frac{2}{n_i+1}, \\ \vdots & \\ n_i & si \quad \frac{n_i}{n_i+1} < v_i^A \leq 1. \end{cases}$$

Por lo tanto se tiene que

$$I\!P[S_i > k] = G_i(\tfrac{k+1}{n_i+1}).$$

La identidad anterior unida al hecho que S_i es una variable aleatoria positiva implica la identidad siguiente:

$$\begin{aligned} I\!E(S_i \mid M_i^A, M_i^B) &= \sum_{k=0}^{n_i-1} I\!P[S_i > k] \\ &= \sum_{k=1}^{n_i} G_i(\tfrac{k}{n_i+1} \mid M_i^A, M_i^B). \end{aligned}$$

Universidad de San Andrés

Por lo tanto cada partido resuelve el problema siguiente:

Partido A	Partido B
$\max\limits_{M_1^A,\ldots,M_N^A} \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n_i} G_i(\frac{k}{n_i+1}\|M_i^A, M_i^B)$	$\min\limits_{M_1^B,\ldots,M_N^B} \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n_i} G_i(\frac{k}{n_i+1}\|M_i^A, M_i^B)$
$s.a. \sum_{i=1}^{N} M_i^A = M^A,$	$s.a \sum_{i=1}^{N} M_i^B = M^B,$
$M_i^A \geq 0.$	$M_i^B \geq 0.$ ∎

Demostración de Proposición 3.

Aplicando las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker se tiene que cada partido organiza su inversión cumpliendo con las reglas siguientes:

Partido A	Partido B
$\frac{\partial \sum_{k=1}^{n_i} G_i(\frac{k}{n_i+1}\|M_i^A, M_i^B)}{\partial M_i^A} = \lambda^A - \mu_i^A,$	$\frac{\partial \sum_{k=1}^{n_i} G_i(\frac{k}{n_i+1}\|M_i^A, M_i^B)}{\partial M_i^B} = -\lambda^B + \mu_i^B,$
$\sum_{i=1}^{N} M_i^A = M^A,$	$\sum_{i}^{N} M_i^B = M^B,$
$M_i^A \cdot \mu_i^A = 0,$	$M_i^B \cdot \mu_i^B = 0,$
$\mu_1^A, \ldots, \mu_N^A, \lambda^A \geq 0.$	$\mu_1^B, \ldots, \mu_N^B, \lambda^A \geq 0.$

La solución a este problema es interior, es decir, en toda circunscripción i se tiene que $M_i^A, M_i^B > 0$. Para ver este hecho basta notar que de existir una circunscripción donde $M_i^A = 0$ entonces se tendría que $\frac{\partial F_i(\cdot)}{\partial M_i^A} = \infty$ (condiciones de Inada).

Utilizando el supuesto 4. el sistema anterior se reduce a:

Partido A	Partido B
$\frac{\partial \sum_{k=1}^{n_i} G_i(\frac{k}{n_i+1}\|M_i^A, M_i^B)}{\partial M_i^A} = \lambda^A,$	$\frac{\partial \sum_{k=1}^{n_i} G_i(\frac{k}{n_i+1}\|M_i^A, M_i^B)}{\partial M_i^A} \frac{M_i^A}{M_i^B} = \alpha\lambda^B,$
$\sum_{i=1}^{N} M_i^A = M^A,$	$\sum_{i=1}^{N} M_i^B = M^B,$
$M_i^A > 0,$	$M_i^B > 0,$
$\lambda^A \geq 0.$	$\lambda^B \geq 0.$

QUAERERE VERUM
Universidad de
San Andrés

Dividiendo las dos ecuaciones de la primera fila se tiene que

$$\frac{M_i^A}{M_i^B} = \alpha \frac{\lambda^B}{\lambda^A} \quad i = 1, \ldots, N. \tag{8}$$

Por lo tanto

$$\frac{M_i^A}{M_i^B} = \frac{M^A}{M^B}; \quad i = 1, \ldots, N \quad \blacksquare$$

Demostración de Proposición 4.

Se tiene que este resultado es aplicable a cualquier juego de suma cero con dos participantes. Con objeto de demostrar el resultado más general introducimos la siguiente notación:

- $S_1 \equiv$ set de estrategias de jugador 1.
- $S_2 \equiv$ set de estrategias de jugador 2.
- $B \equiv$ tamaño de premio a repartir.
- $B_1 \equiv$ beneficio del jugador 1.
- $B_2 \equiv$ beneficio del jugador 2 $(= B - B_1)$.

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés

Por lo tanto los objetivos de ambos jugadores son:

Jugador 1	Jugador 2
$\max_{s_1 \in S_1} B_1$	$\min_{s_2 \in S_2} B_1$

Se define una *función de reacción* del jugador 2 como

$$s_2^r(s_1) \in \{s_2 \in S_2 \mid B_2(s_1, s_2^r(s_1)) \geq B_2(s_1, s) \ \ \forall s \in S_2\}.$$

Análogamente se define la función de reación del jugador 1, la cual se denota mediante $s_1^r(s_2)$.

