Universidad de SanAndrés

Departamento de Economía

Trabajo de Graduación

El Dilema de la Diferencia entre Retornos: Una Subestimación de Eventos Económicos Adversos

Alumno: Manuel Ignacio Bertolotto

Mentor: Dr. Enrique L. Kawamura

Otoño 2009

El Dilema de la Diferencia entre Retornos: Una Subestimación de Eventos Económicos Adversos[1]

Manuel Ignacio Bertolotto
Universidad de San Andrés

1 de Junio de 2009

Resumen

Los modelos que intentan explicar la diferencia de 6% entre el retorno de los activos riesgosos y los libres de riesgo subestiman la probabilidad de ocurrencia de eventos inusuales en la economía. En este trabajo se presenta un modelo en donde su función de distribución asociada asigna mayor peso a los eventos económicos anormales. En la estimación, el retorno del activo libre de riesgo es de aproximadamente 1% y la diferencia entre ambos es de 6%.

[1] **Agradecimientos**

Agradezco a los doctores Enrique Kawamura, Carlos D. Heymann y a Martín G. Zimmermann por los importantes aportes en la determinación del tema de tesis. Resalto con énfasis la guía y los comentarios esclarecedores que me brindó Enrique Kawamura así como el aliento personal para poder llevar a cabo este trabajo.

Al Dr. Angel Plastino quien motivó mi interés por las aplicaciones de la estadística de Tsallis a fenómenos económicos.

1. Introducción

Uno de los temas más estudiados en los últimos 30 años ha sido explicar por qué, en Estados Unidos, el retorno anual promedio de los activos riesgosos en el último siglo es 6% mayor al de los bonos del tesoro. Hasta el momento, las explicaciones modeladas para explicar esta diferencia (denominada "equity premium") no son completamente convincentes.

Esta literatura comienza con Mehra y Prescott (1985), quienes utilizan una versión del modelo de equilibrio general de Lucas (1978) para compararlo, por calibración, con los datos de Estados Unidos. Estos autores concluyen que estos modelos no pueden explicar la divergencia en los retornos porque no generan un "spread" de riesgo como la observada entre las acciones involucradas en el índice S&P 500 y los bonos del tesoro de Estados Unidos.

Luego de este trabajo seminal de Mehra y Prescott, muchos economistas intentaron mejorar las predicciones del modelo de equilibrio general. Rietz (1988), por ejemplo, propuso considerar la posibilidad de ocurrencia de caídas abruptas en el consumo tales como la gran depresión. Epstein & Zin (1989, 1991) modificaron la representación de las preferencias de los individuos y, Constantinides y Duffie (1995), agregaron heterogeneidad de individuos. A pesar de estos esfuerzos, los resultados no arrojaban señales positivas sobre los modelos de equilibrio general de Arrow-Debreu y, por ende, no podían corregirse las conclusiones de Mehra y Prescott.

R. Barro (2005), retomando la idea de Rietz (1988), arguye que explicitar en el modelo la posibilidad de aparición de crisis económicas profundas explica parte del dilema de los retornos. Calibra un modelo en donde el producto se comporta como un camino aleatorio con corrimiento, en donde cabe la posibilidad de que la producción caiga abruptamente por eventuales crisis. Asimismo estima la probabilidad de ocurrencia de estos desastres económicos teniendo en cuenta las contracciones (en el siglo XX) del Producto Bruto Doméstico per cápita de 20 países pertenecientes a la OECD, ocho países latinoamericanos y siete asiáticos.

Barro utiliza una medida de retorno sobre el activo riesgoso distinta a la de la literatura previa, consistente con el retorno de un "derecho sobre dividendos" a cobrar en el período siguiente a su adquisición. El autor obtiene mejores resultados que en los trabajos previos sobre esta literatura. Suponiendo que la probabilidad de que un país ingrese en una crisis económica (que provoque una disminución de su Producto Bruto Doméstico en 15%) es de 1.7%, la prima de retornos que calibra es de 0,036 (el retorno de los activos riesgosos que encuentra es de 0.071 y el de libre de riesgo 0.035). Para poder calibrar su modelo, Barro supone que los desastres económicos tienen siempre el mismo impacto sobre el producto (15%). Además, para calcular la probabilidad de crisis, supone que ésta se mantiene constante desde 1889 hasta 2004 y que es la misma para los 35 países que considera.

En un trabajo posterior, Barro (2009), además de tener en cuenta la posibilidad de profundas crisis económicas, modifica la función de utilidad isoelástica y aditiva en el tiempo del individuo representativo utilizada habitualmente. Calibra su modelo con la función que representa las preferencias de Epstein y Zin (1989) y Wail (1990) y obtiene una prima de retornos cercana al

0.059. Además de los supuestos explicados anteriormente, debido a este nuevo cambio, incrementa el número de parámetros a calibrar, los cuales son difíciles de estimar en la realidad.

Es posible interpretar que estos modelos no reflejen claramente la realidad en el sentido de que subestiman la probabilidad de que sucedan eventos anormales en la economía: tanto incidentes que disminuyan su performance, como acontecimientos que la mejoren. Barro, en sus papers, tiene en cuenta algunos de estos eventos al considerar desastres económicos que impliquen una caída del Producto Bruto Doméstico de más de 15%. Pero claramente, el abanico de escenarios en la realidad es mucho más abarcativa[2].

Este trabajo, presenta un modelo de equilibrio general similar al desarrollado por Barro (2005) pero incorporando un modo alternativo de modelación para los eventos anormales, asignándoles mayor probabilidad. Gracias al enfoque propuesto, no es necesario suponer un impacto fijo sobre el producto ni calcular la probabilidad de tal crisis. Los retornos de los activos riesgosos y de los bonos del tesoro obtenidos del modelo son 0.071 y 0.011 respectivamente. La diferencia entre ambos, el "equity premium", es de 0.06, como se observa en Estados Unidos.

Este trabajo, por tanto, sugiere que en estos modelos de equilibrio general, no parece ser válido el supuesto de que los cambios en el producto se deban a un "Random Walk with drift" (asociado a una distribución Gaussiana) más un término que capture el efecto de algunas crisis económicas. El modelo propone que la probabilidad de que el producto tome cierto valor, se calcula en base a una distribución con colas más pesadas que las que posee la Normal. Por ende, debemos considerar un Random Walk que sea consistente con esta distribución.[3]

La organización de este trabajo es la siguiente. En la Sección 2 se describe el modelo y se calculan las expresiones de los retornos de los activos riesgosos y de los que no tienen riesgo. En la Sección 3 se describen los parámetros a calibrar. La Sección 4 presenta los resultados de la calibración y su robustez. Finalmente, la Sección 5 presenta las conclusiones.

2. El modelo

En línea con los trabajos de Barro (2005, 2009), se presenta una versión del modelo de Lucas (1978) desarrollada para analizar los retornos de los activos (en este caso, "equity claims" sobre árboles que producen frutas). Aquí la producción del período t, Y_t, es exógena y estocástica.

[2] Por ejemplo, la caída del Producto Bruto Doméstico real per cápita de 14% entre 1945 y 1946 en Estados Unidos y el aumento de 33% entre 1941 y 1942.

[3] Un trabajo reciente de Bidarkota, Dupoyet y McCulloch (2009) estudia un modelo en donde el tratamiento de información incompleta conlleva a utilizar filtros no Gaussianos para las tendencia discreta no observable de las serie del producto. El modelo propuesto en esta tesis no supone cambios discretos (provenientes de procesos de Markov y de Poisson) en los dividendos.

Se asume que no hay inversión ni depreciación por lo que la cantidad de árboles frutales siempre es constante. Como se consume la misma cantidad que se produce: $C_t = Y_t$.

En equilibrio, el individuo representativo posee, en el período actual *t*, "equity claims" sobre el producto en *t+1*. Este activo tiene un precio P_{t1} medido en unidades de fruta de t. Entonces, el retorno bruto de la inversión puede calcularse como:

$$R_{t1}^{e} = \frac{Y_{t+1}}{P_{t1}} \tag{1}$$

Como la propiedad privada está resguardada por el plexo normativo, la adquisición de un "equity claim" hoy, implica, con probabilidad uno, la posesión de una cantidad de fruta mañana proporcional a la tenencia de acciones.

En esta economía, también existe un activo libre de riesgo que garantiza un retorno R_{t1}^{f}. Si bien no hay ningún activo con estas características, a la hora de calibrar modelos como el que se presenta, se tienen en consideración los bonos de plazos trimestrales del tesoro de Estados Unidos (los cuales tienen muy bajo riesgo).

El consumidor representativo maximiza una función de utilidad isoelástica y aditiva en el tiempo:

$$U_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left[e^{-\rho i} \cdot u(C_{t+i}) \right] \tag{2}$$

En donde

$$u(C) = \frac{(C^{1-\theta} - 1)}{1-\theta} \tag{3}$$

En la función de utilidad, $\rho \geq 0$ es la tasa de preferencia temporal, y $\theta > 0$ es el coeficiente de aversión al riesgo relativo y la recíproca de la elasticidad intertemporal de sustitución del consumo.

La condición de primer orden del problema de maximización del agente implica:

$$u'(C_t) = e^{-\rho} \cdot E_t[u'(C_{t+1}) R_{t1}] \tag{4}$$

En donde R_{t1} es el retorno bruto de un período de cualquier activo tranzado en el momento *t*. Utilizando esta última expresión, se reemplaza $C_t = Y_t$ y $R_{t1} = \frac{Y_{t+1}}{P_{t1}}$:

$$(Y_t)^{-\theta} = e^{-\rho} \cdot \frac{1}{P_{t1}} \cdot E_t\left[(Y_{t+1})^{1-\theta}\right] \tag{5}$$

y se obtiene el precio en *t* del activo riesgoso:

$$P_{t1} = e^{-\rho} \cdot (Y_t)^{\theta} \cdot E_t\left[(Y_{t+1})^{1-\theta}\right] \tag{6}$$

De la ecuación (4) también se puede encontrar una expresión para el retorno bruto del activo libre de riesgo:

$$R_{t1}^{f} = \frac{e^{\rho}\cdot(Y_t)^{-\theta}}{E_t\left[(Y_{t+1})^{-\theta}\right]} \tag{7}$$

A continuación se especifica cuál es el proceso que describe los cambios en la producción. Anteneodo (2005), basándose en la estadística de Tsallis[4], encuentra un Random Walk multiplicativo[5] asociado a funciones de distribución con colas más pesadas[6] que en la Normal. A este camino aleatorio, se le agrega un término aditivo-determinístico que refleje la tendencia de la serie de producción.

Este modelo supone, entonces, que el logaritmo natural del valor de la producción de frutas evoluciona como un Random Walk $(2-\nu)$- $Gaussiano$ con un corrimiento aditivo $\Omega > 0$ (teniendo en cuenta que $t = n\tau$):

$$\ln(Y_{n+1}) = \Omega + \ln(Y_n) + \sqrt{\sigma^2\tau}\left(f_\nu[\ln(Y_n), n\tau]\right)^{\frac{\nu-1}{2}}\xi_n \tag{8}$$

El término determinístico Ω refleja el comportamiento no estocástico de la tasa de crecimiento del producto. El proceso aleatorio gaussiano independiente $\{\xi_n\}$ tiene media cero y está δ-correlacionado en el sentido de que $\langle \xi_i\, \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ (en donde δ_{ij} es la delta de Kronecker). La función de distribución $f_\nu[\cdot]$, dependiente del producto y el tiempo tiene la forma[7]:

$$f_\nu[\ln(Y_n), n\tau] = (2\pi)^{-\frac{1}{(1+\nu)}}\left(-\frac{\sigma^2 n\tau\nu(1+\nu)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2-2\nu}\right)^2}{(\nu-1)\Gamma\left(\frac{1}{1-\nu}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{(1+\nu)}}\Bigg(1 - \frac{1}{\sigma^2 n\tau\nu(1+\nu)}4^{\left(-\frac{1}{1+\nu}\right)}\pi^{\left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right)}(\nu - 1)\left(-\frac{\sigma^2 n\tau\nu(1+\nu)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2-2\nu}\right)^2}{(\nu-1)\Gamma\left(\frac{1}{1-\nu}\right)^2}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu+1}}\left(-\ln(Y_n) + n\tau k_1 + \ln(Y_0)\right)^2\Bigg)^{\frac{1}{(\nu-1)}} \tag{9}$$

donde $k_1 = \frac{\Omega}{\tau}$. El parámetro σ representa la desviación estándar de la tasa de crecimiento del producto y $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma.

---

[4] Ver Tsallis (1996, 2003, 2004)

[5] Denominado Random Walk $(2-\nu)$- $Gaussiano$

[6] Si bien se menciona que la distribución que se emplea en este trabajo tiene colas pesadas, hay que tener en cuenta que esto implica que todos los valores que puede tomar el producto tienen probabilidades de realización distintas a las asociadas a una Normal.

[7] En el Apéndice se calcula esta función de distribución.

El parámetro υ regula la importancia en la distribución de los valores más extremos del logaritmo natural de la producción. Si $\upsilon < 1$, las colas de la distribución son más pesadas que en la Normal. Esto hace que los eventos alejados de la media tengan una probabilidad mayor de ocurrencia. En cambio, si $\upsilon > 1$, el soporte de la función es más compacto.

Dado el proceso Y_{n+1} se pueden encontrar las expresiones correspondientes al retorno bruto esperado del activo riesgoso y del no riesgoso para poder calibrar el modelo y calcular la prima de retornos. Para ello, previamente se debe hallar el valor esperado del producto y del precio de los "equity claims".

En primer lugar, se calcula P_{n1}. Para ello, se despeja el producto en función de su tasa de crecimiento y de los términos aleatorios:

$$Y_{n+1} = e^{\left(\Omega+\sqrt{\sigma^2\tau}(f_\nu[\ln(Y_n),n\tau])^{\frac{\nu-1}{2}}\xi_n\right)}Y_n \tag{10}$$

Se sustituye (10) en (6) para llegar a la siguiente expresión:

$$P_{n1} = e^{-\rho}\cdot Y_n \cdot E_n\left[e^{\left(\Omega+\sqrt{\sigma^2\tau}(f_\nu[\ln(Y_n),n\tau])^{\frac{\nu-1}{2}}\xi_n\right)(1-\theta)}\right] \tag{11}$$

Se desarrolla en serie de potencias y se toma valor esperado en (11), el precio en *t* del activo riesgoso se escribe:

$$P_{n1} = \frac{1}{2f_\nu[\ln(Y_n),n\tau]}e^{-\rho}Y_n\Big(\Big(2+(\theta-1)\Omega\big((\theta-1)\Omega-2\big)\Big)f_\nu[\ln(Y_n),n\tau] + \sigma^2\tau(\theta-1)^2 f_\nu[\ln(Y_n),n\tau]^\upsilon\Big) \tag{12}$$

Por otro lado, el valor esperado de la producción, al desarrollar en potencias resulta:

$$E_nY_{n+1} = Y_n\left(1+\Omega+\frac{\Omega^2}{2}+\frac{1}{2}\sigma^2\tau f_\nu[\ln(Y_n),n\tau]^{\upsilon-1}\right) \tag{13}$$

Finalmente, utilizando (12) y (13), la expresión del retorno esperado del activo riesgoso se escribe:

$$\ln(R^e_{n1}) = \ln\left(\frac{E_tY_{n+1}}{P_{n1}}\right) = ln\left(\frac{e^\rho(2+\Omega(2+\Omega)+f_\nu[\ln(Y_n),n\tau])+\sigma^2\tau f_\nu[\ln(Y_n),n\tau]^\upsilon}{\Big(2+(\theta-1)\Omega\big((\theta-1)\Omega-2\big)\Big)f_\nu[\ln(Y_n),n\tau]+\sigma^2\tau(\theta-1)^2f_\nu[\ln(Y_n),n\tau]^\upsilon}\right) \tag{14}$$

Esta expresión depende negativamente del desvío estándar del producto (puede verse por la relación entre R_{n1}^{e} y $\mathrm{A}_{\upsilon,\mathrm{n}}$). Además, la ecuación indica que al aumentar la aversión al riesgo relativa del individuo representativo, manteniendo los demás parámetros constantes, el retorno esperado del activo riesgoso cae. Si disminuye la tasa de preferencia temporal (ρ)[8], lo que implica que aumenta la importancia de los períodos futuros, el retorno en el período actual cae. Por último, se puede ver que al aumentar la tasa de crecimiento determinística del producto (Ω)[9], R_{n1}^{e} también crece.

Para obtener el "equity premium", se necesita encontrar una expresión que represente el retorno esperado del activo libre de riesgo. La manera de llegar al mismo, es muy similar a la utilizada para hallar R_{n1}^{e}. El resultado de ese cálculo resulta:

$$\ln\left(R_{n1}^{f}\right) = \ln\left(\frac{2e^{\rho}}{2+\theta\Omega(\theta\Omega-2)+\sigma^{2}\tau\theta^{2}f_{\nu}[\ln(Y_{n}),n\tau]^{\upsilon-1}}\right) \tag{15}$$

Puede verse que, ante aumentos de σ, el retorno del activo libre de riesgo cae. Además, un aumento en la aversión al riesgo relativa disminuye R_{n1}^{f} al igual que lo hace con R_{n1}^{e}. Un aumento en la tasa de preferencia temporal (ρ) o en la tasa de crecimiento del producto (Ω), manteniendo los demás parámetros constantes, incrementan este retorno.

Por último, se calcula la diferencia entre las expresiones (15) y (16) para obtener la prima de retornos esperada:

$$\ln\left(R_{n1}^{e}\right) - \ln\left(R_{n1}^{f}\right) = ln\left(\frac{e^{\rho}(2+\Omega(2+\Omega)+f_{\nu}[\ln(Y_{n}),n\tau])+\sigma^{2}\tau f_{\nu}[\ln(Y_{n}),n\tau]^{\upsilon}}{\left(2+(\theta-1)\Omega\left((\theta-1)\Omega-2\right)\right)f_{\nu}[\ln(Y_{n}),n\tau]+\sigma^{2}\tau(\theta-1)^{2}f_{\nu}[\ln(Y_{n}),n\tau]^{\upsilon}}\right) - \ln\left(\frac{2e^{\rho}}{2+\theta\Omega(\theta\Omega-2)+\sigma^{2}\tau\theta^{2}f_{\nu}[\ln(Y_{n}),n\tau]^{\upsilon-1}}\right) \tag{16}$$

En las ecuaciones (14), (15) y (16), se observa que tanto el retorno esperado del activo riesgoso como el del no riesgoso y la diferencia entre ambos en un período *t*, dependen del nivel del producto Y_n [10]. Dada esta característica de la solución, al calibrar el modelo, se tiene en cuenta qué valor toma la variable Y_n en cada momento del tiempo para calcular el retorno esperado promedio interanual.

3. Calibración del modelo

[8] Ceteris-paribus
[9] Ceteris-paribus
[10] A diferencia del paper de Barro (2005) en donde los retornos esperados no dependen de las distintas observaciones del producto.

Para calibrar el modelo, se asignan valores a $\Omega, \sigma, \theta, \rho$ y υ. Las series utilizadas corresponden al mismo período analizado en la publicación de Barro (2005), es decir, desde 1954 hasta 2004.

Para obtener los valores de la tasa de crecimiento del producto (Ω) y su desviación estándar (σ), se utiliza una serie con datos anuales sobre el Producto Bruto Doméstico real per-cápita en dólares de 2004[11]. Se calcula el crecimiento anual del producto para conocer su media (0.023) y desvío estándar (0.022). Los resultados no cambian significativamente si $\Omega = 0.025$ al igual que en Barro (2005).

Este autor explica que dentro de la literatura que estima econométricamente la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, el coeficiente de aversión al riesgo relativo (θ) estaría entre 2 y 5. En sus calibraciones utiliza, al igual que en este modelo, $\theta = 4$. Si se lleva este parámetro a sus extremos usuales, la diferencia entre los retornos cambia levemente (aumenta a 7% o disminuye a 5% aproximadamente). Aún así, los resultados siguen siendo más que satisfactorios.

En este modelo se supone que la tasa de descuento temporal es $\rho = 0.03$ al igual que lo hace Barro (2005, 2009). Él elige este valor por los comentarios de la literatura de ahorro (Hubbard, Skinner, & Zeldes, 1995).

Para completar la calibración resta determinar el parámetro υ. Antes de esto, se calculan los retornos esperados promedio.

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés

4. Retorno real promedio de activo riesgoso y no riesgoso en el período 1954-2004

Se sabe, por la ecuación (15), cuál es el valor de $\ln(R_{n1}^{e})$ en el año t. Ahora interesa conocer el valor promedio-ponderado de los retornos esperados del activo riesgoso a lo largo de los años. Este valor se denomina *Rr*. Para ello, se suma en *n* la multiplicación entre el valor de $\ln(R_{n1}^{e})$ obtenido en (14), y su respectivo peso (dado por la función de distribución (9)). De esta manera se llega a la expresión siguiente:

$$Rr = \frac{\sum_{n=1}^{51} \ln(R_{n1}^{e}) f_{\nu}[\ln(Y_n), n\tau]}{\sum_{n=1}^{51} f_{\nu}[\ln(Y_n), n\tau]} \tag{17}$$

El retorno esperado promedio-ponderado del activo libre de riesgo se calcula utilizando la ecuación (15). Su expresión es:

$$Rf = \frac{\sum_{n=1}^{51} \ln(R_{n1}^{f}) f_{\nu}[\ln(Y_n), n\tau]}{\sum_{n=1}^{51} f_{\nu}[\ln(Y_n), n\tau]} \tag{18}$$

[11] Extraída de Global Financial Data

El “equity premium” (empírico) es la diferencia entre *Rr* y *Rf*. Ante aumentos en el desvío estándar del producto (σ) o en la aversión al riesgo relativo θ, dejando los demás parámetros constantes, la prima de retornos crece. En cambio, se mantiene ante movimientos ceteris-paribus de las tasas de preferencia temporal (ρ) y de crecimiento del producto (Ω).

A continuación, se muestran los resultados de la calibración para distintos valores de υ. Debemos tener en mente que el retorno real anual promedio del índice S&P500[12] , el cual se compone de activos riesgosos, desde 1954 hasta 2004 es de 0.082 (0.080 ponderado por $f_{\nu}[\cdot]$). En el caso de los Bonos del Tesoro de Estados Unidos[13], el retorno es de 0.013 (0.014 ponderado). La diferencia entre ambos, el “equity premium”, es de 0.069 (0.066 ponderado).

Tabla 1 – Calibración y retornos según el modelo

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
σ (d.e. del crecimiento del producto)	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023
Θ (coef. aversión al riesgo relativa)	4	4	4	4	4	4
ρ (tasa de preferencia temporal)	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
Ω (tasa del crecimiento del producto)	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025
$\boldsymbol{\upsilon}$	**0.448**	**0.400**	**0.340**	**0.600**	**0.850**	**0.999**
Rr (retorno riesgoso esperado promedio)	**0.070**	0.056	0.032	0.099	0.121	0.128
Rf (retorno libre de riesgo esperado promedio)	**0.011**	-0.016	-0.062	0.069	0.113	0.125
Rr-Rf (prima de retornos)	**0.06**	0.072	0.094	0.031	0.009	0.002

En la Tabla 1, se observa que el modelo ajusta mejor a los datos de Estados Unidos cuando $\upsilon = 0.448$. El valor que toma este parámetro indica que la distribución que ajusta mejor a los datos posee colas más pesadas que la Gaussiana Normal. Esto significa que el modelo logra acercarse a los valores calculados de las series de Estados Unidos cuando se aumenta la probabilidad de eventos anormales.

Si se eligen valores para υ más bajos, como en las columnas B y C, la diferencia entre los retornos esperados incrementa. Esto se debe a que, reduciendo υ, aumenta la importancia de las observaciones del producto más cercanas a la cola de la distribución. El resultado es intuitivo: ante mayor riesgo, asociado a mayor probabilidad de eventos anormales, la diferencia entre los activos riesgosos y los bonos del tesoro debe ser mayor para que la gente se incline a adquirir los primeros.

Si se tiende υ a uno, el “equity premium” disminuye puesto que el retorno del activo libre de riesgo aumenta, acercándose así, al retorno del activo riesgoso. Recordemos que cuando ν tiende a uno, la distribución $(2-\nu)$ – *Gaussiana* tiende a la Normal. Los resultados obtenidos si $\upsilon = 0.999$, son los mismos que aparecen en el trabajo de Barro (2005) cuando impone en su modelo que la probabilidad de desatarse una crisis económica sea siempre cero. En este caso, sus

[12] Extraído de www.econ.yale.edu/~shiller/data/chapt26.xls
[13] Extraído de Global Financial Data

resultados, aunque se basan en una definición de "equity premium" diferente a la de la literatura previa[14], son similares a los calculados por Mehra & Prescott en 1985.

En los gráficos siguientes, se muestra la diferencia entre la distribución Normal y la $(2-0.448)$ – *Gaussiana*. En particular, se supone que $x_M(0) = \ln(Y_0) = 0$, $k_1 = 0$ y $t = 50$.

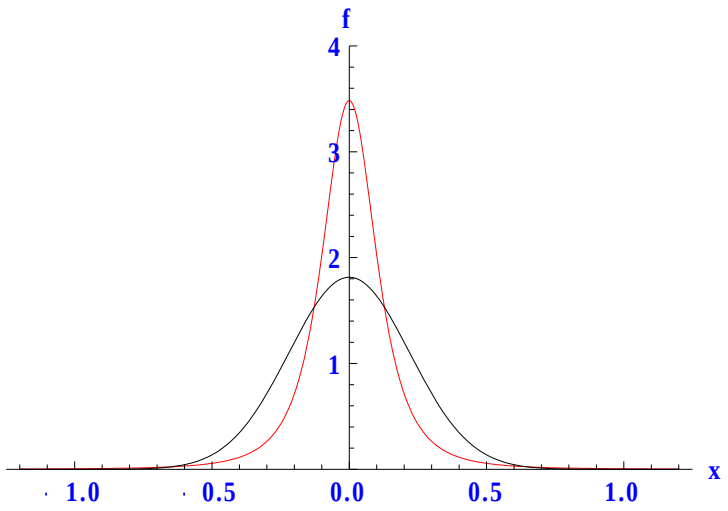

Gráfico 1 – Distribución $(2-\nu)$ – Gaussiana con $\nu = 0.448$ (función más aguda) y $\nu = 0.999$ (Gaussiana estándar)

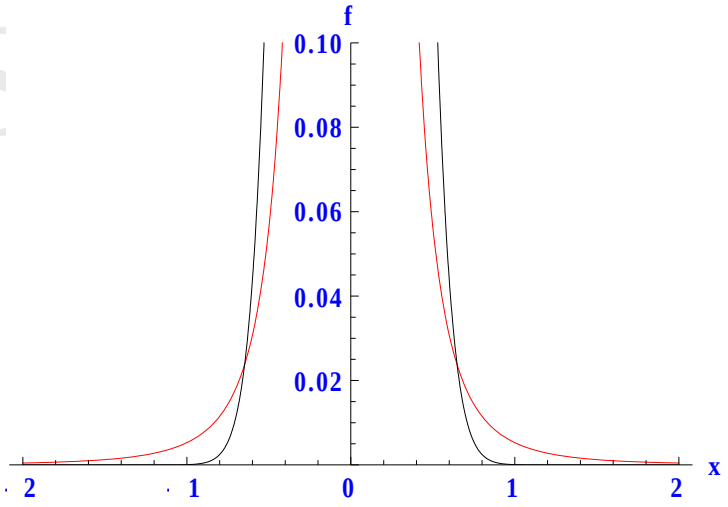

Gráfico 2 – Colas de la distribución $(2-\nu)$ – Gaussiana para $\nu = 0.448$ (función de colas más pesadas) y $\nu = 0.999$.

[14] Consciente de ello, muestra (Barro, 2005, Sección II) que su modelo (calibrado) arroja resultados consistentes con la calibración realizada por Mehra y Prescott (1985).

5. Conclusión

Este trabajo presentó una explicación alternativa a la diferencia entre los retornos de los activos riesgosos y la de los Bonos del Tesoro de Estados Unidos. Se sugiere que los modelos previos de la literatura subestiman las probabilidades de ocurrencia de sucesos anormales en la economía.

La forma de resolver este problema es aumentando las probabilidades de que se den bonanzas y contracciones de la economía en magnitudes alejadas del promedio. En otras palabras, para calcular los retornos reales esperados, se tienen en mayor consideración las situaciones extremas de la economía.

En el modelo, calibrando los parámetros de manera tal de replicar la asignación no significativa de probabilidades a eventos adversos de los artículos de Barro (2005, 2009) y de Mehra & Prescott (1985), se obtiene el mismo valor para la diferencia de los retornos que estos a autores encuentran (con la definición de retornos descrita en el trabajo). Los resultados también son consistentes ante modificaciones en la forma de ponderar las series de datos.

Mediante la calibración del modelo, la diferencia entre los retornos anuales-reales esperados de los activos riesgosos y los bonos del tesoro es de aproximadamente 6%. Asimismo, el retorno esperado de los bonos es cercano a 1%, como refleja la realidad de Estados Unidos en el período 1954-2004.

En investigaciones futuras, se reemplazará la expresión del Random Walk multiplicativo $(2-\nu)$- $Gaussiano$ que aparece en la ecuación (8) por una ecuación equivalente linealizada como la calculada en Anteneodo (2005). Esto permitiría calcular analíticamente los retornos con sus definiciones tradicionales (utilizada en Mehra & Prescott (1985)), en vez de basarnos en los enunciados de Barro (2005, 2009).

Como en Barro (2009), el modelo presentado se muestra apto para tratar cuestiones de costos de bienestar asociados a la incertidumbre del consumo agregado.

Bibliografía

Aiyagari, R. S., & Gertler, M. (1991). Asset Returns with Transaction Costs and uninsured Individual Risk. *Journal of Monetary Economics , 27* (3), 311-331.

Anteneodo, C. (2005). Non-extensive Random Walk. *Physica A , 358*, 289-298.

Barro, R. J. (2005). Rare Disasters and Asset Markets in the Twentieth Century. *Working Paper Harvard University* .

Barro, R. J. (2009). Rare Disasters, Asset Prices, and Welfare Costs. *American Economic Review , 99* (1), 243-264.

Bidarkota, P. V., Dupoyet, B. V., & McCulloch, J. H. (2009). Asset Pricing with incomplete information and fat tails. *Journal of Economic Dynamics and Control , 33*, 1314-1331.

Bidarkota, P., Dupoyet, B., & McCulloch, H. (2009). Asset Pricing with Incomplete Information and Fat Tails. *Journal of Economic Dynamics and Control , 33*, 1314-1331.

Borland, L. (1998). Microscopic Dynamics of the Nonlinear Fokker-Planck Equation: A Phenomenological Model. *Physical Review E , 57* (6), 6634-6642.

Constantinides, G. M., & Duffie, D. (1995). Asset Pricing with Heterogeneous Consumers. *Working Paper. U. of Chicago* .

Epstein, L. G., & Wang, T. (1994). Intertemporal Asset Pricing Under Knightian Uncertainty. *Econometrica , 62*, 283-322.

Epstein, L. G., & Zin, S. E. (1989). Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption Growth and Asset Returns I: A Theoretical Framework. *Econometrica* , 937-969.

Epstein, L. G., & Zin, S. E. (1991). Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption Growth and Asset Returns II: An Empirical Analysis. *Journal of Political Economy , 99*, 263-286.

Hubbard, R. G., Skinner, J., & Zeldes, S. P. (1995). Precautionary Saving and Social Insurance. *Journal of Political Economy* , 360-399.

Kocherlakota, N. R. (1996). The Equity Premium: It's Still a Puzzle. *Journal of Economic Literature , 34*, 42-71.

Mehra, R., & Prescott, E. C. (1985). The Equity Premium: A Puzzle. *Journal of Monetary Economics , 15*, 145-161.

Rietz, T. A. (1988). The Equity Risk Premium: A Solution. *Journal of Monetary Economics , 22* (1), 117-131.

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés

Tsallis, C. (2004). What Should a Statistical Mechanics Satisfy to reflect Nature? *Physica D , 193*, 3-34.

Tsallis, C., & Bukman, D. J. (1996). Anomalous Diffusion in the Presence of External Forces: Exact Time-dependent Solutions and their Thermostatical Basis. *Physical Review E , 54* (3).

Tsallis, C., Anteneodo, C., Borland, L., & Osorio, R. (2003). Nonextensive Statical Mechanics and Economics. *Physica A , 324*, 89-100.

QUAERERE VERUM
Universidad de
SanAndrés

Apéndice

Aquí se muestra el cálculo de la función de distribución $(2-\nu)$- $Gaussiana$ escrita en (9).

El Random Walk $(2-\nu)$- $Gaussiano$ con un corrimiento aditivo $\Omega > 0$ (que corresponde a la ecuación (8) con $\ln(Y_n) = x$) se encuentra discretizando la ecuación de Itô-Langevin siguiente:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = K(x,t) + \sqrt{D} f(x,t)^{\frac{\upsilon-1}{2}} \eta(t) \tag{19}$$

En donde $\langle\eta\rangle$=0 y $K(x,t)$, en este caso, es $K(x,t) = k_1 = cte$. Puede demostrarse que para $\upsilon = 1$, $D = \sigma^2$. Se verificó, mediante cálculo numérico, que esta igualdad, para el caso en que υ es menor que uno, puede emplearse con buena precisión para el cálculo del coeficiente de difusión.

La expresión (19) puede verse en el artículo de Borland (1998) (ecuaciones 2,3 y 17). En ese mismo artículo, se deriva su correspondiente ecuación de Fokker Planck de la forma:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial\{k_1 f(x,t)\}}{\partial x} + D\frac{\partial^2[f(x,t)]^{\upsilon}}{\partial x^2} \tag{20}$$

En donde D es una constante de difusión.

Constantino Tsallis y Dirk Burkman[15], resuelven la ecuación de Fokker Plank mencionada aquí. Su solución es:

$$f(x,t) = \frac{\left[1-\beta(t)(\upsilon-1)(x-x_M(t))^2\right]^{\frac{1}{(\upsilon-1)}}}{Z(t)} \tag{21}$$

en donde:

$$x_M(t) = x_M(0) + k_1 t \tag{22}$$

$$Z(t) = \left({Z_0}^{\upsilon+1} + 2\upsilon(\upsilon+1)D\beta_0 Z_0^2 t\right)^{\frac{1}{(\upsilon+1)}} \tag{23}$$

$$\beta(t) = \beta_0 \frac{z_0}{z(t)}^2 \tag{24}$$

En este trabajo, $x_M(0) = \ln(Y_0)$. Las constantes Z_0 y β_0 se determinan gracias a la condición inicial $f(x,0) = \delta(x)$, en donde $\delta(x)$ es la Delta de Dirac. Sustituyendo (22), (23) y (24) en (21) arribamos a la expresión:

$$f(x,t) = \left[1 - \beta_0 {Z_0}^2\left({Z_0}^{\upsilon+1} + 2\upsilon(\upsilon+1)D\beta_0 {Z_0}^2 t\right)^{-\frac{2}{\upsilon+1}}(\upsilon-1)(x - x_M(0) - k_1 t)^2\right]^{\frac{1}{(\upsilon-1)}} \left[{Z_0}^{\upsilon+1} + \right.$$

$$2\upsilon\upsilon+1D\beta 0Z02t-1\upsilon+1$$

[15] Tsallis & Bukman (1996)

(25)

La función de distribución $f(x,t)$ debe estar normalizada. Para lograr esto, se toma el caso particular en el cual $t = 0$:

$$f(x,0) = \left[1 - \beta_0 {Z_0}^2 \left({Z_0}^{\upsilon+1}\right)^{-\frac{2}{\upsilon+1}} (\upsilon - 1)\left(x - x_M(0)\right)^2\right]^{\frac{1}{(\upsilon-1)}} \left[{Z_0}^{\upsilon+1}\right]^{-\frac{1}{(\upsilon+1)}} \tag{26}$$

A continuación, se integra e iguala a uno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,0)dx = 1 \tag{27}$$

Esta ecuación da como resultado la siguiente relación entre β_0 y Z_0:

$$\beta_0 = -\left(\frac{\pi\Gamma\left(\frac{1+\upsilon}{2-2\upsilon}\right)^2}{(\upsilon-1)\Gamma\left(\frac{1}{1-\upsilon}\right)^2}\right)\frac{1}{{Z_0}^2} \tag{28}$$

Para que $f(x,0)$ sea una Delta de Dirac, Z_0 debe ser cero, mientras que por la ecuación (28), ${Z_0}^2\beta_0$ es constante. Por ende, en la ecuación $f(x,t)$ se anula Z_0 y se reemplaza la expresión ${Z_0}^2\beta_0$ de (28). El resultado de estos cálculos da la función de distribución que se buscaba:

$$f_\nu[\mathrm{x},t] = (2\pi)^{-\frac{1}{(1+\nu)}} \left(-\frac{\sigma^2 t\nu(1+\nu)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2-2\nu}\right)^2}{(\nu-1)\Gamma\left(\frac{1}{1-\nu}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{(1+\nu)}} \left(1 - \frac{1}{\sigma^2 t\nu(1+\nu)} 4^{\left(-\frac{1}{1+\nu}\right)} \pi^{\left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right)} (\nu - 1)\left(-\frac{\sigma^2 t\nu(1+\nu)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2-2\nu}\right)^2}{(\nu-1)\Gamma\left(\frac{1}{1-\nu}\right)^2}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu+1}} \left(-\mathrm{x} + tk_1 + x_M(0)\right)^2\right)^{\frac{1}{(\nu-1)}} \tag{29}$$