Sea (s_1^*, s_2^*) un equilibrio de Nash, se demostrará que también es un equilibrio de Stackelberg. Para ello basta demostrar que

$$B_1(s_1^*, s_2^*) \geq B_1(s, s_2^r(s)) \ \forall \, s \in S_1.$$

Se tiene que para cualquier $s \in S_1$ se cumple que

$$B_2(s, s_2^r(s)) \geq B_1(s, s_2^*)$$

lo que —por tratarse de un juego de suma cero— es equivalente a

$$B_1(s, s_2^r(s)) \leq B_1(s, s_2^*).$$

Pero por definición de equilibrio de Nash se tiene que

$$B_1(s_1, s_2^*) \leq B_1(s_1^*, s_2^*).$$

Juntando las dos últimas desigualdades se tiene que

$$B_1(s_1, s_2^r(s_1)) \leq B_1(s_1^*, s_2^*).$$

Como $s_2^* = s_2^r(s_1^*)$, se obtiene:

$$B_1(s_1, s_2^r(s_1)) \leq B_1(s_1^*, s_2^r(s_1^*)). \quad \blacksquare$$

Demostración de Proposición 5.

Es facil demostrar que, dado un set de estrategias, la proporción esperada de sillas (para cada partido en cada distrito) converge a la votación esperada en el distrito correspondiente.

Es más, se demuestra que esta convergencia es uniforme en relación a las estrategias. Para ello se define por v^A la proporción esperada de votos para el partido A y por $\mathcal{S}_k$ el número esperado de sillas para el mismo partido (en la k-ésima iteración). Entocés se muestra que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{N_k}I\!E(S_k) - I\!E(v^A)\right| &\leq \sum_{i=1}^{I}\left|\frac{1}{N_k}I\!E(S_{i,k}) - \rho_i I\!E(v_i^A)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{I}\rho_i\left|\sum_{k=1}^{n_{i,k}}\frac{1}{\rho_i N_k}\left(G\left(\frac{k}{n_{i,k}+1}\right)\right) - \int_0^1 (G(x))\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{N_k} \\
&= \frac{I}{2N_k}.
\end{aligned}$$

Universidad de San Andrés

Para efectos de esta demostración se redefinen los equilibrios de Nash como sigue:

$$q_k = (x_k, y_k),$$

donde x_k es la estrategia empleada por el partido A $(= M^A_{1,k}, \ldots, M^A_{I,k})$ e y es la estrategia empleada por el partido B $(= M^B_{1,k}, \ldots, M^B_{I,k})$.

La demostración se hace por contradicción. Supongamos que existe una subsucesión de equilibrios $(= (x_k, y_k))$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x^*, y^*) \notin Q.$$

Se tiene que q^* no es equilibrio de Nash bajo el sistema proporcional, por lo tanto se cumple una de las siguientes proposiciones:

- $\exists \hat{x}$ tq $\mathbb{E}(v^A|\hat{x}, y^*) > \mathbb{E}(v^A|x^*, y^*)$,
- $\exists \hat{y}$ tq $\mathbb{E}(v^A|x^*, \hat{y}) < \mathbb{E}(v^A|x^*, y^*)$.

Supongamos que se cumple la primera desigualdad (es análogo para el otro caso).

Sea $\delta = (\mathbb{E}(v^A|\hat{x}, y^*) - \mathbb{E}(v^A|x^*, y^*))$, por convergencia uniforme se tiene que existe $\overline{k}_1$ tal que

$$\forall k > \overline{k}_1 \, \forall (x, y) \ \ |\mathbb{E}(\frac{1}{N_k} S_k|x, y) - \mathbb{E}(v^A|x, y)| < \frac{\delta}{4}.$$

Como $\mathbb{E}(v^A|x, y)$ es continua en (x, y) se tiene que existe $\overline{k}_2$ y $\overline{k}_3$ tales que

$$\forall k > \overline{k}_2 \ \ \mathbb{E}(v^A|x_k, y_k) < \mathbb{E}(v^A|x^*, y^*) + \frac{\delta}{4},$$

$$\forall k > \overline{k}_3 \ \ \mathbb{E}(v^A|\hat{x}, y_k) > \mathbb{E}(v^A|\hat{x}, y^*) - \frac{\delta}{4}.$$

Estas desigualdades implican que para todo $n > \max(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3)$ se tiene

$$\mathbb{E}(\frac{1}{N_k} S_k|x_k, y_k) \ < \ \mathbb{E}(\frac{1}{N_k} S_k|\hat{x}, y^*),$$

lo que contradice el hecho que (x_k, y_k) es un equilibrio de Nash bajo el sistema n_k-nominal. ∎

QUAERERE VERUM
Universidad de San Andrés

REFERENCIAS

1. Cox, D. R., y D. V. Hinkley. 1974. *Theoretical Statistics*, Londres: Chapman and Hall.

2. Downs, A. 1957. *An Economic Theory of Democracy*. New York: Harper Press.

3. Efron, B. y R. Tibshirani. 1986. "Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy", *Statistical Science*, **1**, 927–953.

4. Fudenberg, D., y J. Tirole. 1993. *Game Theory*. Cambridge Mass.: MIT Press.

5. Geweke, J., y R. Meese. 1981. "Estimating regression models of finite but unknown order", *International Journal of Forecasting*, **4**, 55–70.

6. Kuipers, L. y H. Niederreiter. 1974. *Uniform Distribution of Sequences*. New York: Wiley. item Levitt, Steven D. 1995."The impact of federal spending on House election outcomes." Working paper series (NBER) no. 5002. Cambridge, MA.

7. Lewis-Beck, M. 1990. *Economics and Elections*. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press.

8. Siavelis, P. 1993. "Nuevos argumentos viejos supuestos: simulaciones de sistemas electorales para elecciones parlmentarias en Chile". *Estudios Públicos*, **51**, 229–269.

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés