



Universidad de
SanAndrés

Universidad de San Andrés
Escuela de Administración y Negocios
Magister en Finanzas

Trabajo Final de Graduación:

**CÁLCULO DE MEDIDAS DE RIESGO USANDO
TEORÍA DE VALORES EXTREMOS**

Autor: Alejandro Sebastián Maio

DNI: 29248590 / Pasaporte: AAB370243

Director: Manuel Maurette

Co-Director: Pablo Macri

Ciudad de Buenos Aires

Diciembre de 2019

RESUMEN

El riesgo de mercado se mide en términos de distribuciones de probabilidad. Sin embargo, resulta útil expresarlo mediante un número que represente una cantidad de capital, y que al ser comparado con el capital disponible de una dada entidad financiera permita verificar que ésta puede afrontar pérdidas *esperables* sin ver comprometida su solvencia. Para ello recurrimos a una familia de operadores, llamados *medidas de riesgo*, que mapean distribuciones de probabilidad en cantidades de capital, y cuya precisión depende de cuán precisa es la descripción disponible de la distribución de probabilidad subyacente al proceso generador de las pérdidas. Para la gestión de riesgos resulta de interés estimar aquellos movimientos adversos del mercado, de alto impacto y baja probabilidad (i.e. *pérdidas extremas*). La teoría de valores extremos aparece entonces como un novedoso método de cálculo alternativo.

Market risk is measured in terms of probability distributions. However, it is useful to measure it by means of a single number representing an amount of capital and which, when compared to the available capital of a financial institution, allows to verify whether it can face expected losses without losing its solvency. To this aim we turn to a family of operators, called *risk measures*, that map probability distributions into amounts of capital, and whose accuracy depends on how precisely described is the probability distribution underlying the losses' generation process. From a risk management perspective, it becomes relevant to properly estimate those adverse market movements presenting a high impact though a low probability (i.e. *extreme losses*). In this context, the extreme values theory appears as a novel alternative calculation method.

TABLA DE CONTENIDOS

RESUMEN	ii
Capítulo 1	Introducción	1
Capítulo 2	Gestión del riesgo	3
2.1	Distribución de pérdidas	3
2.2	Medición del riesgo	5
2.2.1	Enfoques a la medición del riesgo	6
2.3	Riesgo de mercado	8
2.3.1	Medidas de riesgo habituales	8
2.3.2	Métodos de estimación estándar	13
Capítulo 3	Teoría de valores extremos	16
3.1	Máximos de bloque	17
3.1.1	Distribución generalizada de valores extremos	18
3.1.2	Método de máximos de bloque	19
3.2	Excesos sobre un umbral	21
3.2.1	Distribución generalizada de Pareto	21
3.2.2	Método de excesos sobre un umbral	24
3.3	Análisis del método de excesos sobre un umbral	27
3.3.1	Validación del método	29
3.3.2	Aplicación del método	40
3.3.3	Sensibilidades	53
Capítulo 4	Backtesting	58
4.1	Backtesting de Valor puesto a Riesgo	62
4.2	Backtesting de Pérdida Esperada	64
4.2.1	Tests propuestos	64
4.2.2	Significancia estadística	66
4.2.3	Aplicación del método	67
Capítulo 5	Conclusiones y trabajo futuro	74

Capítulo 1

Introducción

Desde la crisis financiera de 2008 ha ganado gran relevancia el estudio de los movimientos extremos de mercado, relacionados con retornos financieros de muy baja probabilidad pero muy alto impacto. De hecho, como parte de su *Fundamental Review of the Trading Book* (FRTB), el *Basel Committee on Banking Supervision* (BCBS) propuso cambiar la medida oficial de riesgo, dejando atrás a Valor puesto a Riesgo (VaR) luego de más de 20 años de vigencia, e introduciendo a Pérdida Esperada (ES), a fin de tomar en consideración el riesgo extremo implícito en la distribución de las pérdidas. Por otro lado, estimar confiablemente la probabilidad y magnitud de eventos financieros severos es intrínseco a la gestión del riesgo de un portafolio financiero. Por estos motivos es imprescindible contar con métodos de estimación del riesgo extremo, y de técnicas adecuadas para validarlos. Este último punto ha sido objeto de numeroso debate, pues al no poseer la propiedad de *elicibilidad* (Gneiting [2011]), se creyó que el *backtest* de ES era imposible desde el punto de vista teórico.

En general, el riesgo se mide en términos de distribuciones de probabilidad. Sin embargo, resulta útil expresarlo mediante un único número, que pueda ser interpretado como una cantidad de capital, y cuya comparación con el capital disponible de una dada entidad financiera permita verificar que ésta puede afrontar pérdidas esperables sin ver comprometida su solvencia. Los operadores que mapean distribuciones de probabilidad en cantidades de capital reciben el nombre de medidas de riesgo, y su precisión depende de cuán precisa es la descripción de la distribución de probabilidad subyacente al proceso generador de pérdidas.

En el caso particular de la gestión del riesgo resulta de interés estimar aquellos movimientos de mercado de alto impacto y baja probabilidad (pérdidas extremas). Por tal motivo resulta de interés describir con precisión la distribución de probabilidad de los retornos negativos extremos. Es en este punto donde entra en juego la teoría de valores extremos (EVT) como un método de

cálculo novedoso, inicialmente propuesta por Longin [1998], que permite calcular la distribución asintótica de los máximos de una variable aleatoria.

En este contexto, abordaremos en este trabajo dos aspectos de la estimación del riesgo extremo: el modelado de distribuciones extremas y el *backtest* de sus predicciones. En primera instancia estudiaremos el uso de la teoría de valores extremos como herramienta de estimación paramétrica de los extremos de la distribución de pérdidas, intentando mostrar que permite un uso más eficiente de los datos disponibles que otros métodos alternativos. Luego de presentar sus fundamentos teóricos, implementaremos un método de cálculo basado en ella, que buscaremos validar contra otros métodos estándar, tomados como *benchmark*, analizando series generadas numéricamente.

En segunda instancia tomaremos de la literatura, e implementaremos, un método no paramétrico de validación de las estimaciones de Pérdida Esperada, en el que la distribución predictiva usada para estimarlo es sometida a un proceso de *backtest* contra las pérdidas realizadas. Para ponerlo a prueba generaremos una serie temporal de medidas de riesgo basadas en una serie temporal de pérdidas. Esperaremos que, al ser complementado con un testeo previo estándar de Valor puesto a Riesgo, el método de validación desarrollado en esta segunda etapa permita generar señales de aceptación/rechazo de las medidas de riesgo estimadas compatibles con los resultados esperados.

Estructura del trabajo Luego de esta reseña introductoria, el Capítulo 2 presenta el marco conceptual de la gestión y medición del riesgo, en tanto que el Capítulo 3 presenta los fundamentos matemáticos de la teoría de valores extremos y su uso para la estimación de las medidas de riesgo Valor puesto a Riesgo y Pérdida Esperada. Presentamos además algunos casos de aplicación que ilustran los pasos involucrados en esta metodología. A su vez, el Capítulo 4 presenta los fundamentos matemáticos de un método de *backtest* de estimaciones de Pérdida Esperada, junto con algunos casos de aplicación. Finalmente, el Capítulo 5 presenta las conclusiones y los tópicos que han quedado abiertos a trabajos futuros.

Capítulo 2

Gestión del riesgo

La gestión del riesgo es usada para una variedad de propósitos, entre los que podemos destacar:

- **Determinación del capital regulatorio:** una de las principales funciones de la gestión del riesgo en las instituciones del sector bancario/financiero es determinar la cantidad de dinero que dichas instituciones deben mantener reservado para hacer frente ante eventuales pérdidas futuras en sus portafolios (i.e. su solvencia).
- **Asignación de fondos (entre distintos activos financieros):** la gestión del riesgo es también empleada como herramienta de re-asignación de fondos a fin de limitar el riesgo en que incurre una entidad, o alguna de sus unidades de negocios.
- **Cálculo de una prima de riesgo:** es la compensación que una aseguradora cobra a sus clientes a para compensar el riesgo que asumen al emitir un seguro.

Los propósitos arriba mencionados poseen en común la probabilidad de una disminución en el valor económico de una dada posición financiera (i.e. una *pérdida* de valor). En todos ellos, dicha pérdida, que por naturaleza es estadística (en cuanto a ocurrencia y magnitud), es transformada en un valor numérico, expresado en unidades monetarias, que en algún sentido *mide el riesgo*.

El presente capítulo está dedicado a presentar, siguiendo los lineamientos usados por McNeil et al. [2005], el marco conceptual de aquellos operadores que transforman la naturaleza estadística de las pérdidas en valores monetarios. A ellos nos referiremos como *medidas de riesgo*.

2.1 Distribución de pérdidas

Sea un portafolio compuesto por activos de riesgo. Denotamos al *valor (monetario)* de dicho portafolio a tiempo t mediante $V(t)$. Hemos mencionado previamente que la gestión del riesgo se ocupa de las potenciales pérdidas de valor, y de la probabilidad de que dicha variación adversa

ocurra; por lo tanto basaremos nuestro análisis en las variaciones de valor negativas, tal como lo expresa la siguiente definición.

Definición 2.1.1 (Pérdida). *Sea $V(t)$ el valor de un portafolio a tiempo actual t . La pérdida realizada por dicho portafolio transcurrido un tiempo Δ , denotada por $L_{[t,t+\Delta]}$, se define como (menos) el cambio en su valor. Matemáticamente,*

$$L_{[t,t+\Delta]} := -[V(t + \Delta) - V(t)].$$

Nota 1. *La definición de pérdida adoptada verifica la idea intuitiva de que las pérdidas serán positivas cuando el cambio de valor del portafolio sea negativo.*

Mientras que a tiempo actual el valor de un portafolio se asume conocido (*observable*), para tiempos futuros será modelado mediante una variable aleatoria (va). En base a la Definición 2.1.1 también las pérdidas serán modeladas mediante una va, tal como lo expresa la siguiente definición.

Definición 2.1.2 (Distribución de pérdidas). *Sea la pérdida realizada por un portafolio entre el tiempo actual t y un horizonte temporal Δ . La distribución de pérdidas, denotada por F_L^Δ , es la distribución de $L(t, t + \Delta)$.*

Nota 2. *En general consideraremos un horizonte temporal (Δ) fijo. Por lo tanto nos referiremos a la pérdida $L_{[t,t+\Delta]}$ mediante L_{t+1} y a la distribución de pérdidas F_L^Δ mediante F_L .*

Una práctica habitual en la gestión del riesgo consiste en modelar el valor de un portafolio $V(t)$ en términos de un vector de *factores de riesgo*, denotado $\mathbf{Z}_t = [Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d}]'$, que se asume observable (i.e. \mathbf{Z}_t es conocida a tiempo t), y cuya elección está íntimamente relacionada con el portafolio que se quiere modelar. El valor del portafolio adopta la representación $V_t = f(t, \mathbf{Z}_t)$, conocida como *mapeo de riesgos*, para alguna función $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Adicionalmente, definimos un vector de *cambio en los factores de riesgo*, denotado \mathbf{X}_t y definido como $\mathbf{X}_t = \mathbf{Z}_{t+1} - \mathbf{Z}_t$, que permite reescribir a las pérdidas del portafolio como

$$L_{t+1} = -[f(t + 1, \mathbf{Z}_t + \mathbf{X}_t) - f(t, \mathbf{Z}_t)].$$

Dado que el vector Z_t es conocido a tiempo t , la distribución de pérdidas (F_L) queda determinada por la distribución de los cambios en los factores de riesgo, X_t .

Nota 3. En el presente trabajo consideraremos portafolios en forma agregada y adoptaremos como único factor de riesgo el logaritmo del precio, $Z_t = \log(S_t)$, por lo que el mapeo de riesgos será $f(Z_t) = \exp(Z_t)$ y el cambio en el factor de riesgo resultará el retorno logarítmico,

$$X_t = \log(S_{t+1}) - \log(S_t) = \log(S_{t+1}/S_t).$$

En consecuencia, la distribución de las pérdidas queda determinada por la distribución de (menos) los retornos logarítmicos, siendo ésta la va sobre la que enfocaremos nuestro análisis.

Nota 4. En el presente trabajo nos referiremos mediante pérdidas, a las que denotaremos L , tanto a las pérdidas absolutas como a (menos) los retornos logarítmicos, sobreentendiéndose a cuál se hace referencia en función del contexto.

2.2 Medición del riesgo

Al introducir el presente capítulo nos referimos a *medidas de riesgo* como aquellos operadores que transforman la naturaleza estadística de las pérdidas en valores monetarios. Existen varias propiedades deseables en una medida de riesgo; la fundamental es que pueda ser interpretada como un requisito de capital que debe ser reservado para mantener un determinado nivel de riesgo. En forma adicional, Artzner et al. [1999] presentan y justifican un conjunto de cuatro propiedades deseables para una medida de riesgo, refiriéndose a aquellas medidas que las cumplen como *coherentes*. Dichas propiedades son:

- **Monotonía.** Si la cartera P_1 posee menor retorno r que la cartera P_2 para todos los estados posibles del mundo, entonces la medida de riesgo ϕ de P_1 debe ser menor que la de P_2 :
 $r(P_1) < r(P_2) \implies \phi(P_1) < \phi(P_2)$.
- **Invariancia ante traslaciones.** Si se añade a una cartera P una cantidad de efectivo c , entonces su medida de riesgo ϕ debe disminuir en esa cantidad: $\phi(P + c) \leq \phi(P) - c$.

- Homogeneidad. Si se cambia el tamaño de una cartera P mediante un factor de escala λ manteniendo invariante el peso relativo de cada activo, entonces su medida de riesgo ϕ debe resultar ampliada por el mismo factor de escala λ : $\phi(\lambda P) \leq \lambda\phi(P)$.
- Subaditividad. La medida de riesgo ϕ de dos carteras juntas consideradas una sola no debe ser mayor que la suma de las medidas de riesgo de ambas consideradas por separado (principio de "reducción del riesgo vía diversificación"): $\phi(P_1 + P_2) \leq \phi(P_1) + \phi(P_2)$.

2.2.1 Enfoques a la medición del riesgo

Los distintos enfoques a la medición del riesgo de una posición financiera pueden ser agrupados en cuatro categorías, tal como describimos a continuación en base a McNeil et al. [2005].

Monto nocional Este es el enfoque más antiguo para cuantificar el riesgo asumido mediante un portafolio de activos de riesgo, en el cual dicho riesgo es definido como la suma de los valores nominales de cada activo en el portafolio. Dichos nominales individuales pueden ser ponderados mediante un factor que de cuenta del riesgo de la clase de activo al cual pertenece el instrumento financiero en cuestión, tal como se describe en on Banking Supervision [2004] para el cálculo de riesgo de crédito bajo el método estándar.

La ventaja de este método es su simplicidad; sin embargo desde un punto de vista económico este método es deficiente por varias razones. En principio, este método no distingue entre posiciones largas y cortas y por lo tanto no hay compensación entre ambas (*neteo*). Por ejemplo, una posición larga con cobertura (*hedged*) es considerada doblemente riesgosa que la misma posición sin cobertura. Adicionalmente, este método no refleja los beneficios de diversificar los riesgos dentro del portafolio. Por ejemplo, un portafolio de créditos consistente en préstamos a varias compañías diversas (i.e. que pueden incurrir en falta de pago en forma independiente) es considerado como igualmente riesgoso que un portafolio de igual valor consistente en un préstamo a una única compañía. Finalmente, este método es difícil de aplicar a portafolios de derivados, en los que el monto nocional del subyacente y el valor económico del instrumento pueden diferir ampliamente.

Distribución de pérdidas Las medidas de riesgo más usadas para describir el riesgo de un portafolio son parámetros estadísticos basados en la distribución de probabilidad de sus pérdidas esperadas dado un predeterminado horizonte temporal. Expresar el riesgo contenido en una distribución mediante un único número, que pueda ser traducido en una cantidad de capital (i.e. la comparación entre dicho valor y el capital disponible por una dada entidad financiera permite verificar que ésta puede afrontar pérdidas esperables sin ver comprometida su solvencia), requiere contar con una descripción precisa de dicha distribución de probabilidad.

Este método posee como principal ventaja el hecho de que las pérdidas son el principal objeto de interés de la gestión del riesgo, y por lo tanto es natural basar el cálculo de medidas de riesgo en su distribución de probabilidad. Adicionalmente, el concepto de distribución de las pérdidas tiene sentido a distintos niveles de agregación (i.e. desde instrumentos individuales hasta portafolios y distintas unidades de negocios de una institución financiera), y refleja adecuadamente efectos de neteo y diversificación. Finalmente, las distribuciones de pérdidas pueden ser comparadas entre distintos portafolios.

Análisis de escenarios En este enfoque se deben considerar distintos escenarios caracterizados por determinados cambios futuros en los factores de riesgo subyacentes al portafolio en cuestión. Por ejemplo, determinados cambios en las tasas de interés, en las tasas de cambio entre monedas o en los índices bursátiles. Finalmente, el riesgo se mide como la máxima pérdida incurrida por el portafolio entre todos los escenarios, o incluso como el promedio ponderado entre las pérdidas incurridas en cada escenario, considerando definida también la probabilidad de ocurrencia de cada uno.

Las medidas de riesgo basadas en escenarios proveen información complementaria a aquellas basadas en distribuciones de pérdidas, pero sólo son practicables para portafolios expuestos a un número relativamente pequeño de factores de riesgo. Su problema principal radica en definir apropiadamente el conjunto de escenarios y sus ponderaciones (i.e. probabilidades de ocurrencia), y en la complejidad de comparar portafolios afectados por distintos factores de riesgo.

Sensibilidad En este enfoque se mide la sensibilidad del valor de un portafolio de activos de riesgo ante cambios en los factores de riesgo subyacente. Por ejemplo, la duración (*duration*) de un portafolio de bonos y las griegas (*greeks*) de un portafolio de derivados.

La ventaja de este método consiste en proveer información útil sobre la robustez de un portafolio ante eventos bien definidos. Sin embargo, estas medidas no pueden ser adicionadas para estimar el riesgo total asumido por un dado portafolio. Adicionalmente, aparecen complicaciones a la hora de calcular el riesgo total (*agregado*). Por lo tanto, este método aislado no es útil para el cálculo del capital regulatorio; no obstante puede ser útil para definir límites en las posiciones de ciertos activos financieros.

2.3 Riesgo de mercado

2.3.1 Medidas de riesgo habituales

Los últimos tres acuerdos globales del Comité de Basilea sobre Regulación Bancaria han escogido medidas de riesgo principales basadas en distribuciones de probabilidad, a saber: Valor puesto a Riesgo (ver la Sección 2.3.1) por Basilea II, *stressed VaR* por Basilea 2.5 y Pérdida Esperada (ver la Sección 2.3.1) por Basilea III. A continuación presentaremos sus fundamentos teóricos.

Valor puesto a Riesgo (VaR)

Sea un portafolio de activos de riesgo, y sea $F_L(l) = P(L \leq l)$ la función de distribución acumulada (cdf) de su distribución de pérdidas dado un horizonte temporal (Δ). Buscamos definir un estadístico (i.e. un número), basado en F_L , que de cuenta de la severidad del riesgo implícito en mantener dicho portafolio durante el mencionado período temporal. Un candidato trivial es considerar la pérdida *máxima posible* dada por

$$\inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) = 0\} \equiv \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) = 1\}.$$

Sin embargo, las pérdidas pueden tanto estar limitadas sólo por el 100% de las tenencias, o incluso no estar acotadas, en cuyo caso la pérdida máxima será *infinita*. Adicionalmente, el uso de la pérdida máxima desconoce cualquier información de índole probabilístico disponible en F_L .

VaR es la extensión directa del candidato trivial que toma en cuenta la mencionada información probabilística, y consiste en reemplazar la idea de *pérdida máxima* por la de *pérdida máxima que no será excedida con un alto grado de probabilidad*; dicha probabilidad es llamada el *nivel de confianza* (α) y sus valores típicos son 0.95 y 0.99. A continuación presentamos su definición.

Definición 2.3.1 (Valor puesto a Riesgo). *Sea un portafolio de activos de riesgo, cuya pérdida L en un horizonte temporal Δ posee una función de distribución acumulada dada por F_L . El Valor puesto a Riesgo (VaR) de dicho portafolio dado un nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$, denotado VaR_α , es definido como el menor número l tal que la probabilidad de que la pérdida futura supere dicho valor es menor o igual que $1 - \alpha$. Matemáticamente,*

$$\text{VaR}_\alpha(L) := \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} \equiv \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}.$$

En términos estadísticos, VaR es un cuantil de la distribución de las pérdidas. Dado que los cuantiles juegan un rol importante en la teoría de la gestión del riesgo, presentamos a continuación su definición.

Definición 2.3.2 (Inversa generalizada). *Dada una función creciente $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la inversa generalizada de F , denotada por F^- , es definida como*

$$F^-(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}.$$

Definición 2.3.3 (Cuantil). *Sean F una cdf y F^- su inversa generalizada. Dado $\alpha \in (0, 1)$, el α -cuantil de F , denotado por $q_\alpha(F)$, es definido como*

$$q_\alpha(F) := F^-(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}.$$

Sea L una va cuya cdf es F_L , a partir de la Definición 2.3.1 y la Definición 2.3.3 tenemos que

$$\text{VaR}_\alpha(L) := q_\alpha(F_L).$$

VaR fue introducido por JP Morgan en la primera versión de su sistema RiskMetrics (1996) y rápidamente adoptado por la industria financiera como un estándar, a punto tal de haber sido elegido por Basilea II para el cálculo del capital regulatorio exigido a bancos y aseguradoras. Su uso como medida de riesgo ha recibido, sin embargo, varias críticas de parte de académicos y especialistas; entre ellas se pueden mencionar (Embrechts et al. [2014]):

- VaR sólo prevee una pérdida, pero no responde la pregunta *qué pasa si...?*: en caso de ocurrir una pérdida mayor a la estimada mediante VaR_α , éste no da ninguna información acerca de cuán severas pueden ser aquellas pérdidas que ocurren con probabilidad menor a $(1 - \alpha)$.
- VaR no es una medida de riesgo *coherente* (Artzner et al. [1999]), pues viola la propiedad de *subaditividad* (ver la Sección 2.2). Por lo tanto, puede sumar el riesgo de distintas carteras en forma "errónea", contradiciendo la noción de diversificación.

Valor puesto a Riesgo en situación de estrés (SVaR)

Luego de la revisión de julio de 2009, conocida como Basilea II.5, las instituciones bancarias deben computar VaR usando sus rutinas de cálculo normales (establecidas por Basilea II) pero alimentadas con datos de entrada ajustados en base a información histórica correspondiente a un período de estrés relevante a su portafolio. Esta medición recibe el nombre de SVaR, y su objetivo, tal como se describe en Basel Committee on Banking Supervision [2011], es reflejar que las condiciones de mercado imperantes al momento de medir el VaR no necesariamente permiten estimar adecuadamente el riesgo de ese mismo portafolio en situaciones de estrés.

Pérdida Esperada (ES)

Basilea III propone reemplazar a VaR con una medida de riesgo llamada Pérdida Esperada (ES), cuyo propósito es responder la pregunta *qué pasa si...?* sobre la que VaR no dice nada. ES

es la pérdida esperable en el caso en que VaR sea excedido, y se volvió popular a partir de Artzner et al. [1999]. A continuación presentamos su definición.

Definición 2.3.4 (Pérdida Esperada). *Sea un portafolio de activos de riesgo, cuya pérdida L en un dado horizonte temporal (Δ) posee una función de distribución acumulada integrable, con $\mathbb{E}[L] < \infty$. La Pérdida Esperada (ES) de dicho portafolio dado un nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$, denotado ES_α , es definido como la pérdida esperada, condicional a que la pérdida sea mayor que el α -cuantil de la distribución. Matemáticamente,*

$$ES_\alpha(L) = \mathbb{E}[L|L \geq VaR_\alpha].$$

Al ser comparada con VaR, ES presenta las siguientes ventajas:

- aporta información sobre qué esperar en caso que las pérdidas excedan VaR.
- es una medida de riesgo *coherente*.

A partir de la Definición 2.3.4 resulta claro que $ES_\alpha \geq VaR_\alpha$; la estrecha relación entre ambas es esquematizada en la Figura 2.1. En ella se muestra que VaR_α es el α -cuantil de la cdf y que ES_α es el valor de expectación de dicha distribución condicional a valores mayores a dicho cuantil.

La relación entre ES y VaR puede desarrollarse a partir de

$$\mathbb{E}[L|L \geq VaR_\alpha] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} l f_L(l) dl$$

haciendo el cambio de variable $u = F_L(l)$, que implica $du = f_L(l) dl$, $u(VaR_\alpha) = F_L(VaR_\alpha) = \alpha$ y $u(\infty) = F_L(\infty) = 1$, y resulta en

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_u(L) du. \quad (2.1)$$

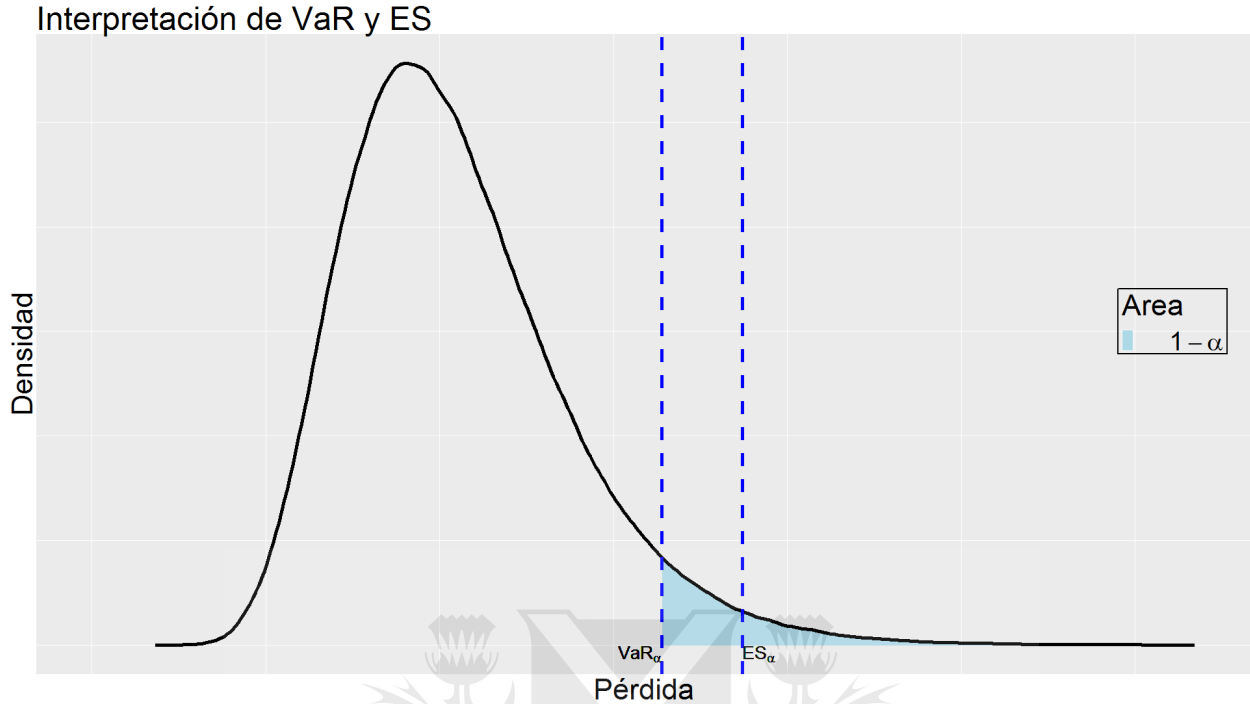


Figura 2.1: Representación esquemática de VaR y ES: VaR_α es el α -cuantil de la función de densidad de probabilidad (i.e. la pérdida que deja a derecha un área $1 - \alpha$), en tanto que ES_α es el valor de expectación de dicha región de la distribución.

Es decir, ES resulta de promediar VaR sobre todos los niveles $u \geq \alpha$, considerando así los valores extremos de la distribución de probabilidad. De este modo, ES resulta sensible a la severidad de las pérdidas que exceden VaR.

Finalmente, a partir de la la Definición 2.3.4 presentamos un lema que provee una especie de *ley de los grandes números* para ES, para lo cual recurrimos previamente a la siguiente definición.

Definición 2.3.5 (Estadísticos de orden). Sean (L_1, \dots, L_N) las realizaciones de una va L_t . El estadístico de orden k de dicha muestra, denotado $L_{(k)}$, es igual a su k -ésimo valor más pequeño. En conjunto, $(L_{(1)}, \dots, L_{(N)})$ son los estadísticos de orden de (L_1, \dots, L_N) si $L_{(1)} \leq \dots \leq L_{(N)}$. En particular, tenemos $L_{(1)} = \min(L_1, \dots, L_N)$ y $L_{(N)} = \max(L_1, \dots, L_N)$.

Lema 2.3.1. Sean (L_1, \dots, L_N) las realizaciones de una va L_t cuya cdf está dada por F_L . Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=N_{1-\alpha}}^N L_{(t)}}{N_{1-\alpha}} = ES_\alpha \text{ c.s.} \quad (2.2)$$

donde $(L_{(1)}, \dots, L_{(N)})$ son los estadísticos de orden de (L_1, \dots, L_N) y $N_{1-\alpha}$ es el menor número entero que excede $N(1 - \alpha)$.

Es decir, dado un nivel de confianza (α) , ES puede ser considerado como el promedio de los $N_{1-\alpha}$ mayores estadísticos de orden de una muestra cuyo tamaño $N \rightarrow \infty$. Esta representación constituye una forma sencilla de estimar ES en caso de poseer una muestra suficientemente grande en la cual se cumpla que $N_{1-\alpha}$ es un número relativamente grande.

2.3.2 Métodos de estimación estándar

Los métodos tradicionales de cálculo de VaR y ES pertenecen en general a alguna de las siguiente tres categorías (Abad et al. [2014]):

- Métodos paramétricos: media-varianza, etc.
- Métodos semi paramétricos: Monte Carlo, etc.
- Métodos no paramétricos: simulación histórica, etc.

Dado que los métodos de cálculo habituales no capturan todas las propiedades de las series de tiempo financieras (ej.: colas pesadas, paquetes de volatilidad, etc.), se han propuesto métodos de estimación de novedosos que incluyen consideraciones como dinámica de la volatilidad, reducción del set de hipótesis sobre las distribuciones subyacentes, etc. Entre ellos se pueden mencionar (Abad et al. [2014], Nadarajah et al. [2014]):

- Métodos paramétricos:
 - Basados en distribuciones alternativas a la normal: t de Student, hiperbólica generalizada, Pareto generalizada (EVT), exponencial asimétrica.
 - GARCH VaR.
 - Combinaciones de time varying copulas y EVT.
- Métodos no paramétricos:

- Simulación histórica filtrada.
- Basados en kernels.
- Métodos semi paramétricos:
 - Basados en estimadores: procesos de colas pesadas, estimador Hill.
 - Basados en regresiones de cuantiles y expectiles: CAViaR, CARE.

A continuación presentamos dos de los métodos tradicionales usados en la industria financiera para estimar las medidas de riesgo presentadas en el inciso anterior: Simulación histórica (HS) y Media-varianza (MV). Ambos serán empleados como métodos de referencia en el próximo capítulo, en el que presentaremos uno de los métodos avanzados presentados en el listado anterior: teoría de valores extremos (EVT). Para obtener una descripción más detallada de dichos métodos, o bien interiorizarse en métodos alternativos, referimos al lector a Abad et al. [2014].

Simulación histórica

El método de simulación histórica puede ser pensado como una estimación de la distribución de pérdidas (F_L) a partir de la distribución empírica de sus realizaciones (L_{t-n+1}, \dots, L_t) . Es decir, no se asume una distribución en particular para F_L , por lo que este método es *no-paramétrico*.

Este método es incondicional: si asumimos estacionario al proceso subyacente a los cambios en los factores de riesgo, entonces (sujeto a condiciones técnicas) la cdf empírica de las realizaciones (L_{t-n+1}, \dots, L_t) es un estimador *consistente* de F_L . Su implementación consiste en estimar VaR mediante los cuantiles de la distribución empírica haciendo uso de los estadísticos de orden (ver la Definición 2.3.5). En efecto, un posible estimador de VaR_α es $L_{(N_{1-\alpha})}$, donde $N_{1-\alpha}$ es el menor número entero que excede $N(1 - \alpha)$, en tanto que un posible estimador de ES_α estará dado por la Ecuación (2.3.1) (i.e. el promedio de los estadísticos de orden que sean mayores que VaR_α).

Las ventaja de este método es su fácil implementación, que no requiere modelado alguno de la estructura de los cambios en los factores de riesgo. Sin embargo, su precisión depende fuertemente de la capacidad de incluir en la muestra realizaciones que den cuenta de eventos extremos.

Esto puede lograrse mediante series de datos largas, situación que atenta contra la presunción de estacionariedad de su proceso generador. Por ende, las estimaciones de VaR y ES serán probablemente imprecisas: si el tamaño de la muestra es acotado, la estimación se basará en distribuciones empíricas que tendrán pocas muestras en los extremos; si posee gran longitud, la estimación se basará en distribuciones empíricas no estacionarias.

Media-varianza

El método de media-varianza asume que la distribución de pérdidas es normal, $F_L \sim N(\mu, \sigma)$, con μ y σ estimadas a partir de un set de realizaciones (L_{t-n+1}, \dots, L_t) : se trata de un método paramétrico e incondicional.

La implementación de este método consiste en estimar VaR y ES usando las propiedades de la distribución normal que ajusta a las realizaciones de L . Este método ofrece una solución analítica simple al asumir la condición de normalidad, que es ciertamente violada para retornos diarios y poco precisa para retornos semanales, mensuales, etc. De hecho, la práctica demuestra que la distribución de los retornos financieros es leptocúrtica (i.e. posee colas más pesadas que la distribución normal). En consecuencia, este método subestima el peso de las colas de la distribución de pérdidas y las estimaciones basadas en dicha estimación subestiman el riesgo real.

Métodos análogos pueden lograrse reemplazando la presunción de normalidad por otras distribuciones (i.e. estos métodos seguirán siendo paramétricos). Por ejemplo, podemos mencionar la aproximación de Cornish-Fisher, distribución t-Student o distribuciones de valores extremos. A estas últimas nos referiremos en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Teoría de valores extremos

El hecho de que VaR y ES sólo dependen de la forma en el extremo de la distribución de pérdidas, ignorando su forma en el centro, sugiere el uso de la teoría de valores extremos (EVT) para estimar en forma confiable esa parte de la distribución. En general se consideran dos formas de identificar los valores extremos de una serie temporal, dando cada uno de ellos lugar a una familia de modelos tipo EVT:

- el primer enfoque considera el valor máximo que la variable aleatoria toma en períodos sucesivos (ej.: si los retornos son diarios, los períodos pueden ser meses o años). Los máximos de cada período (o bloque) constituyen la serie de valores extremos. Da lugar a los modelos de *máximos de bloque* (ver la Figura 3.1, panel izquierdo).
- el segundo enfoque considera todos los valores de la variable aleatoria que exceden un determinado umbral. Los valores en exceso (con independencia de su ubicación temporal) constituyen la serie de valores extremos. Da lugar a los modelos de *excesos sobre un umbral* (ver la Figura 3.1, panel derecho).

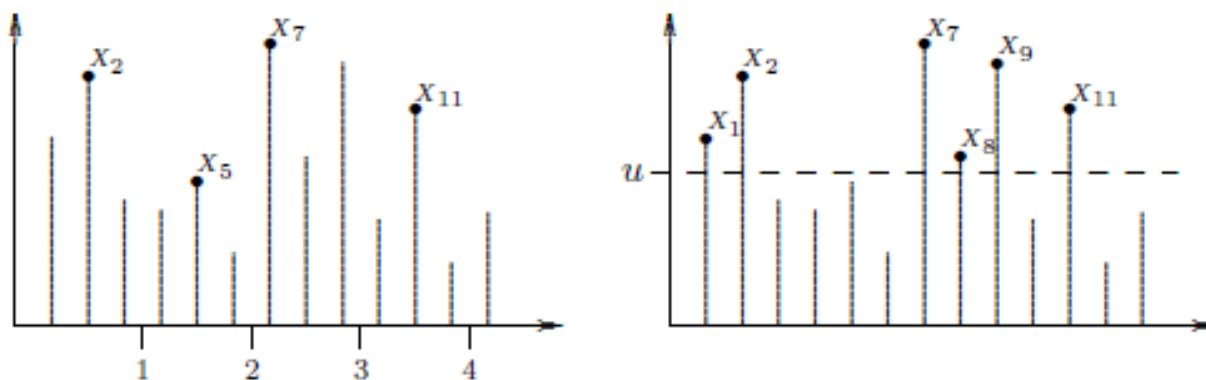


Figura 3.1: Tipos de modelos basados en la teoría de valores extremos: máximos de bloque (izquierda) y excesos sobre un umbral u (tomado de Gilli and Kellezi [2006]).

Los modelos basados en EVT son paramétricos. En los ajustes basados en ella sólo intervienen los datos extremos: no se usan los datos ubicados en la parte central de la distribución (que, si se requiere, puede estimarse con algún método estándar). Por ende, implican el ajuste usando sólo una mínima parte de los datos disponibles (i.e. los más extremos).

A continuación presentamos los fundamentos matemáticos de las dos familias mencionadas de modelos basados en la teoría de valores extremos, siguiendo los lineamientos generales de Bensalah [2000], McNeil [1999], McNeil et al. [2005], Gilli and Kellezi [2006], Fasen et al. [2013] y Ünal [2011]. Sin embargo, por motivos que expondremos más adelante, sólo implementaremos la metodología basada en excesos sobre un umbral.

3.1 Máximos de bloque

Sea la secuencia de va $\{L_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una serie de pérdidas financieras (i.e. retornos negativos), independientes e idénticamente distribuidas (iid) según una distribución subyacente desconocida F_L . Asumamos que el horizonte temporal de dicha serie es dividida en m bloques sucesivos de igual tamaño n , y para cada uno de ellos computemos el máximo valor tomado por la variable aleatoria.

Definición 3.1.1 (Máximos de bloque). *Sea $\{L_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una secuencia de va iid, dividida en m bloques sucesivos de igual tamaño n . Para el j -ésimo bloque, $1 \leq j \leq m$, computamos el máximo valor tomado por la variable aleatoria, $M_j^n = \max(L_{(j-1) \cdot n + 1}, \dots, L_{j \cdot n})$. Llamamos máximos de bloque (BM) a la serie (M_1^n, \dots, M_m^n) , y la denotaremos M_n .*

Los máximos de bloque (BM) son considerados una serie de eventos extremos. El enfoque BM se ocupa de modelar su distribución límite. A continuación presentamos sus nociones básicas siguiendo Gilli and Kellezi [2006]; para una descripción más detallada referimos al lector a McNeil et al. [2005].

3.1.1 Distribución generalizada de valores extremos

Definición 3.1.2 (Distribución generalizada de valores extremos). *La cdf de la distribución generalizada de valores extremos (GEV) estándar (Jenkinson [1955]) está dada por*

$$H_\epsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1 + \epsilon x)^{-1/\epsilon}\right) & \epsilon \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}) & \epsilon = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $1 + \epsilon x > 0$. Definiendo $H_{\epsilon,\mu,\sigma}(x) := H_\epsilon((x - \mu)/\sigma)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ el parámetro de localización y $\sigma > 0$ el parámetro de escala, se obtiene la GEV de tres parámetros.

La distribución presentada en la Definición 3.1.2 es *generalizada* en el sentido en que agrupa en una tres distribuciones que son conocidas por otros nombres; H adopta la forma de cada una de ellas en función del valor del parámetro de forma (ϵ), que define el *tipo de distribución de H* : cuando $\epsilon > 0$ la distribución es del tipo *Fréchet*, cuando $\epsilon = 0$ del tipo *Gumbel*, y cuando $\epsilon < 0$ del tipo *Weibull*. Es interesante notar que dado un x (arbitrario) fijo, se verifica $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon(x) = H_0(x)$ (por ambos lados), por lo cual la parametrización presentada en la Definición 3.1.2 es continua en ϵ , lo que facilita su uso en el modelado de datos.

El parámetro de forma da una idea del peso de las colas: cuánto mayor es ϵ , más pesadas son las colas. La distribución de Weibull es acotada, con un *punto extremo* por derecha, $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$, finito. Dado que, en general, no se puede fijar un límite para las pérdidas, sólo son apropiadas para modelar retornos financieros las distribuciones con parámetro de forma $\epsilon \geq 0$. Las distribuciones de Gumbel y Fréchet poseen punto extremos por derecha infinito, pero la cola de la distribución Fréchet decae más lentamente que la cola de la distribución Gumbel.

Sean M_n los máximos de bloque de un secuencia de v_i iid según una distribución subyacente desconocida F_L , y asumamos que convergen en distribución (bajo una normalización apropiada), lo que implica que existen secuencias $\{d_n\}$ y $\{c_n\}$, con $c_n > 0 \forall n$, tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((M_n - d_n)/c_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(c_n x + d_n)]^n = H(x) \quad (3.2)$$

para alguna distribución $H(x)$ no degenerada (i.e. no concentrada en un único punto). La distribución generalizada de valores extremos (GEV), presentada en la Definición 3.1.2, juega un rol fundamental en dicha convergencia, tal como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1 (Fisher–Tippett, Gnedenko). *Si F_L cumple con la Ecuación (3.2) para una distribución H no degenerada, entonces H es una distribución del tipo H_ϵ (i.e. una GEV, Fisher and Tippett [1928]).*

Definición 3.1.3 (Máximo dominio de atracción (MDA)). *Si F_L cumple con la Ecuación (3.2) decimos que F_L pertenece al máximo dominio de atracción de H_ϵ y lo denotamos $F_L \in \text{MDA}(H_\epsilon)$.*

Es decir, si la convergencia de los máximos de bloque ocurre, la distribución generalizada de valores extremos presentada en la Definición 3.1.2 es la única distribución límite no degenerada posible para los máximos de bloque, y queda unívocamente definida por ϵ a menos del parámetro de localización (μ) y del parámetro de escala (σ).

3.1.2 Método de máximos de bloque

Sean M_n los máximos de bloque de un secuencia de v_i iid según una distribución subyacente desconocida F_L . Entonces, la teoría indica que la distribución verdadera de los M_n puede ser aproximada, para n suficientemente grande, por la GEV de tres parámetros $H_{\epsilon,\mu,\sigma}$.

Hacemos uso de esta idea mediante el ajuste de una GEV $H_{\epsilon,\mu,\sigma}$ a los máximos de bloque de la serie de datos disponible. Esto requiere dividir la serie de datos en m bloques de tamaño n , siendo M_j^n el máximo del j -ésimo bloque. La GEV puede ser ajustada usando varios métodos, por ejemplo máxima verosimilitud (caso en el que asumimos que el tamaño de bloque n es suficientemente grande como para considerar que los máximos de bloque son independientes, sin importar si la información subyacente es independiente o no). En tal caso, denotando $h_{\epsilon,\mu,\sigma}$ a la función de densidad de probabilidad (pdf) de la GEV, la log-verosimilitud resulta

$$\begin{aligned}
l(\epsilon, \mu, M_1^n, \dots, M_m^n) &= \sum_{i=1}^m \log [h_{\epsilon, \mu, \sigma}(M_i^n)] \\
&= -m \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \sum_{i=1}^m \log \left[1 + \frac{\epsilon}{\sigma}(M_i^n - \mu)\right] - \sum_{i=1}^m \left[1 + \frac{\epsilon}{\sigma}(M_i^n - \mu)\right]^{-1/\epsilon}
\end{aligned}$$

que debe ser maximizada sujeto a las restricciones $\sigma > 0$ y $1 + \epsilon/\sigma(M_i^n - \mu) > 0 \forall i$. Esto representa un problema atípico dada la dependencia entre el espacio de los parámetros y la propia serie de datos a ajustar.

Para determinar el número de bloques m y su tamaño n debe encontrarse un balance: un valor alto de n permite obtener un mejor ajuste de la serie de máximos de bloque, en tanto que un alto valor de m permite disminuir la varianza de los estimadores de sus parámetros. Adicionalmente, cuando las series de datos son dependientes, mayores tamaños de bloque que en el caso de series independientes es recomendable, pues la dependencia reduce la velocidad de convergencia.

Medición del riesgo La GEV ajustada a los máximos de bloque puede ser usada para analizar las pérdidas en condiciones de estrés, en donde distinguimos dos situaciones: en una, llamada *estimación de la magnitud*, definimos la frecuencia de ocurrencia de un evento extremo y usamos el modelo para estimar su magnitud; en la otra, llamada *estimación de la frecuencia*, definimos la magnitud del evento extremo y usamos el modelo para estimar su frecuencia de ocurrencia.

Definición 3.1.4 (Magnitud del retorno). *Sea H la cdf de los máximos de bloque. La magnitud del retorno del k -ésimo bloque está dada por $r_{n,k} = q_{1-1/k}(H)$, es decir el $(1 - 1/k)$ -cuantil de H .*

La magnitud del retorno del k -ésimo bloque puede ser interpretada como aquel retorno que es excedido en promedio en uno cada k bloques. Usando el modelo ajustado, la magnitud del retorno queda estimada mediante

$$r_{n,k}^{\hat{}} = H_{\hat{\epsilon}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}}^{-1} = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\epsilon}} \left[\left(-\log \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right)^{-\hat{\epsilon}} - 1 \right] \quad (3.3)$$

Definición 3.1.5 (Frecuencia del retorno). *Sea H la cdf de los máximos de bloque. La frecuencia del retorno del evento $\{M_n > u\}$ está dado por $k_{n,u} = 1/\bar{H}(u)$.*

La frecuencia del retorno $k_{n,u}$ está definido de manera que el $k_{n,u}$ -ésimo retorno de bloque es u . En otras palabras, en promedio cada $k_{n,u}$ bloques se espera observar un retorno que excede en magnitud a u . Usando el modelo ajustado, la frecuencia del retorno queda estimada mediante

$$\hat{k}_{n,u} = 1/\bar{H}_{\hat{\epsilon},\hat{\mu},\hat{\sigma}}(u). \quad (3.4)$$

3.2 Excesos sobre un umbral

El principal defecto del método de máximos de bloque (BM) es que desperdicia la información disponible, pues considera sólo la pérdida máxima de grandes bloques. Por tal motivo, en la práctica ha sido sustituido por el método de excesos sobre un umbral (POT). Sea la secuencia de va $\{L_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una serie de pérdidas financieras (i.e. retornos negativos), iid según una distribución subyacente desconocida F_L . Asumamos que dado un determinado nivel o umbral (de pérdida) *elevado*, computamos el excesos sobre un umbral de todas aquellas pérdidas que lo superan.

Los excesos sobre un umbral son considerados una serie de eventos extremos. El enfoque POT se ocupa de modelar su distribución límite. A continuación presentamos sus nociones básicas siguiendo Gilli and Kellezi [2006]; para una descripción más detallada referimos al lector a McNeil et al. [2005].

3.2.1 Distribución generalizada de Pareto

Definición 3.2.1 (Distribución generalizada de Pareto). *La cdf de la distribución generalizada de Pareto (GPD) está dada por*

$$G_{\epsilon,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \epsilon/\sigma \cdot x)^{-1/\epsilon} & \epsilon \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\sigma) & \epsilon = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $\sigma > 0$, y $x \geq 0$ si $\epsilon \geq 0$ y $0 \leq x \leq -\sigma/\epsilon$ si $\epsilon < 0$. ϵ y σ son llamados, respectivamente, *parámetro de forma* y *parámetro de escala*.

Al igual que la GEV presentada en la Definición 3.1.2, la GPD es *generalizada* en el sentido de que agrupa varios casos: cuando $\epsilon > 0$, la GPD es una distribución ordinaria de Pareto con $\alpha = 1/\epsilon$ y $\kappa = \sigma/\epsilon$; cuando $\epsilon = 0$ es una distribución exponencial, y cuando $\epsilon < 0$ es una distribución de Pareto de tipo II de colas cortas. También, la GPD es continua en ϵ para un dado x , dado que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{\epsilon, \sigma}(x) = G_{0, \sigma}(x)$. El parámetro de forma (ϵ) da una idea del peso de las colas: cuánto mayor es ϵ , más pesadas son las colas. En el caso de colas pesadas ($\epsilon > 0$), $\mathbb{E}[X^k] = \infty$ para $k \geq 1/\epsilon$. Por lo tanto, la media de la GPD está definida para $\epsilon < 1$ y está dada por

$$\mathbb{E}[G_{\epsilon, \sigma}] = \frac{\sigma}{1 - \epsilon}. \quad (3.6)$$

Definición 3.2.2 (Distribución de los excesos sobre un umbral). *Sea L una va con cdf F_L . La distribución de los excesos sobre un umbral u , denotada F_u , es la distribución de las pérdidas por sobre el umbral, dado que el umbral es excedido, y está dada por*

$$F_u(l) = P(L - u \leq l | L > u) = \frac{F_L(l + u) - F_L(u)}{1 - F_L(u)}$$

para $0 \leq l < l_F - u$, donde $l_F \leq \infty$ es el extremo por derecha de F_L .

La distribución generalizada de Pareto (GPD), presentada en la Definición 3.2.1, juega un rol fundamental en el modelado de la Distribución de los excesos sobre un umbral, presentada en la Definición 3.2.2, tal como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1 (Pickands–Balkema–de Haan). *Podemos encontrar una función (positiva y medible) $\sigma(u)$ tal que*

$$\lim_{u \rightarrow l_F} \sup_{0 \leq l < l_F - u} |F_u(l) - G_{\epsilon, \sigma(u)}(l)| = 0$$

sí y sólo sí $F \in \text{MDA}(H_\epsilon) \forall \epsilon \in \mathbb{R}$ (Pickands [1975], Balkema and de Haan [1974]).

Entonces, el conjunto de distribuciones para las cuales los máximos de bloque convergen a una GEV (i.e. $\text{MDA}(H_\epsilon)$ según la Ecuación (3.1.3)) es también el conjunto de distribuciones para las

cuales la distribución de los excesos sobre un umbral converge a una GPD a medida que el umbral aumenta. Más aún, el parámetro de forma de la GPD límite de la distribución de los excesos sobre un umbral es el mismo que el de la GEV límite de los máximos de bloque. Dado que prácticamente todas las distribuciones continuas comúnmente usadas en estadística pertenecen a MDA (H_ϵ) para algún ϵ , entonces este teorema provee un resultado general que esencialmente dice que la GPD es la distribución canónica para modelar los excesos sobre un umbral suficientemente grande.

Definición 3.2.3 (Media de los excesos). *La media de los excesos de una va L con media finita está dada por*

$$e(u) = \mathbb{E}[L - u | L > u].$$

La media de los excesos $e(u)$ da la media de F_u (que es función de u).

Lema 3.2.2 (Distribución de los excesos sobre un umbral de una GPD). *Sea L una va con cdf $G_{\epsilon, \sigma}$. Entonces su distribución de los excesos sobre un umbral está dada por*

$$F_u(L) = G_{\epsilon, \sigma(u)}(l), \sigma(u) = \sigma + \epsilon \cdot u,$$

donde $0 \leq l < \infty$ si $\epsilon \geq 0$ y $0 \leq l \leq -\sigma/\epsilon - u$ si $\epsilon < 0$.

El lema anterior (para cuya demostración referimos al lector a McNeil et al. [2005], página 279) dice que la distribución de los excesos sobre un umbral de una GPD (F_u) sigue siendo un GPD con igual parámetro de forma (ϵ) pero con un parámetro de escala (σ) que crece en forma lineal con el umbral u . La media de los excesos ($e(u)$) de una GPD se calcula usando el Lema 3.2.2 y la Ecuación (3.6), resultando en

$$e(u) = \frac{\sigma(u)}{1 - \epsilon} = \frac{\sigma + \epsilon \cdot u}{1 - \epsilon} \quad (3.7)$$

donde $0 \leq u < \infty$ si $0 \leq \epsilon < 1$ y $0 \leq u \leq -\sigma/\epsilon$ si $\epsilon < 0$. Es notable la propiedad de la GPD de poseer una $e(u)$ que es función lineal del umbral u .

3.2.2 Método de excesos sobre un umbral

Suposición 3.2.1. Sea F_L una distribución de pérdidas con extremo derecho l_F , entonces para algún umbral u suficientemente grande tendremos $F_u(l) \sim G_{\epsilon, \sigma}(l)$, con $0 \leq l < l_F - u$, $\epsilon \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

Estimación de la GPD En base a la suposición anterior usamos el Teorema 3.2.1 para modelar la distribución de los excesos sobre un umbral (F_u) mediante una GPD. Sea una serie de pérdidas (L_1, \dots, L_N) iid según una distribución subyacente desconocida F_L . Una cantidad arbitraria N_u de dichas pérdidas superará el umbral u ; nos referiremos a ellas mediante $(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{N_u})$ y las empleamos para calcular las *pérdidas en exceso* $Y_i = \tilde{L}_i - u$. Buscamos entonces estimar los parámetros de la GPD que mejor ajusta a las N_u pérdidas en exceso. Al igual que en el método de BM (ver la Sección 3.1.2), asumiremos que los excesos son realizaciones iid, de modo de poder aplicar el método de máxima verosimilitud sobre (la densidad conjunta que resulta ser) el producto de GPD marginales. Llamando $g_{\epsilon, \sigma}(x)$ a la pdf de la GPD, su log-verosimilitud resulta dada por

$$\begin{aligned} \log\{L(\epsilon, \sigma, Y_1, \dots, Y_{N_u})\} &= \log\left\{\prod_{i=1}^{N_u} g_{\epsilon, \sigma}(Y_i)\right\} = \sum_{i=1}^{N_u} \log\{g_{\epsilon, \sigma}(Y_i)\} \\ &= -N_u \cdot \log \sigma - (1 + 1/\epsilon) \cdot \sum_{i=1}^{N_u} \{\log(1 + \epsilon/\sigma \cdot Y_i)\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

que debe ser maximizada sujeto a las restricciones $\sigma > 0$ y $1 + \epsilon/\sigma \cdot Y_i > 0 \forall i$. Al resolver la maximización se obtiene un modelo GPD dado por $G_{\hat{\epsilon}, \hat{\sigma}}$, que describe la distribución de los excesos sobre un umbral (F_u).

Excesos sobre un umbral mayor A partir del modelo inferido para la distribución de los excesos sobre un umbral u podemos inferir la distribución sobre umbrales mayores al anterior haciendo uso del siguiente lema.

Lema 3.2.3. Bajo la Suposición 3.2.1 se tiene que $F_v(l) = G_{\epsilon, \sigma + \epsilon(v-u)}(l) \forall v \geq u$.

Entonces la distribución de los excesos sobre un umbral sigue siendo GPD a medida que el umbral aumenta, con igual parámetro de forma (ϵ) pero con parámetro de escala (σ) que crece linealmente con el umbral. Dado que $\epsilon < 1$, el Lema 3.2.3 implica que la $e(u)$ queda

$$e(v) = \frac{\sigma + \epsilon(v - u)}{1 - \epsilon} = \frac{\epsilon v}{1 - \epsilon} + \frac{\sigma - \epsilon u}{1 - \epsilon} \quad (3.9)$$

donde $u \leq v < \infty$ si $0 \leq \epsilon < 1$ y $u \leq v \leq u - \sigma/\epsilon$ si $\epsilon < 0$.

Estimación del umbral La linealidad exhibida en la Ecuación (3.9) es usada como herramienta para diagnosticar si una serie de datos admite un modelado mediante GPD para la F_u , y constituye la base del siguiente método gráfico que en forma simple permite escoger un umbral apropiado.

Definición 3.2.4 (Función media de los excesos muestrales). *Para una serie de datos positivos (L_1, \dots, L_N) , la función media de los excesos muestrales es un estimador empírico de $e(u)$ dado por*

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^N (L_i - u) \cdot I(L_i > u)}{\sum_{i=1}^N I(L_i > u)} \quad (3.10)$$

Hacemos uso de la función media de los excesos muestrales construyendo el *gráfico de la media de los excesos muestrales (gráfico SME)* $\{(L_{(i)}, e_n(L_{(i)}))\}_{i \leq i \leq N}$, donde $L_{(i)}$ es el i -ésimo estadístico de orden. Si los datos soportan el modelado de los excesos sobre un umbral mediante una GPD, entonces la Ecuación (3.9) indica que dicho gráfico deberá ser lineal *a partir* de algún valor, que consecuentemente será tomado como estimador del umbral.

Una tendencia (lineal) ascendente indica una GPD con parámetro de forma (ϵ) positivo, en tanto que una tendencia negativa indica un ϵ negativo. Estas son las situaciones ideales, pero en la práctica cierta experiencia es requerida para interpretar estos gráficos. Por ejemplo, incluso para series de datos generados a partir de una GPD, estos gráficos raramente son perfectamente lineales (sobre todo hacia los valores superiores de la muestra, donde el promedio involucra una cantidad de excesos cada vez menor).

Distribución de los extremos Bajo la Suposición 3.2.1, la Definición 3.2.2 puede ser reescrita como

$$G_{\epsilon, \sigma}(l) \sim \frac{\hat{F}_L(l+u) - F_L(u)}{1 - F_L(u)} = \frac{\hat{F}_L(l+u) - (1 - P_u)}{P_u}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $P_u \equiv P(L > u) = 1 - F_L(u)$, de modo tal de obtener

$$\begin{aligned} \hat{F}_L(l+u) &= 1 + P_u \cdot [G_{\epsilon, \sigma}(l) - 1] \\ \hat{F}_L(l) &= 1 - P_u \cdot \left[1 + \frac{\epsilon}{\sigma} \cdot (l - u) \right]^{-1/\epsilon} \end{aligned} \quad (3.11)$$

que conocido el valor de P_u proporciona una expresión para las probabilidades extremas. Por lo tanto, también requerimos estimar P_u , para lo cual usamos el estimador empírico

$$\hat{P}_u = N_u/N \quad (3.12)$$

y, al hacerlo, suponemos implícitamente que hay suficiente cantidad N_u de muestras por encima del umbral para estimar $G_{\epsilon, \sigma}(l)$ en forma confiable. La distribución de los extremos resulta

$$\hat{F}_L(l) = 1 - \frac{N_u}{N} \cdot \left[1 + \frac{\hat{\epsilon}}{\hat{\sigma}} \cdot (l - u) \right]^{-1/\hat{\epsilon}} \quad (3.13)$$

recordando que esta expresión sólo vale para $l \geq u$.

Medición del riesgo La GPD ajustada a los excesos sobre un umbral puede ser usada para estimar las medidas de riesgo presentadas en la Sección 2.3.1. La inversa de la Ecuación (3.13) permite obtener los cuantiles de la distribución subyacente. Para $\alpha \geq 1 - P_u$ tenemos

$$\text{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\epsilon}} \cdot \left[\left(\frac{N_u/N}{1 - \alpha} \right)^{\hat{\epsilon}} - 1 \right] \quad (3.14)$$

Asumiendo $\epsilon < 1$, tenemos a partir de la Ecuación (2.1) y la Ecuación (3.14) que

$$ES_{\alpha} = \frac{VaR_{\alpha} + \hat{\sigma} - \hat{\epsilon}u}{1 - \hat{\epsilon}} \quad (3.15)$$

En forma alternativa, la Suposición 3.2.1 y el Lema 3.2.3 implican que las pérdidas que exceden VaR_{α} están distribuidas según una GPD, que cumple $F_{VaR_{\alpha}} = G_{\epsilon, \sigma + \epsilon(VaR_{\alpha} - u)}$. Por lo tanto, ES puede también ser calculado agregando a VaR_{α} la media de dicha distribución, dada por la Ecuación (3.9), obteniéndose nuevamente

$$ES_{\alpha} = VaR_{\alpha} + \epsilon(VaR_{\alpha}) = VaR_{\alpha} + \frac{\epsilon VaR_{\alpha}}{1 - \epsilon} + \frac{\sigma - \epsilon u}{1 - \epsilon} = \frac{VaR_{\alpha} + \sigma - \epsilon u}{1 - \epsilon}$$

3.3 Análisis del método de excesos sobre un umbral

En la sección anterior hemos presentado un método de estimación de VaR y ES basado en el método de excesos sobre un umbral (POT), según el cual ambas medidas de riesgo están dadas por ecuaciones de la forma $f(u, \epsilon, \sigma, P_u)$, cuyo cómputo requiere de la estimación de dichos cuatro parámetros. El umbral (u) se estima construyendo el gráfico de la media de los excesos muestrales a partir de la función media de los excesos muestrales (ver la Definición 3.2.4); el parámetro de forma (ϵ) y el parámetro de escala (σ) se estiman mediante máxima log-verosimilitud (ver la Ecuación (3.8)); y P_u se estima mediante \hat{P}_u (ver la Ecuación (3.12)). Finalmente, VaR y ES se computan mediante la Ecuación (3.14) y la Ecuación (3.15), respectivamente.

En esta sección nos proponemos aplicar la mencionada metodología a casos concretos, con el fin de ganar familiaridad con los pasos involucrados. Adicionalmente querríamos identificar los beneficios y desventajas de este método respecto de otros de uso habitual. Para cumplir con estos objetivos generaremos numéricamente series de datos, que representarán series de pérdidas financieras, en base a tres familias de distribuciones:

- Normal.
- t-Student.

- Distribución generalizada de Pareto.

que serán analizadas mediante tres metodologías:

- Simulación histórica (HS).
- Media-varianza (MV).
- Excesos sobre un umbral (POT).

El uso de las dos primeras familias de distribuciones responde a un interés práctico, pues ambas son habitualmente usadas en la práctica de las finanzas cuantitativas; la tercera por el contrario responde al fin analítico de validar el modelo: dado que la teoría POT predice una convergencia límite hacia la distribución generalizada de Pareto, el usar dicha familia como distribución subyacente permitirá una mejor evaluación de la capacidad del método de ajustar la GPD límite.

Consideraremos series de datos de distinta longitud: 1×10^5 , 1×10^4 , 5×10^3 , 1×10^3 , 250 y 100 observaciones. Esta cobertura permitirá no sólo estudiar la convergencia de los métodos empleados, sino también estructurar su aplicación de modo de abordar en forma progresiva las siguientes dos etapas:

- Validación del método: en primera instancia analizaremos las series de datos de mayor longitud, por lo que será razonable esperar que contengan suficiente información estadística de la distribución subyacente usada para generarlas. Por tal motivo, esperaremos que las estimaciones de riesgo sean tan cercanas a los valores teóricos (conocidos a priori por partir de distribuciones cuyas forma funcional y parámetros serán conocidos) como a cada método de cálculo le sea posible. La comparación de sus estimaciones con los valores esperados permitirá validar la implementación que hemos hecho de cada método. En la práctica de las finanzas cuantitativas no esperamos contar con series tan largas.
- Aplicación del método: en segunda instancia analizaremos las series de datos más cortas, que permitirán estudiar la capacidad de cada método de capturar la distribución subyacente

contando con relativamente poca información. Los valores tomados como referencia serán aquellos obtenidos en la instancia anterior (la de validación). Las longitudes consideradas serán aquellas esperables en la práctica de las finanzas cuantitativas.

3.3.1 Validación del método

En esta primera etapa aplicaremos las herramientas de cálculo, que hemos desarrollado en base a las metodologías HS, MV y POT, a series generadas numéricamente que por su longitud capturen con gran nivel de detalle las propiedades de su distribución de probabilidad subyacente. Por tal motivo esperaremos que las estimaciones de riesgo sean cercanas a los valores teóricos, que conoceremos a priori por partir de distribuciones cuyas forma funcional y parámetros serán conocidos. La comparación de cada estimación con los valores esperados permitirá validar la implementación que hemos hecho de cada método. Tomaremos como representativas de este grupo a las series de 1×10^5 observaciones, cuyas distribuciones subyacentes serán $GPD(\epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, $N(\mu = 0, \sigma = 1)$ y $t - Student(\nu = 5)$, en línea con lo propuesto en el inciso anterior.

Distribución generalizada de Pareto En primera instancia analizaremos una serie de datos cuya distribución subyacente es la distribución generalizada de Pareto, recordando que su elección responde al fin analítico de validar el modelo, pues coincide con predicción teórica de que toda distribución (en las condiciones estudiadas en la Sección 3.2) converge en el límite hacia la distribución generalizada de Pareto.

El primer paso del método requiere estimar el umbral (u) a partir del cual los excesos se comportan como una GPD; en este caso particular esperamos que el umbral sea arbitrariamente bajo (por ser la distribución subyacente una GPD). Para ello construimos el gráfico de la media de los excesos muestrales (gráfico SME) e identificamos la región de comportamiento lineal predicho por la Ecuación (3.7). La elección final del umbral entre los candidatos comprendidos en dicha región responde a un compromiso entre la necesidad de elegir un valor alto, que verifique las hipótesis requeridas por el Teorema 3.2.1, y un valor bajo, que deje suficiente cantidad de valores en exceso para que el ajuste de la GPD sea confiable. En la Figura 3.2 presentamos el gráfico

SME para el Caso GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), 100000 obs. Se observa que el gráfico SME es prácticamente lineal, con pendiente positiva dado que el parámetro de forma $\epsilon > 0$, a menos de los candidatos superiores, para los cuales el promedio se realiza entre pocos valores muy dispersos. Además, notamos que el algoritmo identifica rápidamente que la serie de datos se comporta como una GPD, motivo por el cual el umbral resulta muy bajo.

Caso: GPD($loc=0.0, shape=0.2, scale=0.9$), 100000 obs.

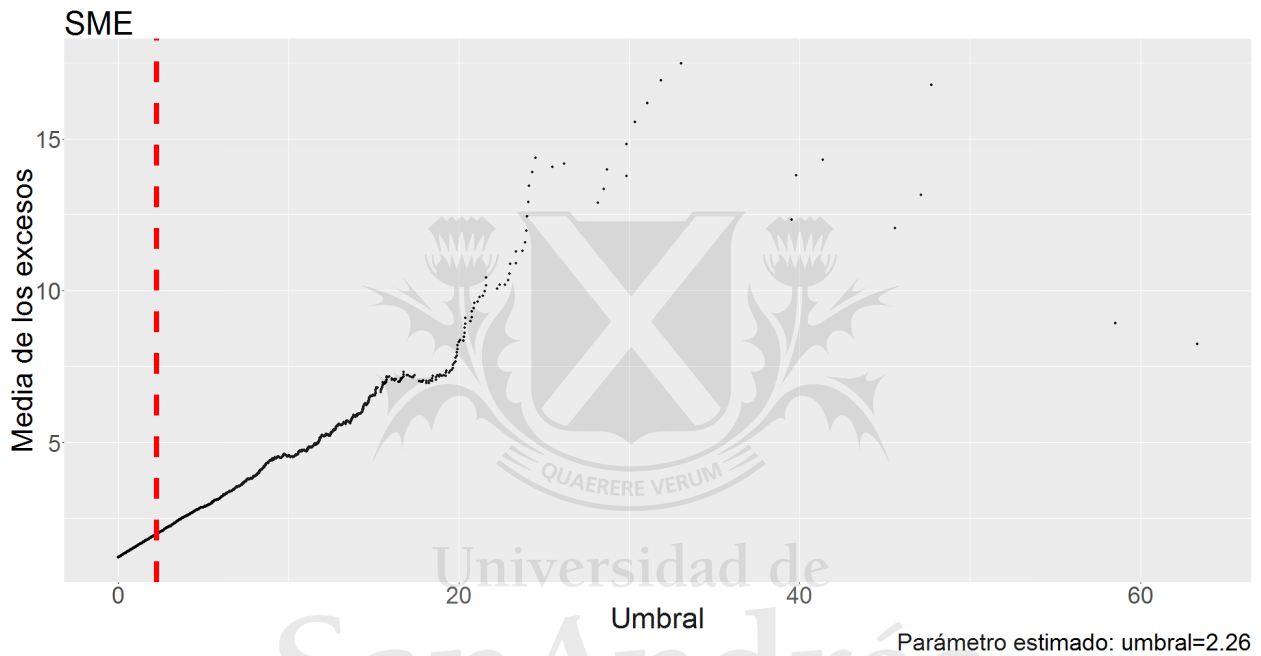


Figura 3.2: Gráfico SME para el Caso GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), 100000 obs. Se observa un comportamiento prácticamente lineal, y que el algoritmo identifica rápidamente que la serie de datos se comporta como una GPD, motivo por el cual el umbral resulta bajo.

Nota 5. *Uno podría pensar a partir de la Figura 3.2 que el umbral estimado es alto y que el algoritmo debería haber elegido un valor menor dentro de la región lineal, de modo de incluir más observaciones para realizar el ajuste de la GPD. Más allá de que esto puede denotar una deficiencia en dicho algoritmo, creemos oportuno destacar que la teoría predice que, dentro de la región lineal, todos los umbrales dan origen distribuciones GPD equivalentes a menos de un cambio de escala (ver el Lema 3.2.3). Por ello, siempre que el umbral se encuentre en la región lineal, la elección del umbral termina siendo cuestión de elegir aquél valor que deja suficiente*

cantidad de excesos para el ajuste de la GPD. No obstante, en la Sección 3.3.3 estudiaremos la sensibilidad de los estimadores de las medidas de riesgo ante cambios en el umbral elegido. De dicho análisis surgirá en última instancia cuán importante es optimizar el algoritmo de detección del umbral; por ellos desestimamos en esta etapa la necesidad de mejorar dicho algoritmo.

Una vez identificado el umbral, el segundo paso requiere calcular los excesos sobre un umbral de la serie de datos. De la longitud de la serie de excesos y de la longitud total de la serie estimamos P_u de acuerdo con la Ecuación (3.12). El tercer paso requiere estimar el parámetro de forma (ϵ) y el parámetro de escala (σ); para ello ajustamos una GPD a la serie de excesos mediante máxima log-verosimilitud de acuerdo con la Ecuación (3.8).

Habiendo estimado los cuatro parámetros u, ϵ, σ y P_u tenemos completamente definida la estimación de la distribución de los excesos sobre un umbral (que en este caso particular, por tratarse de una distribución GPD, prácticamente coincide con la serie de datos completa). Por tal motivo, procedemos a analizar la bondad de ajuste de dicha estimación. En la Figura 3.3 se muestra la bondad de ajuste de la GPD estimada. Se observa un ajuste perfecto de los datos, expuesto tanto en la cdf (izquierda) como en el qq-plot (derecha). Dicha bondad de ajuste era esperable al observar que los parámetros estimados para la GPD límite resultan notablemente similares a los parámetros de la distribución subyacente, tal como se muestra a continuación.

$$loc : \mu = 0 \approx \hat{\mu} \equiv \hat{u} = 2.26$$

$$shape : \epsilon = 0.2 \approx \hat{\epsilon} = 0.25$$

$$scale : \sigma = 0.9 \approx \hat{\sigma} = 1.48$$

Respecto del parámetro de escala, esta *aparente* gran diferencia no es tal si recordamos que, según el Lema 3.2.3, los excesos de una GPD siguen siendo GPD para umbrales mayores, con igual parámetro de forma pero con un cambio en el parámetro de escala. Aplicando dicha ecuación tenemos

$$\sigma' = \sigma + \epsilon \cdot u = 0.9 + 0.2 \cdot 2.26 = 1.35 \approx \hat{\sigma} = 1.48,$$

que muestra que la estimación es muy próxima al valor predicho por la teoría para el nivel de umbral elegido.

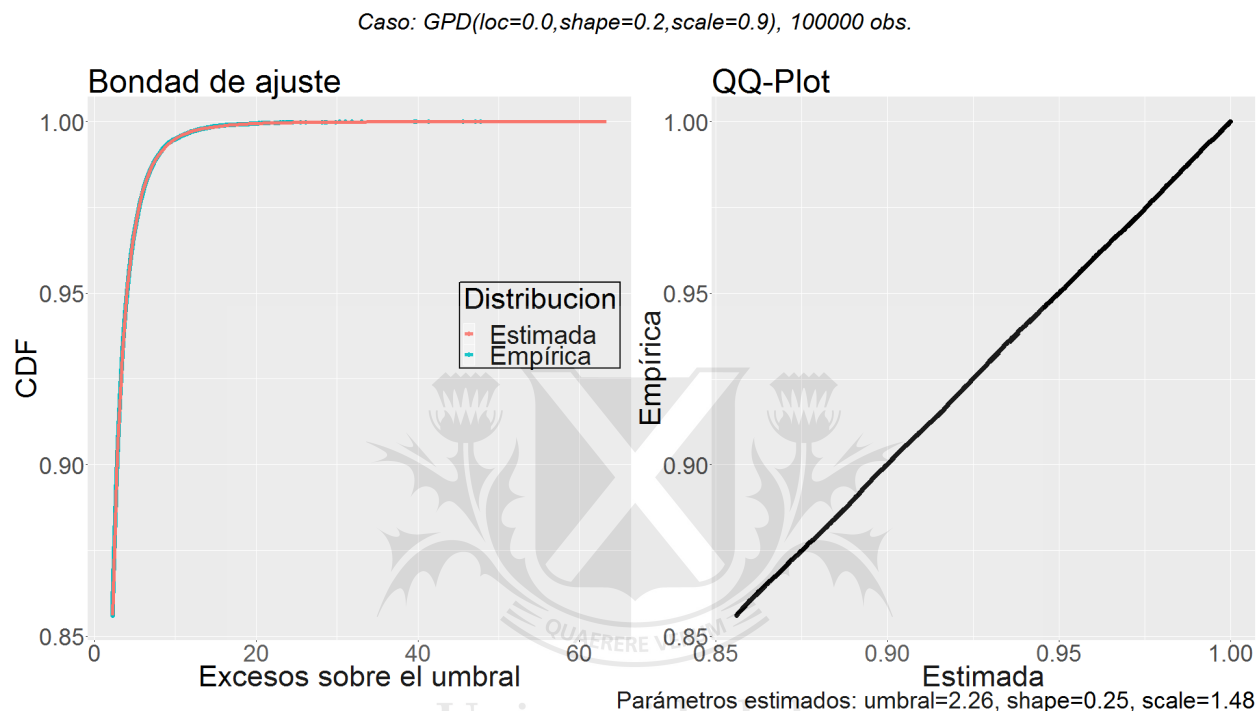


Figura 3.3: Bondad de ajuste de la GPD estimada para el Caso $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, 100000 obs. Se observa que la estimación ajusta perfectamente los datos, tanto en la cdf (izquierda) como en el qq-plot (derecha).

El cuarto y último paso del método requiere estimar las medidas de riesgo VaR y ES de acuerdo con la Ecuación (3.14) y la Ecuación (3.15). Tales estimaciones son mostradas en la Figura 3.4, en la que se incluyen las estimaciones de VaR y ES, para dos valores del nivel de confianza (α), obtenidas mediante los tres métodos empleados. Debido a la gran cantidad de puntos en la muestra, es esperable que el método Simulación histórica (HS) capture completamente la distribución subyacente, y por lo tanto que sus estimaciones sean precisas. Por otro lado, debido a que el método POT asume una distribución idéntica a la estudiada, también es esperable que sus estimaciones sean precisas (y por ende coincidentes con las de HS). Al observar la Figura 3.4 se verifica el cumplimiento de estas presunciones para los dos niveles de confianza estudiados. Notablemente,

Media-varianza (MV) estima correctamente el $VaR_{95\%}$, no así el $ES_{95\%}$ ni dichas medidas de riesgo al 99%, subestimando el riesgo de la distribución subyacente. Esto se debe a que la distribución normal asumida por el método posee colas que decaen más rápidamente que la distribución analizada. Por otro lado, el comportamiento de MV demuestra que los efectos *extremos* juegan un rol apreciable para nivel de confianza superiores al 95%.

Caso: $GPD(loc=0.0, shape=0.2, scale=0.9)$, 100000 obs.

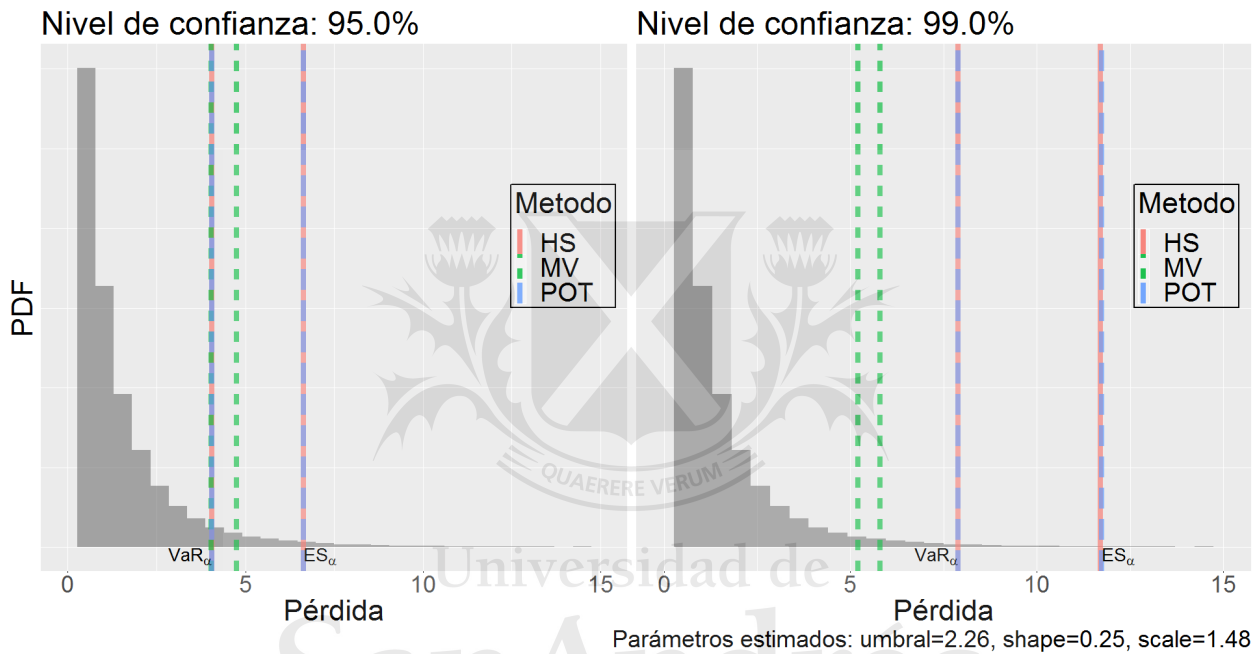


Figura 3.4: Estimaciones de riesgo para el Caso $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, 100000 obs mediante los tres métodos empleados. Se observa que HS y POT prácticamente coinciden en todas las estimaciones en torno a los valores esperados, mientras que MV sólo logra estimar $VaR_{95\%}$, subestimando el riesgo en las otras mediciones.

Distribución normal A continuación analizaremos una serie de datos cuya distribución subyacente es la distribución normal. Su elección responde a ser una de las distribuciones más importantes de las finanzas cuantitativas (y de la estadística en general), y por lo tanto querríamos como prueba básica que la metodología estudiada estime correctamente su forma funcional (en los extremos).

Aplicando la metodología en forma análoga al caso anterior, comenzamos estimando el u a partir del cual los excesos se comportan como una GPD. Para ello construimos el gráfico SME e identificamos la región de comportamiento lineal predicho por la Ecuación (3.7). En la Figura 3.5 presentamos el gráfico SME para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 100000 obs. Se observa un comportamiento notablemente distinto al visto en el caso anterior; en este caso la pendiente es negativa, lo que indica que el parámetro de forma estimado será negativo. Sin embargo, también presenta similitudes con el caso anterior: en ambos, el gráfico SME resulta *ruidoso* para los candidatos superiores (para los cuales el promedio se realiza entre pocos valores muy dispersos), y presenta una región *lineal* para candidatos no tan elevados. En este caso en particular, para candidatos aún menores, la gráfico SME se aparta del comportamiento lineal. En la Figura 3.5 se muestra además, dentro de la región lineal identificada por el algoritmo, el valor tomado como umbral.

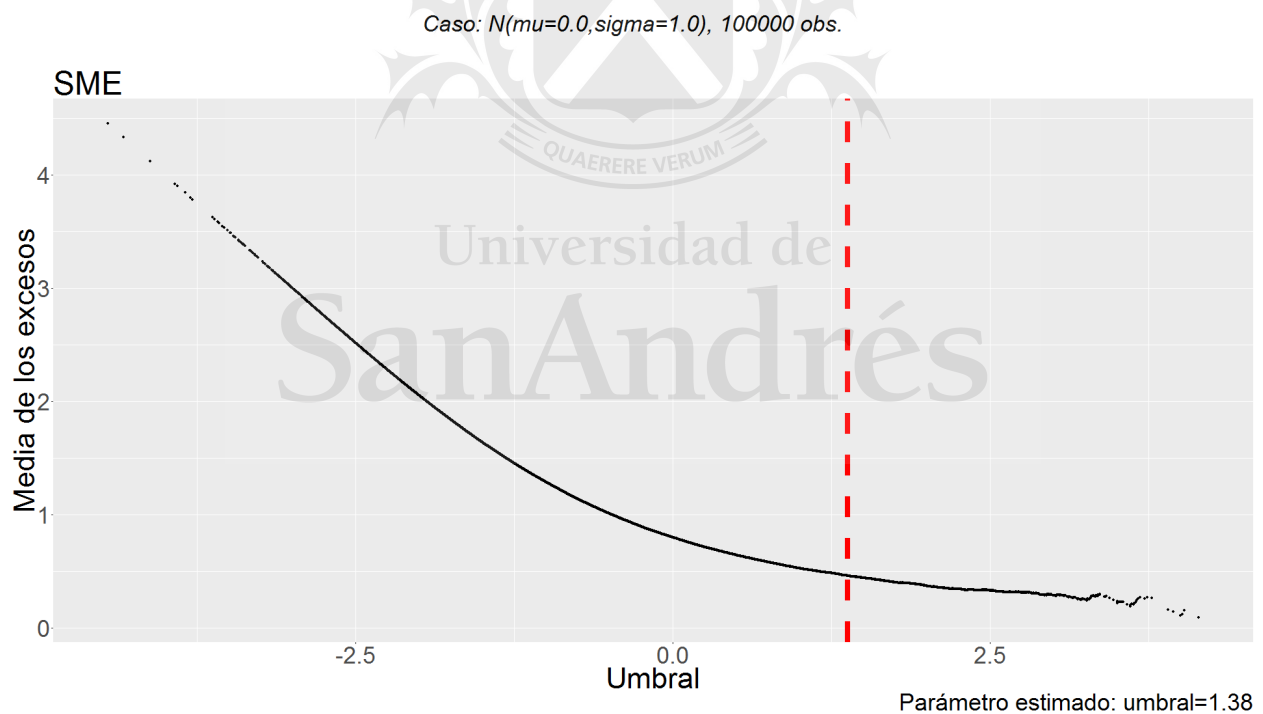


Figura 3.5: Gráfico SME para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 100000 obs. Se observa un comportamiento ruidoso para los candidatos superiores (pues el promedio se realiza entre pocos valores muy dispersos), precedido por una región lineal, de la que se aparta para los candidatos menores. Se muestra además, dentro de la región lineal identificada por el algoritmo, el valor tomado como umbral.

Nota 6. En forma similar a lo mencionado en el caso anterior, uno podría pensar a partir de la Figura 3.5 que el umbral estimado es ligeramente alto y que el algoritmo debería haber elegido un valor menor dentro de la región lineal. Con similares argumentos a los ya presentados desestimamos en esta etapa la necesidad de mejorar dicho algoritmo.

Una vez identificado el umbral, el segundo paso requiere calcular los excesos sobre un umbral de la serie de datos. De la longitud de la serie de excesos y de la longitud total de la serie estimamos P_u de acuerdo con la Ecuación (3.12). El tercer paso requiere estimar el parámetro de forma (ϵ) y el parámetro de escala (σ); para ello ajustamos una GPD a la serie de excesos mediante máxima log-verosimilitud de acuerdo con la Ecuación (3.8). Teniendo estimados los cuatro u, ϵ, σ y P_u , queda unívocamente definida la estimación de la distribución de los excesos sobre un umbral. Procedemos entonces a analizar la bondad de ajuste de la GPD estimada, mostrada en la Figura 3.6. Se observa un ajuste excelente de los datos, expuesto tanto en la cdf (izquierda) como en el qq-plot (derecha).

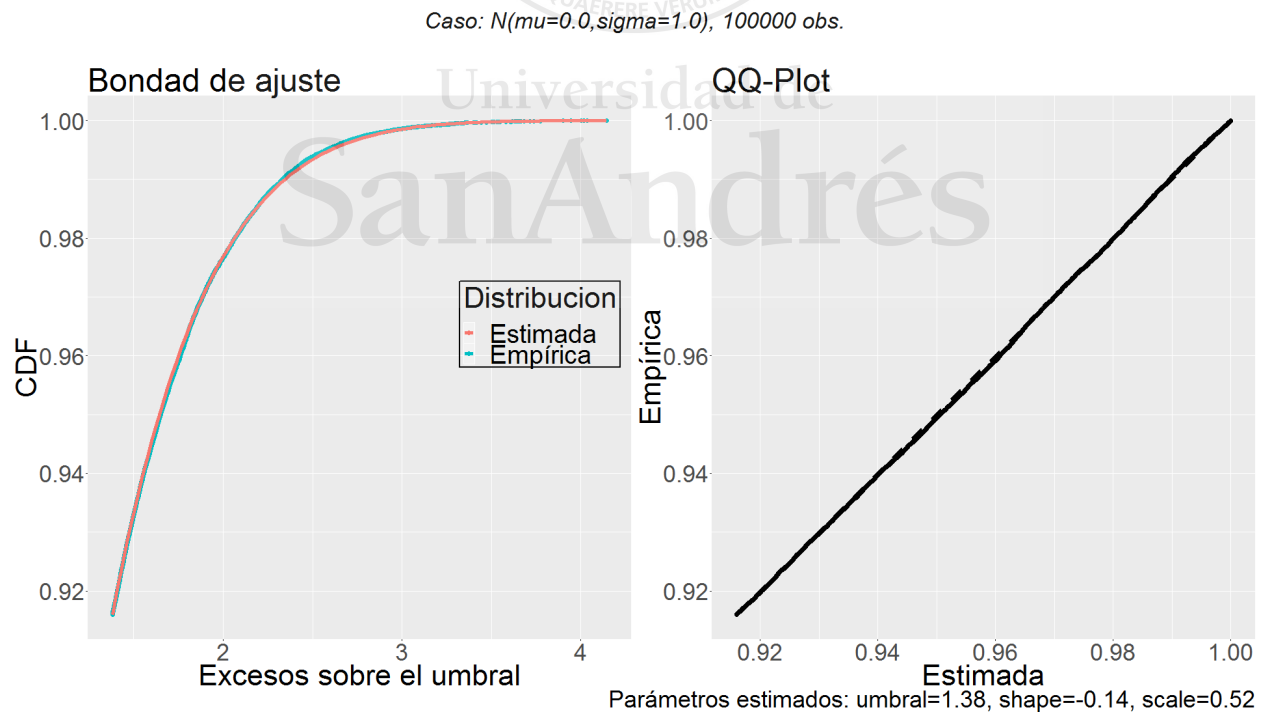


Figura 3.6: Bondad de ajuste de la GPD estimada para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 100000 obs. Se observa que la estimación ajusta perfectamente los datos, tanto en la cdf (izquierda) como en el qq-plot (derecha).

El cuarto y último paso del método requiere estimar las medidas de riesgo VaR y ES de acuerdo con la Ecuación (3.14) y la Ecuación (3.15). Tales estimaciones son mostradas en la Figura 3.7, en la que se incluyen las estimaciones de VaR y ES, para dos valores del nivel de confianza (α), obtenidas mediante los tres métodos empleados. Debido a la gran cantidad de puntos en la muestra, es esperable que el método HS capture completamente la distribución subyacente, y por lo tanto que sus estimaciones sean precisas. Por otro lado, debido a que el método MV asume una distribución idéntica a la estudiada, también es esperable que sus estimaciones sean precisas (y por ende coincidentes con las de HS). Finalmente, dada la buena calidad del ajuste logrado, confiamos en que el método POT también arroje estimaciones precisas. Al observar la Figura 3.7 se verifica el cumplimiento de estas presunciones para los dos niveles de confianza estudiados, observando que los tres métodos prácticamente coinciden en torno al valor esperado en términos de los parámetros distribucionales.

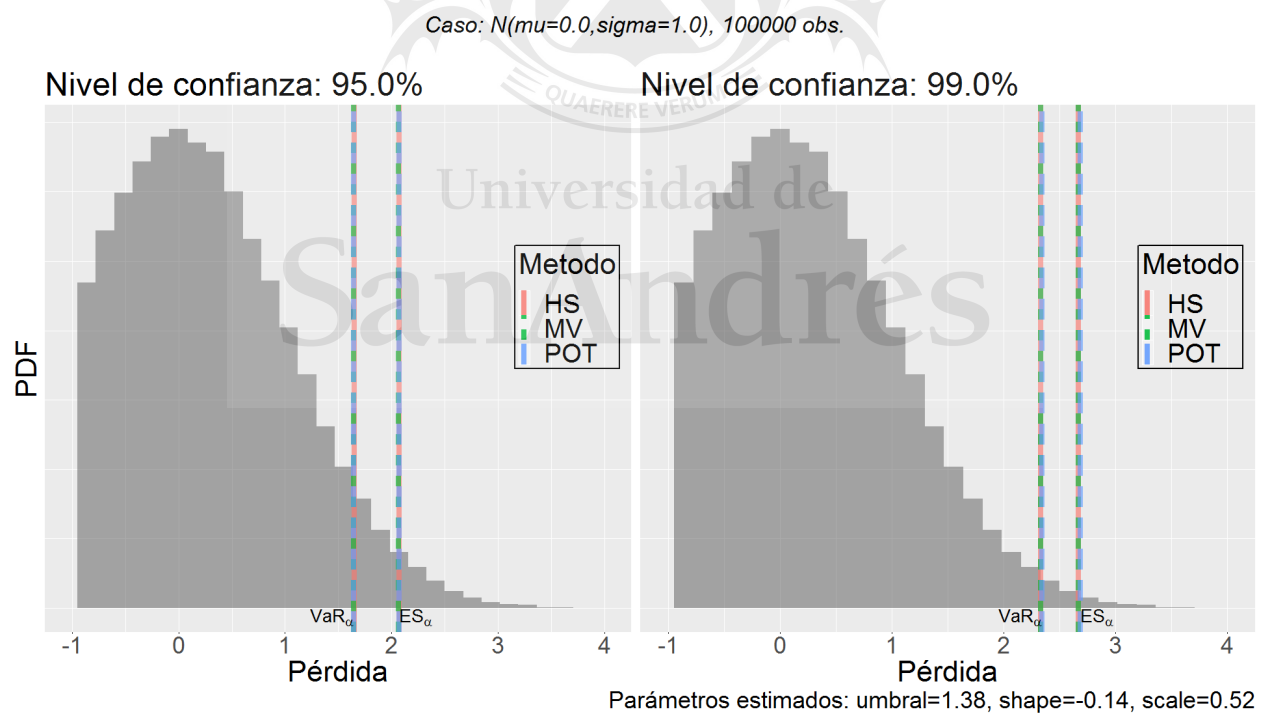


Figura 3.7: Estimaciones de riesgo para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 100000 obs mediante los tres métodos empleados, que prácticamente coinciden en sus estimaciones de ambas medidas de riesgo para ambos valores del nivel de confianza estudiados.

Distribución t-Student Finalizamos el análisis de las series analíticas (i.e. suficientemente largas para capturar con gran nivel de detalle las propiedades de la distribución subyacente) analizando una serie de datos cuya distribución subyacente es la distribución t-Student. Su elección responde a ser una distribución frecuentemente usada en finanzas cuantitativas por poseer colas más pesadas que la distribución normal. Por este motivo querríamos que la metodología estudiada también estime correctamente esta forma funcional.

Comenzamos estimando el u a partir del cual los excesos se comportan como una GPD, para lo cual construimos el gráfico SME e identificamos la región de comportamiento lineal. En la Figura 3.8 presentamos el gráfico SME para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 100000 obs, que muestra un comportamiento intermedio a los observados en los dos casos anteriores: para los candidatos inferiores la pendiente es negativa en tanto que para los superiores es positiva, y para los más extremos el gráfico SME resulta *ruidoso*. En la Figura 3.8 se muestra además, dentro de la región lineal identificada por el algoritmo, el valor tomado como umbral. Corresponde a la región de pendiente positiva, lo que indica que el parámetro de forma estimado será positivo.

Una vez identificado el umbral, el segundo paso requiere calcular los excesos sobre un umbral de la serie de datos. De la longitud de la serie de excesos y de la longitud total de la serie estimamos P_u . El tercer paso requiere estimar el parámetro de forma (ϵ) y el parámetro de escala (σ); para ello ajustamos una GPD a la serie de excesos mediante máxima log-verosimilitud. Teniendo unívocamente definida la estimación de la distribución de los excesos sobre un umbral procedemos a analizar la bondad de ajuste de la GPD estimada, mostrada en la Figura 3.9. Se observa un ajuste excelente de los datos, expuesto tanto en la cdf (izquierda) como en el qq-plot (derecha).

El cuarto y último paso del método requiere estimar las medidas de riesgo VaR y ES. Tales estimaciones son mostradas en la Figura 3.10, en la que se incluyen las estimaciones de VaR y ES, para dos valores del nivel de confianza (α), obtenidas mediante los tres métodos empleados. Nuevamente esperamos que el método HS capture completamente la distribución subyacente, y por lo tanto que sus estimaciones sean precisas. Por otro lado, debido a que el método MV asume una distribución subyacente con colas más livianas que la distribución estudiada, esperamos que

Caso: $tStudent(df=5)$, 100000 obs.

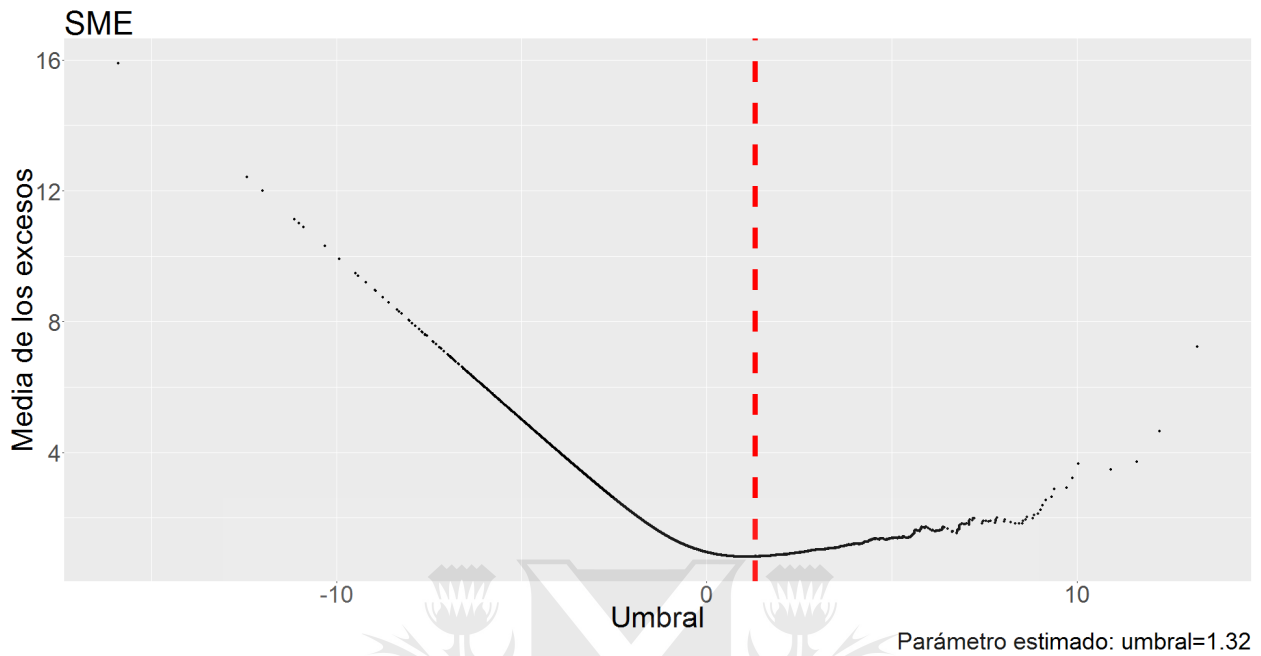


Figura 3.8: Gráfico SME para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 100000 obs. Se observa un comportamiento ruidoso para los candidatos superiores (pues el promedio se realiza entre pocos valores muy dispersos), precedido por una región lineal de pendiente positiva, de la que se aparta mediante un mínimo, adoptando una pendiente negativa para los candidatos menores. Se muestra además el umbral identificado por el algoritmo.

a lo sumo pueda estimar correctamente el $VaR_{95\%}$ pero que subestime el nivel de riesgo implícito en la serie de datos para medidas más extremas. Finalmente, dada la buena calidad del ajuste logrado, confiamos en que el método POT también arroje estimaciones precisas. Al observar la Figura 3.10 se verifica el cumplimiento de estas presunciones para los dos niveles de confianza estudiados, observando que los tres métodos presentan estimaciones muy similares para $\alpha = 95\%$, sin embargo el método MV subestima el riesgo en aproximadamente 10% para $VaR_{99\%}$ y 30% para $ES_{99\%}$.

Conclusiones, validación del método En esta etapa hemos analizado las series cuya longitud consideramos suficiente para contener información estadística detallada de la distribución subyacente. Mediante tal análisis hemos podido, primero, confirmar que las estimaciones de cada método estaban alineadas con nuestras previsiones, basadas en los valores esperados (conocidos

Caso: $tStudent(df=5)$, 100000 obs.

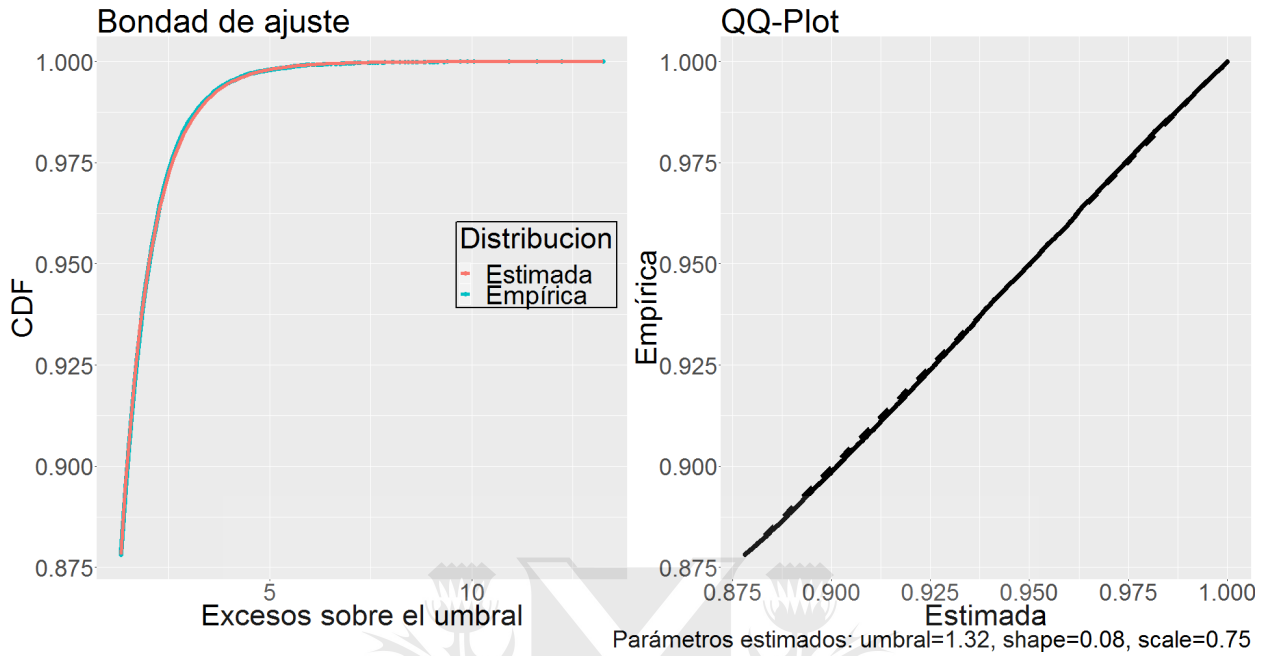


Figura 3.9: Bondad de ajuste de la GPD estimada para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 100000 obs. Se observa que la estimación ajusta perfectamente los datos, tanto en la cdf (izquierda) como en el qq-plot (derecha).

Caso: $tStudent(df=5)$, 100000 obs.

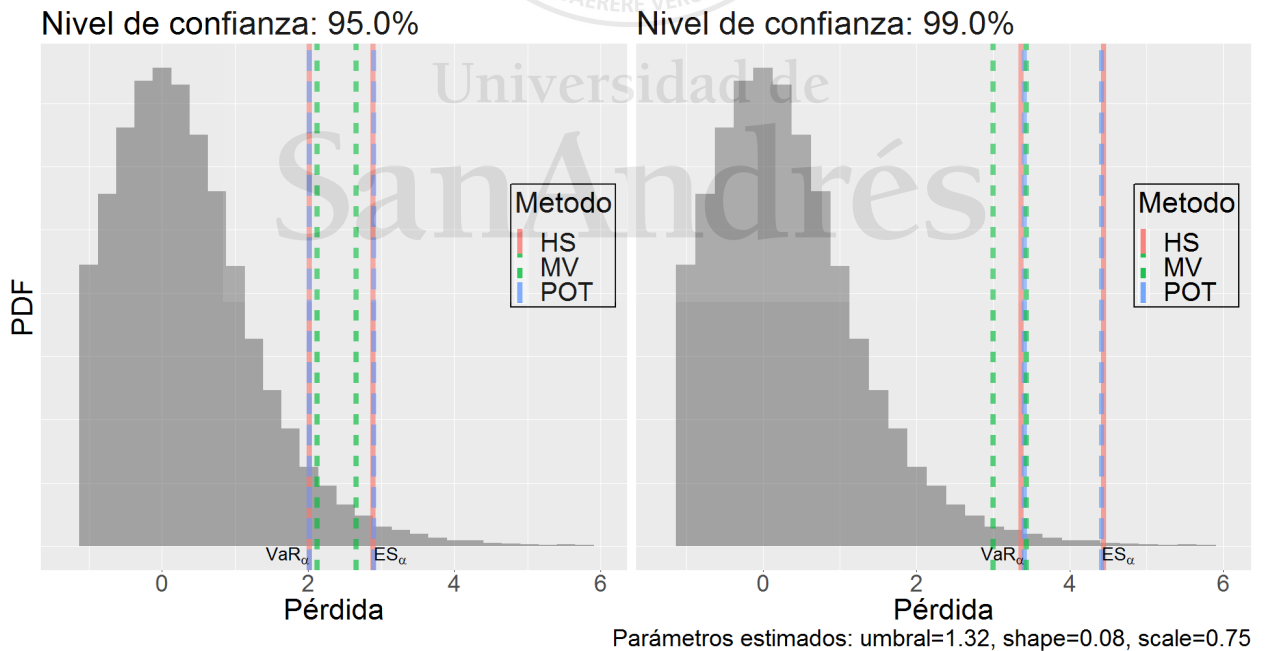


Figura 3.10: Estimaciones de riesgo para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 100000 obs mediante los tres métodos empleados.

a priori) y en las hipótesis de cada método. Segundo, hemos verificado un comportamiento del método POT alineado con las nociones teóricas presentadas en la sección anterior. Tercero, hemos identificado que, si bien el método POT arroja estimaciones prácticamente iguales a las del método HS (que por la cantidad de datos suponemos relativamente exacto), su tiempo de procesamiento es varios órdenes superior al de los otros dos métodos. Finalmente, hemos identificado la posible necesidad de mejorar no sólo la velocidad del algoritmo de identificación del umbral, sino también su lógica, porque vimos que arroja umbrales que pueden ser considerados *altos* a la luz del gráfico de la media de los excesos muestrales (gráfico SME).

3.3.2 Aplicación del método

El objetivo de estas series de datos es aplicar las herramientas de cálculo a series de longitud similar a las disponibles en la práctica de la gestión del riesgo, es decir series más cortas que no necesariamente capturen con mucho nivel de detalle las propiedades de la distribución de probabilidad subyacente. Estas series serán generadas numéricamente a partir de las mismas distribuciones que en la sección anterior (i.e. mismas formas funcionales y parámetros). Por lo tanto, las estimaciones de riesgo hechas en la sección anterior serán tomadas como referencia para las presentadas a continuación.

Dado que cada etapa de la metodología estudiada fue abordada en detalle en la sección anterior, presentaremos aquí una versión resumida de los resultados obtenidos para las series de 5000 y 250 observaciones. Dichos tamaños corresponden a series históricas de pérdidas diarias de 20 y 1 año respectivamente.

Distribución generalizada de Pareto Como parte del primer paso del método construimos el gráfico SME e identificamos la región de comportamiento lineal, presentándolo en la Figura 3.11a para el Caso $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, 5000 obs y en la Figura 3.11b para el Caso $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, 250 obs. Se observa que el gráfico SME es prácticamente lineal, con pendiente positiva dado que el parámetro de forma $\epsilon > 0$, a menos de los candidatos superiores, para los cuales el promedio se realiza entre pocos valores muy dispersos. Además, el algoritmo identifica

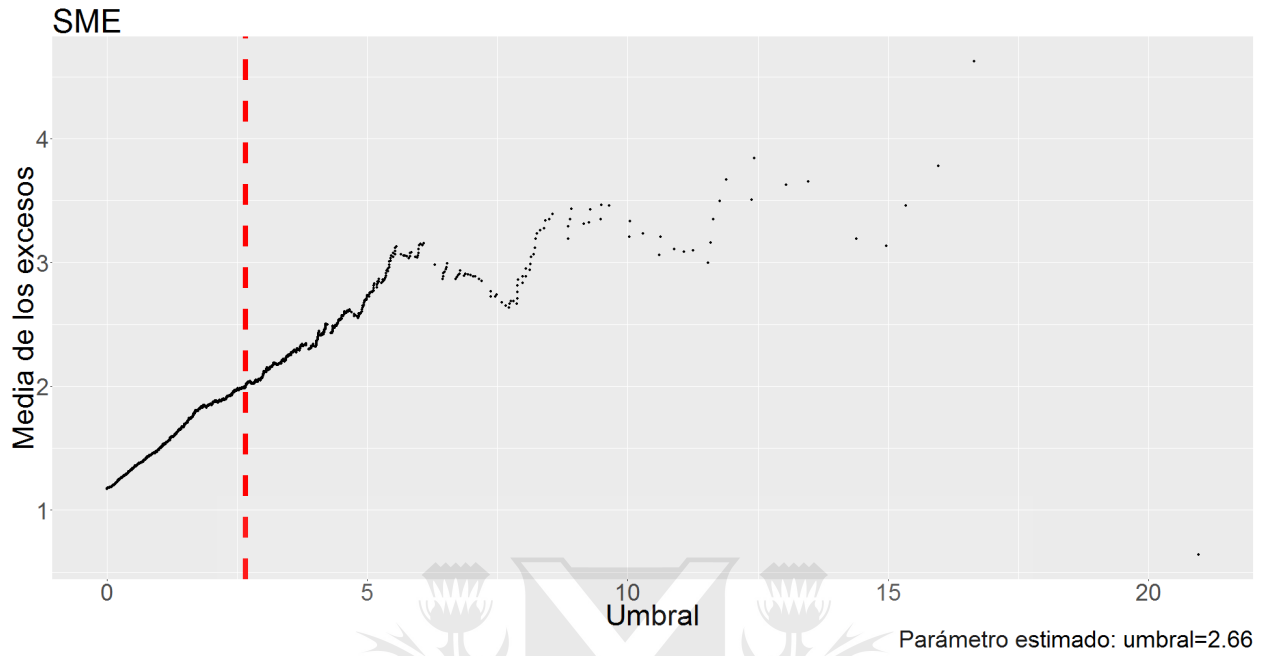
relativamente rápido que la serie de datos se comporta como una GPD, motivo por el cual el umbral resulta bajo. Notablemente, este comportamiento, observado inicialmente para la serie de datos más larga (100000 obs), es reproducido incluso por la serie de datos más corta (250 obs). A continuación, como parte del segundo paso construimos la serie de los excesos sobre un umbral y estimamos P_u . En tercera instancia estimamos el parámetro de forma (ϵ) y el parámetro de escala (σ) ajustando mediante máxima log-verosimilitud una GPD a la serie de excesos.

Habiendo estimado los cuatro parámetros relevantes (u, ϵ, σ, P_u) tenemos definida la estimación de la distribución límite de los excesos sobre un umbral. La bondad de dicho ajuste es mostrada en la Figura 3.12a para el Caso GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), 5000 obs y en la Figura 3.12b para el Caso GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), 250 obs. Se observa un buen ajuste de los datos, tanto en la cdf (izquierda) como en el qq-plot (derecha), incluso para la serie más corta (abajo). Dicha bondad de ajuste era esperable al observar que los parámetros estimados para la GPD límite son notablemente similares a los parámetros de la distribución subyacente (a menos de la corrección al parámetro de escala explicado por el Lema 3.2.3).

Finalmente estimamos las medidas de riesgo VaR y ES empleando los tres métodos considerados y para dos valores del nivel de confianza (α), que mostramos en la Tabla 3.2 para el Caso GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), 5000 obs y en la Tabla 3.3 para el Caso GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), 250 obs. Adicionalmente presentamos en la Tabla 3.1 los resultados obtenidos para el Caso GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), 100000 obs. De ella tomaremos como valores teóricos de referencia a las estimaciones del método HS, por reconstruir directamente la distribución empírica que, en este caso, posee alto nivel de detalle. En las mencionadas tablas observamos un comportamiento muy similar para las estimaciones de los métodos HS y POT, y a su vez muy distinto de las estimaciones del método MV; por tal motivo nos limitaremos a comparar estos dos últimos.

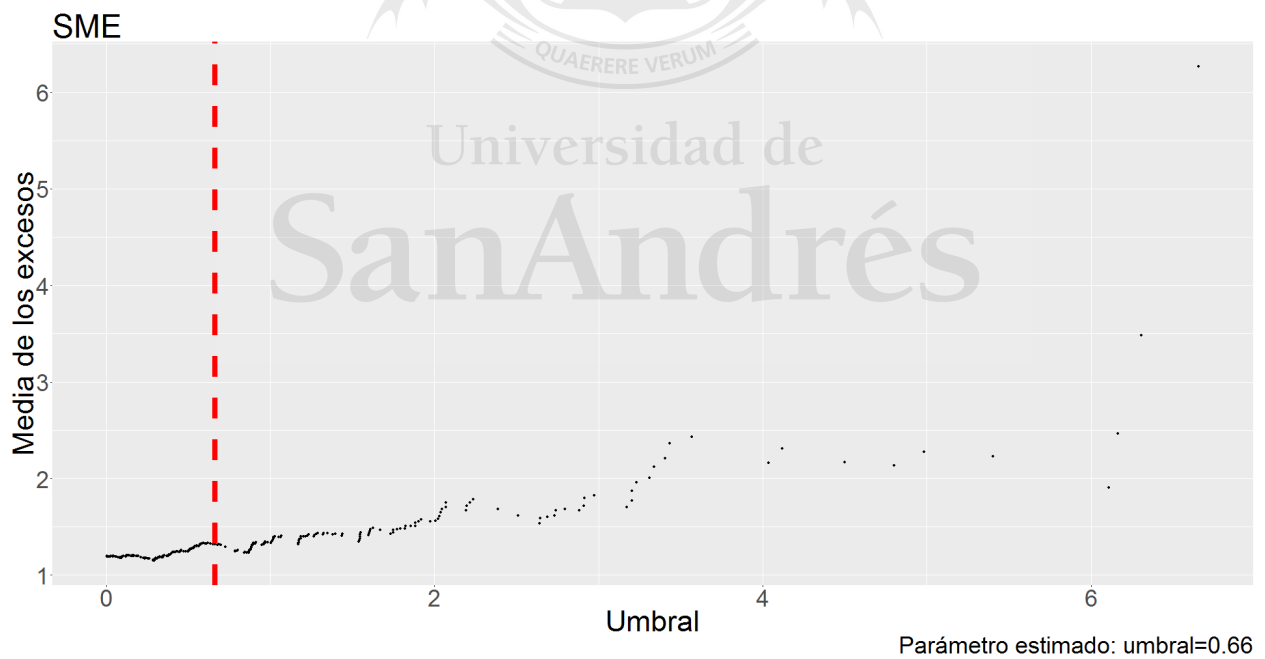
Para la serie más corta (250 obs), el método POT falla las estimaciones de $ES_{95\%}$, $VaR_{99\%}$ y $ES_{99\%}$, pese a que el método asume una distribución igual a la que subyace a la serie de datos, con un error en la medida más extrema de un 20% respecto de la estimación hecha para la serie de validación (la de 100000 obs). Sin embargo, estima razonablemente el riesgo en la serie de

Caso: $GPD(\text{loc}=0.0, \text{shape}=0.2, \text{scale}=0.9)$, 5000 obs.



(a) Caso $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, 5000 obs

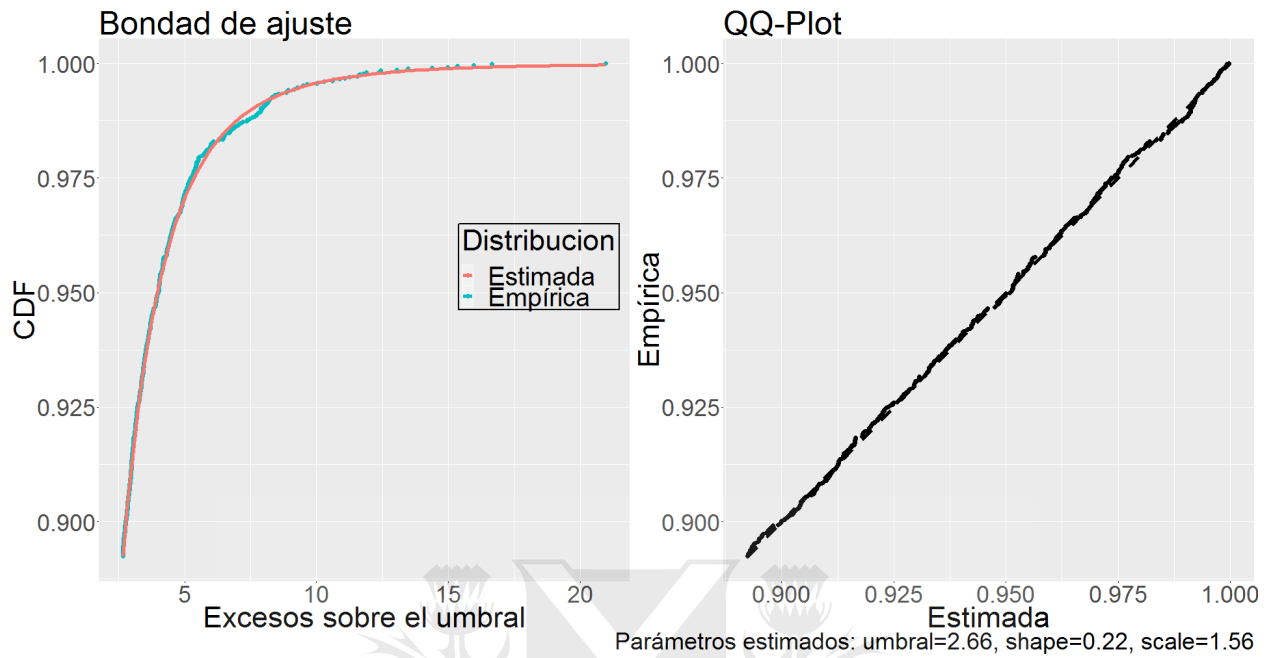
Caso: $GPD(\text{loc}=0.0, \text{shape}=0.2, \text{scale}=0.9)$, 250 obs.



(b) Caso $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, 250 obs

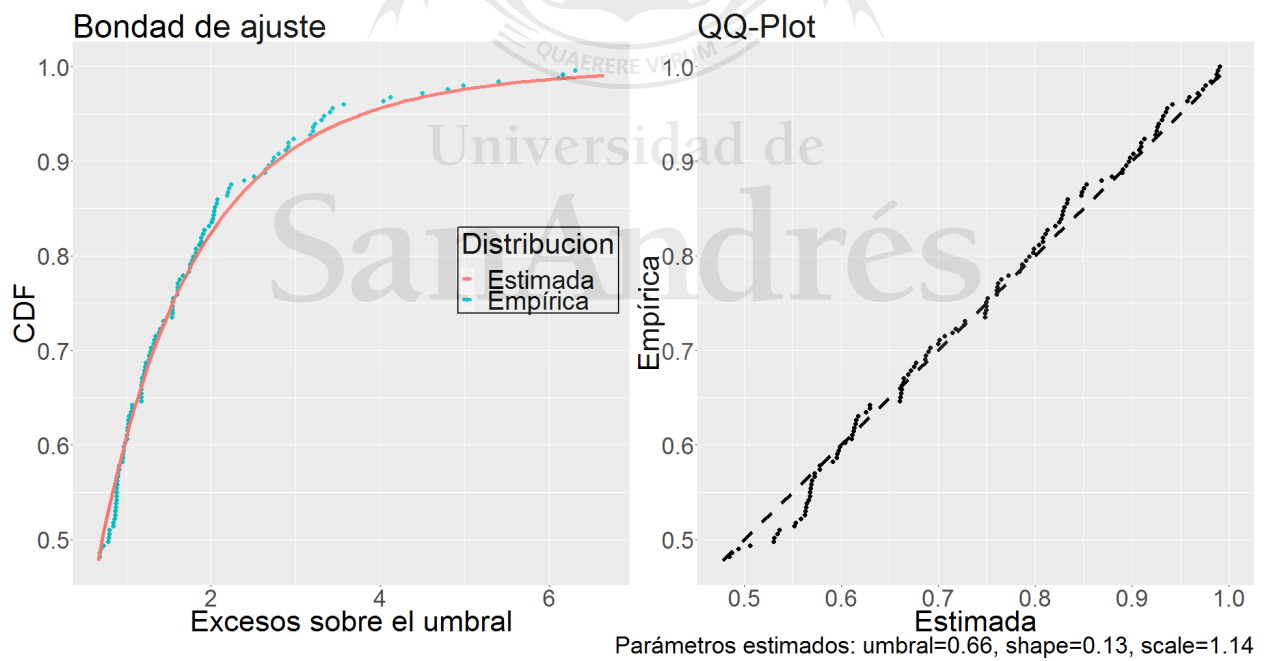
Figura 3.11: Gráfico SME. Se observa un comportamiento prácticamente lineal, y que el algoritmo identifica relativamente rápido que la serie de datos se comporta como una GPD, motivo por el cual el umbral estimado resulta bajo.

Caso: $GPD(\text{loc}=0.0, \text{shape}=0.2, \text{scale}=0.9)$, 5000 obs.



(a) Caso $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, 5000 obs

Caso: $GPD(\text{loc}=0.0, \text{shape}=0.2, \text{scale}=0.9)$, 250 obs.



(b) Caso $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, 250 obs

Figura 3.12: Bondad de ajuste de la GPD estimada. Se observa un muy buen ajuste de los datos, tanto en la cdf (izquierda) como en el qq-plot (derecha), incluso para la serie más corta (abajo).

Método	VaR _{95%}	VaR _{99%}	ES _{95%}	ES _{99%}	Tiempo[s]
HS	4.050	7.890	6.634	11.707	0.050
MV	4.033	5.204	4.751	5.786	0.000
POT	4.052	7.882	6.629	11.735	209.710

Tabla 3.1: Estimación del riesgo para el Caso GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), 100000 obs mediante los tres métodos empleados.

Método	VaR _{95%}	VaR _{99%}	ES _{95%}	ES _{99%}	Tiempo[s]
HS	4.011	7.895	6.330	10.757	0.000
MV	3.768	4.844	4.428	5.379	0.000
POT	3.972	7.550	6.349	10.947	3.510

Tabla 3.2: Estimación del riesgo para el Caso GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), 5000 obs mediante los tres métodos empleados.

Método	VaR _{95%}	VaR _{99%}	ES _{95%}	ES _{99%}	Tiempo[s]
HS	3.434	6.308	5.797	9.789	0.020
MV	3.522	4.488	4.114	4.969	0.000
POT	3.808	6.590	5.594	8.794	0.160

Tabla 3.3: Estimación del riesgo para el Caso GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), 250 obs mediante los tres métodos empleados.

longitud intermedia (5000 obs), con un error en la medida más extrema menor a 10%. Finalmente, el método MV sólo logra capturar el VaR_{95%} en la muestra más larga (5000 obs), subestimando las otras medidas de riesgo en al menos un 50%. Esto se debe a que este modelo supone una distribución con colas más livianas que la distribución subyacente analizada.

Distribución normal En la Figura 3.13a presentamos el gráfico SME correspondiente al Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 5000 obs, en tanto que en la Figura 3.13b presentamos el correspondiente al Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 250 obs. Ambos repiten el comportamiento ya observado en la Figura 3.5: pendiente negativa, lo que sugiere que la estimación tendrá un parámetro de forma $\epsilon < 0$, es ruidoso para los candidatos superiores (para los cuales el promedio se realiza entre pocos valores muy dispersos), presenta una región *lineal* para candidatos no tan elevados, y se aparta del comportamiento

lineal para candidatos aún menores. En ambas figuras se muestra el umbral elegido, a partir de los cuales construimos la serie de los excesos sobre un umbral y estimamos P_u . En tercera instancia estimamos el parámetro de forma (ϵ) y el parámetro de escala (σ) ajustando mediante máxima log-verosimilitud una GPD a la serie de excesos, quedando así definida la estimación de la distribución límite de los excesos sobre un umbral. La bondad de dicho ajuste es mostrada en la Figura 3.14a para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 5000 obs y en la Figura 3.14b para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 250 obs. Se observa un muy buen ajuste de los datos para la serie más larga (arriba), no así para la serie más corta, que de todas formas parece razonable en términos del qq-plot; de todas formas, el terminar por encima de la línea punteada denota que sobreestimaré el riesgo extremo.

Las estimaciones de las medidas de riesgo VaR y ES obtenidas mediante los tres modelos empleados para dos valores del nivel de confianza (α) son mostradas en la Tabla 3.5 para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 5000 obs y en la Tabla 3.6 para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 250 obs. Adicionalmente, a modo de referencia, incluimos en la Tabla 3.4 los resultados obtenidos para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 100000 obs. Debido a que el método MV asume una distribución idéntica a la estudiada, sus estimaciones de riesgo son precisas para ambos niveles de confianza y relativamente independientes de la cantidad de observaciones de la muestra. Los métodos HS y POT logran también capturar ambas medidas de riesgo para ambos niveles de confianza, incluso para la muestra más reducida, no observándose un beneficio apreciable pese a la mayor complejidad del método POT.

Método	VaR _{95%}	VaR _{99%}	ES _{95%}	ES _{99%}	Tiempo[s]
HS	1.650	2.330	2.070	2.669	0.030
MV	1.647	2.329	2.065	2.669	0.010
POT	1.644	2.346	2.071	2.686	211.490

Tabla 3.4: Estimación del riesgo para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 100000 obs mediante los tres métodos empleados.

Método	VaR _{95%}	VaR _{99%}	ES _{95%}	ES _{99%}	Tiempo[s]
HS	1.595	2.271	2.029	2.602	0.020
MV	1.625	2.296	2.037	2.630	0.000
POT	1.615	2.295	2.026	2.576	3.760

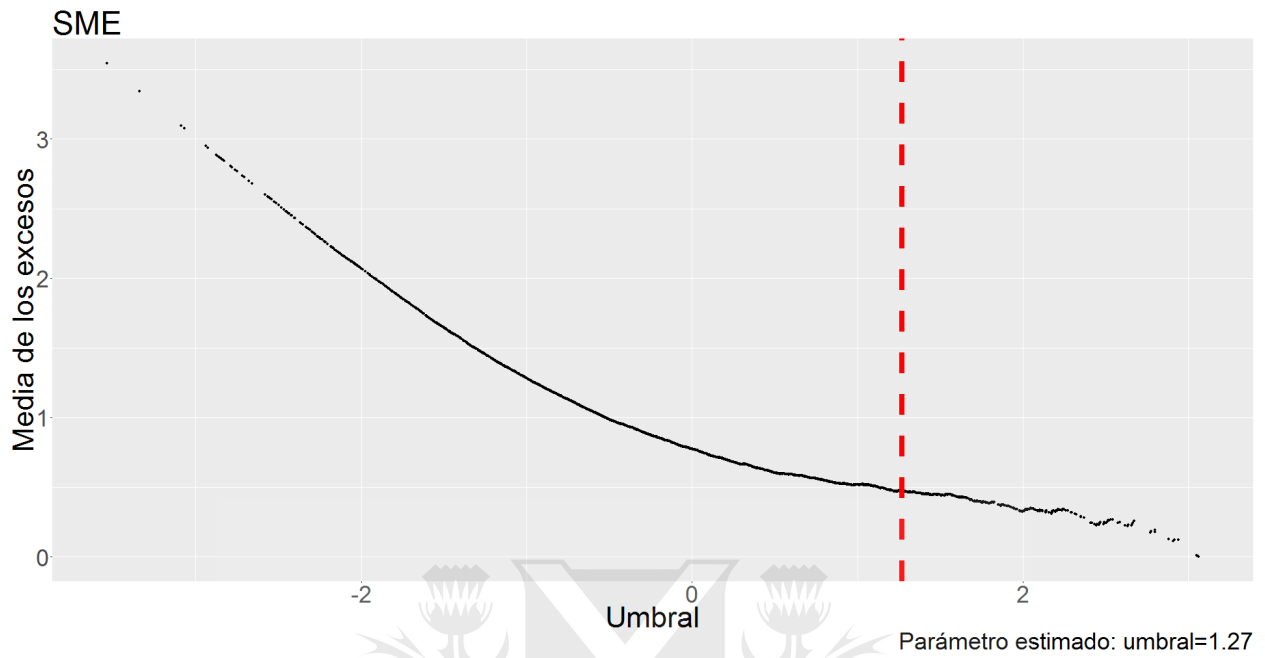
Tabla 3.5: Estimación del riesgo para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 5000 obs mediante los tres métodos empleados.

Método	VaR _{95%}	VaR _{99%}	ES _{95%}	ES _{99%}	Tiempo[s]
HS	1.558	2.147	2.006	2.647	0.010
MV	1.660	2.364	2.091	2.713	0.000
POT	1.704	2.355	2.096	2.593	0.250

Tabla 3.6: Estimación del riesgo para el Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 250 obs mediante los tres métodos empleados.

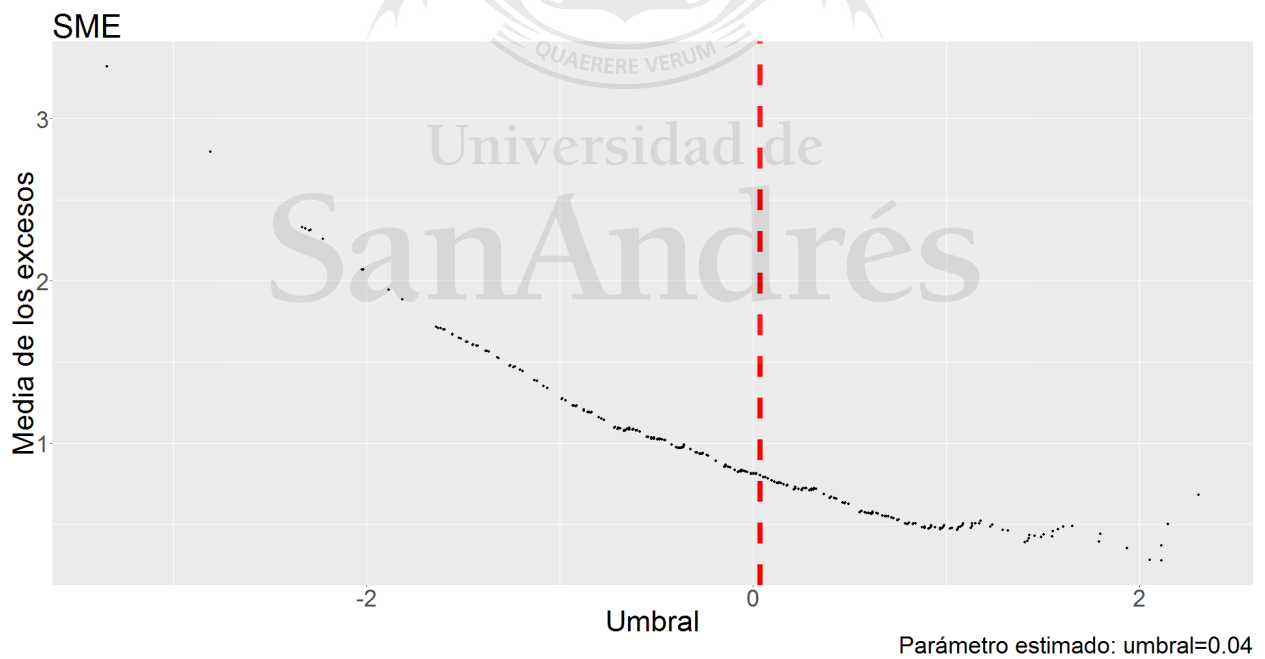


Caso: $N(\mu=0.0, \sigma=1.0)$, 5000 obs.



(a) Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 5000 obs

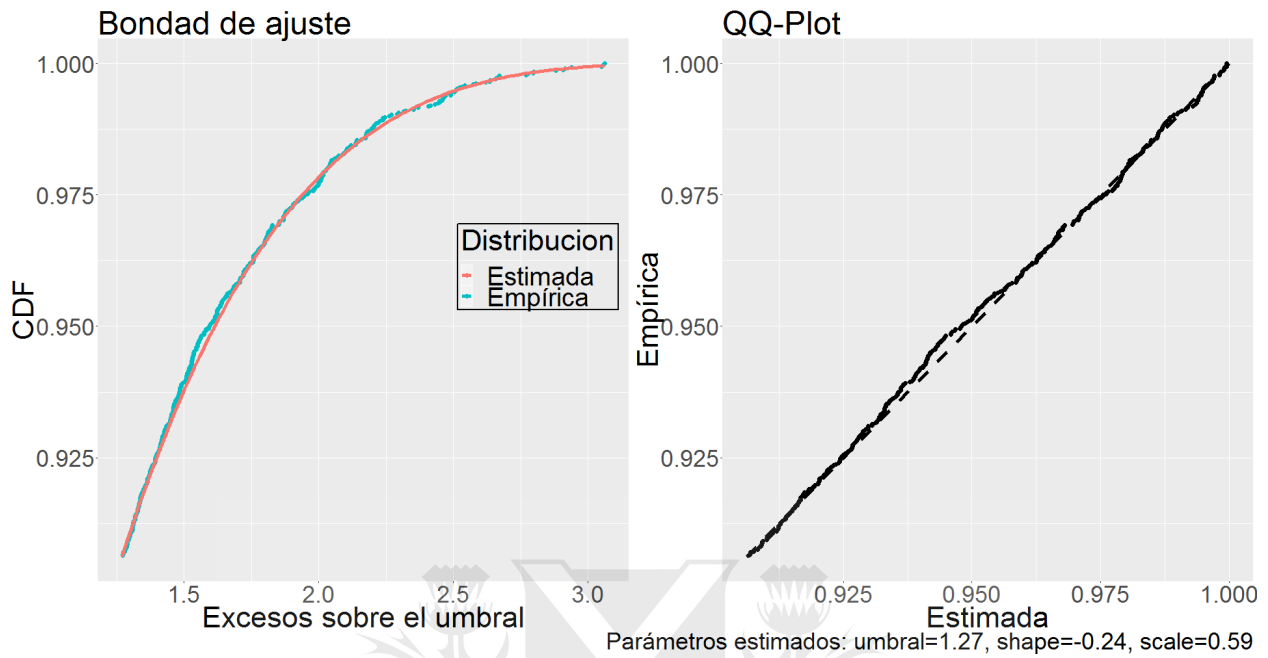
Caso: $N(\mu=0.0, \sigma=1.0)$, 250 obs.



(b) Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 250 obs

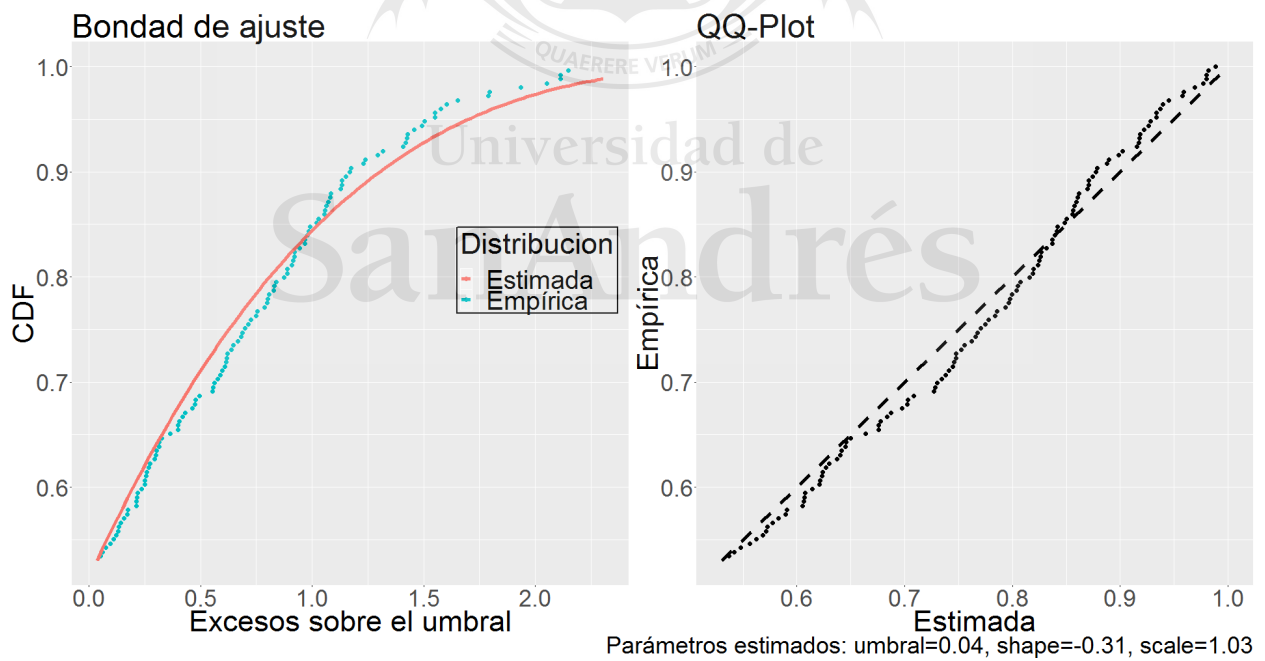
Figura 3.13: Gráfico SME. Ambos repiten el comportamiento ya observado en la Figura 3.5: pendiente negativa (por lo que la estimación tendrá un $\epsilon < 0$), ruidoso para los candidatos superiores, presenta una región *lineal* para candidatos no tan elevados, y se aparta del comportamiento lineal para los candidatos menores. Se muestra además el umbral identificado por el algoritmo.

Caso: $N(\mu=0.0, \sigma=1.0)$, 5000 obs.



(a) Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 5000 obs

Caso: $N(\mu=0.0, \sigma=1.0)$, 250 obs.



(b) Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 250 obs

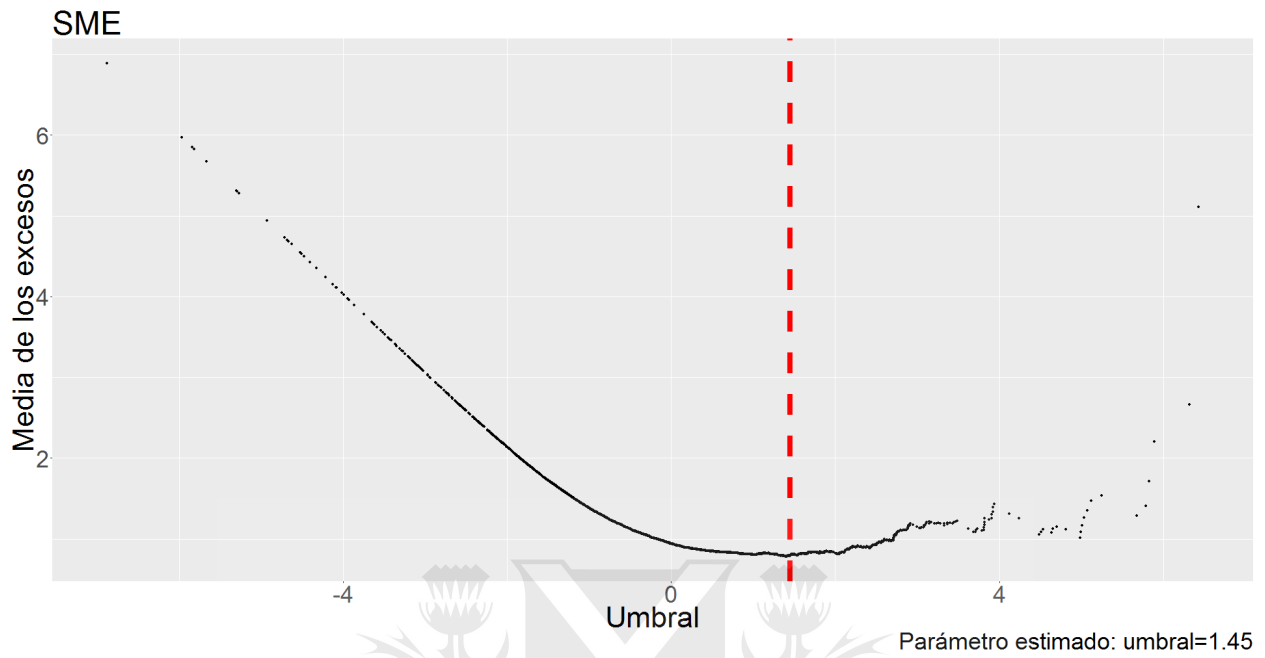
Figura 3.14: Bondad de ajuste de la GPD estimada. Se observa un muy buen ajuste de los datos para la serie más larga (arriba), tanto en la cdf (izquierda) como en el qq-plot (derecha). No tan bueno es el ajuste de la serie más corta (abajo); sin embargo, al terminar el qq-plot por encima de la línea punteada denota que sobreestimaré el riesgo extremo.

Distribución t-Student En la Figura 3.15a presentamos el gráfico SME correspondiente al Caso $tStudent(\nu = 5)$, 5000 obs, en tanto que en la Figura 3.15b presentamos el correspondiente al Caso $tStudent(\nu = 5)$, 250 obs. El segundo de ellos, que posee menor cantidad de observaciones, presenta un comportamiento similar al observado al analizar la distribución normal, en el que la zona lineal estimada posee pendiente negativa (y por ende parámetro de forma negativo). Por el contrario, el primero de ellos presenta un comportamiento intermedio al observado entre la serie con 100000 obs y aquella con 250 obs, y presenta una región lineal con pendiente prácticamente nula. Esto confirma la noción de que a mayor el peso de las colas, mayor el ϵ de la GPD que ajusta sus excesos. En ambas figuras se muestra el umbral elegido, a partir de los cuales construimos la serie de los excesos sobre un umbral y estimamos P_u . En tercera instancia estimamos el parámetro de forma (ϵ) y el parámetro de escala (σ) ajustando mediante máxima log-verosimilitud una GPD a la serie de excesos, quedando así definida la estimación de la distribución límite de los excesos sobre un umbral. La bondad de dicho ajuste es mostrada en la Figura 3.16a para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 5000 obs y en la Figura 3.16b para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 250 obs. Se observa un muy buen ajuste de los datos para ambas series.

Las estimaciones de las medidas de riesgo VaR y ES son mostradas en la Tabla 3.8 para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 5000 obs y en la Tabla 3.9 para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 250 obs. Adicionalmente, a modo de referencia, incluimos en la Tabla 3.7 los resultados obtenidos para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 100000 obs. Debido a que el método MV asume una distribución cuyas colas son más livianas que la distribución analizada, se observa en los resultados que este método subestima el riesgo de todas las medidas superiores a $VaR_{95\%}$. Sin embargo, este comportamiento es observado también para los otros dos métodos cuando se analiza la muestra más pequeña. Curiosamente, el método POT es el que peor estima el $ES_{99\%}$ en la muestra de 250 obs, efecto que prácticamente ya no se observa en la muestra de 5000 obs.

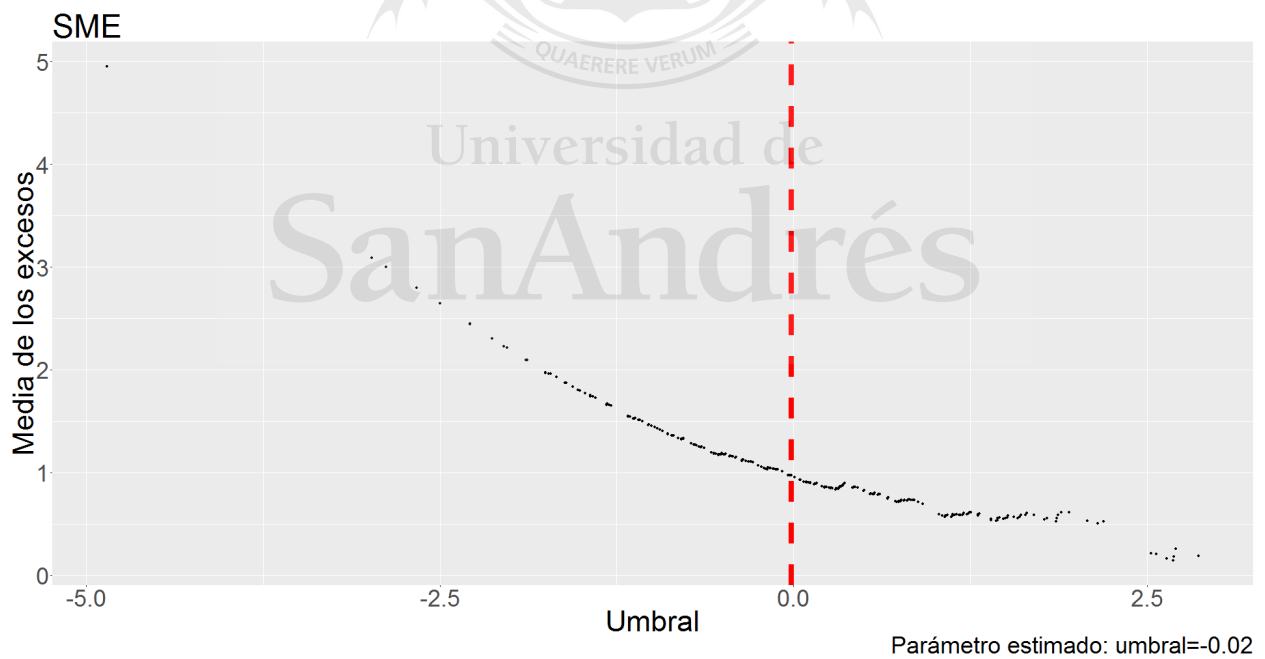
Dado que resulta claro que ninguno de los tres métodos está convergido para la muestra más pequeña, dedicaremos parte de la próxima sección a estudiar la sensibilidad de cada modelo ante el tamaño de la muestra.

Caso: $tStudent(df=5)$, 5000 obs.



(a) Caso $tStudent(\nu = 5)$, 5000 obs

Caso: $tStudent(df=5)$, 250 obs.



(b) Caso $tStudent(\nu = 5)$, 250 obs

Figura 3.15: Gráfico SME. Se observa un comportamiento ruidoso para los candidatos superiores, precedido por una región lineal de pendiente dependiente del largo de la muestra. Se muestra además el umbral identificado por el algoritmo.

Método	VaR _{95%}	VaR _{99%}	ES _{95%}	ES _{99%}	Tiempo[s]
HS	2.015	3.366	2.885	4.440	0.030
MV	2.120	2.999	2.659	3.436	0.010
POT	2.012	3.407	2.896	4.416	212.420

Tabla 3.7: Estimación del riesgo para el Caso tStudent($\nu = 5$), 100000 obs mediante los tres métodos empleados.

Método	VaR _{95%}	VaR _{99%}	ES _{95%}	ES _{99%}	Tiempo[s]
HS	2.033	3.254	2.847	4.448	0.000
MV	2.063	2.915	2.586	3.339	0.000
POT	1.986	3.341	2.853	4.390	3.630

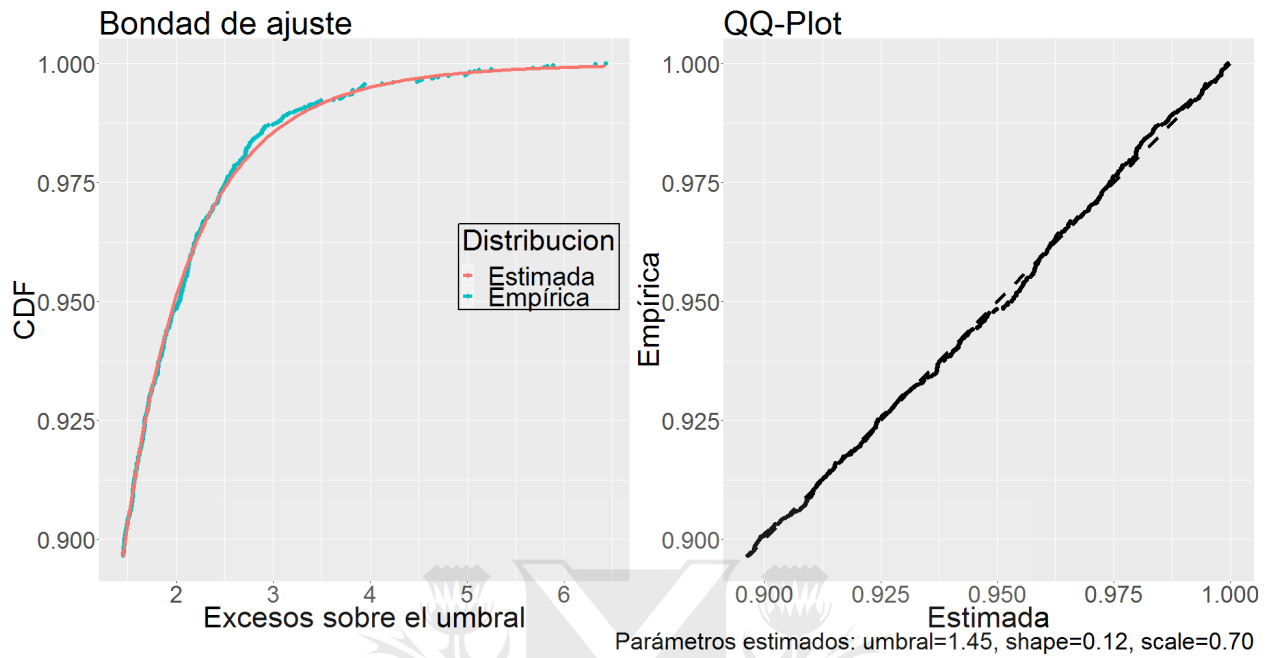
Tabla 3.8: Estimación del riesgo para el Caso tStudent($\nu = 5$), 5000 obs mediante los tres métodos empleados.

Método	VaR _{95%}	VaR _{99%}	ES _{95%}	ES _{99%}	Tiempo[s]
HS	1.893	2.701	2.508	2.959	0.000
MV	2.036	2.847	2.533	3.251	0.020
POT	2.065	2.694	2.444	2.893	0.230

Tabla 3.9: Estimación del riesgo para el Caso tStudent($\nu = 5$), 250 obs mediante los tres métodos empleados.

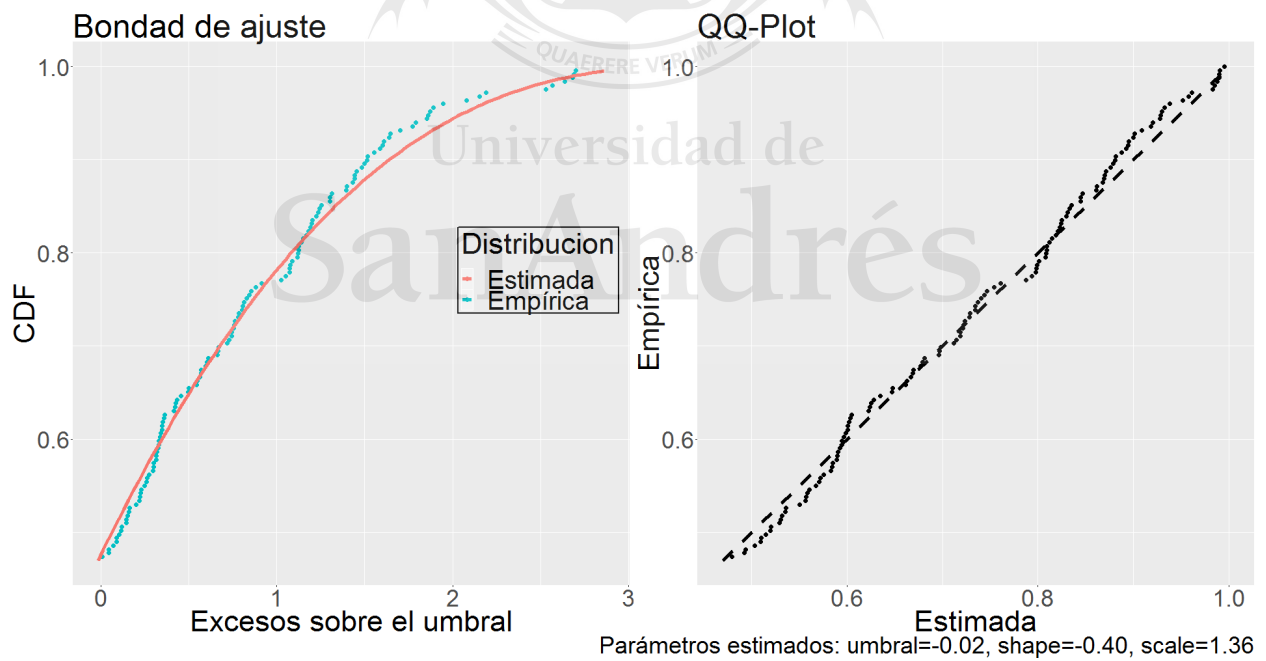
Conclusiones, aplicación del método En esta etapa hemos analizado series cuya longitud no es necesariamente suficiente para capturar en detalle la distribución subyacente, usando longitudes similares a las disponibles en la práctica de la gestión del riesgo. Mediante este análisis hemos buscado estudiar la capacidad de cada método de producir estimaciones adecuadas contando con relativamente poca información. Encontramos los resultados alineados a lo esperado para las muestras de 5000 obs, en tanto que las estimaciones han sido pobres para la muestra de 250 obs, dado que los métodos no se encontraban convergidos. Notamos además que los métodos HS y POT poseen similares capacidades de ajuste de la distribución subyacente implícita en las series de datos analizadas. Sin embargo, no hemos encontrado hasta aquí un beneficio práctico por parte del método POT que justifique su mayor complejidad.

Caso: $tStudent(df=5)$, 5000 obs.



(a) Caso $tStudent(\nu = 5)$, 5000 obs

Caso: $tStudent(df=5)$, 250 obs.



(b) Caso $tStudent(\nu = 5)$, 250 obs

Figura 3.16: Bondad de ajuste de la GPD estimada. Se observa un muy buen ajuste de los datos para la serie más larga (arriba), tanto en la cdf (izquierda) como en el qq-plot (derecha). No tan bueno es el ajuste de la serie más corta (abajo); sin embargo, al terminar el qq-plot por encima de la línea punteada denota que sobreestimaré el riesgo extremo.

3.3.3 Sensibilidades

Un último punto que cubriremos antes de finalizar esta exposición es el análisis de la sensibilidad del método estudiado. En particular, nos concentraremos en dos sensibilidades: ante el tamaño de la muestra y ante la elección del umbral.

Sensibilidad ante el tamaño de la muestra Al final de la sección anterior hemos notado que para la muestra más pequeña, ninguno de los tres métodos empleados había convergido. Por lo tanto nos interesa conocer el tamaño muestral mínimo que requiere cada método para converger. A tal fin generaremos, para cada familia, 5 muestras de cada uno de los largos estudiados, a saber: 1×10^5 , 1×10^4 , 5×10^3 , 1×10^3 , 250 y 100 observaciones. Los resultados obtenidos son mostrados en la Figura 3.17 para la familia GPD($\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9$), la Figura 3.18 para la familia N($\mu = 0, \sigma = 1$) y la Figura 3.19 para la familia tStudent($\nu = 5$). En cada una de ellas se estudia la convergencia de cada método en el cálculo de cada una de las medidas de riesgo estudiadas, para los niveles de confianza usados anteriormente. Adicionalmente, incluimos el promedio entre las 5 estimaciones de cada medida obtenida mediante cada método.

En general observamos que el método MV converge más rápidamente que los otros dos (aunque en algunos casos al valor erróneo). Los otros dos métodos convergen en media en forma similar, aunque el método HS parece tener mayor dispersión que el método POT. Sin embargo, desde el punto de vista de la convergencia no parece haber una clara ventaja entre ambos. Finalmente notamos que a partir de 5000 obs, los tres métodos están razonablemente convergidos.

Sensibilidad ante la elección del umbral Tanto durante la presentación teórica del método excesos sobre un umbral (POT) como durante el desarrollo práctico presentado hasta ahora, un parámetro en particular ha recibido una estimación menos rigurosa que el resto: el umbral (u). Por lo tanto nos interesa estudiar qué tan sensible es la estimación del riesgo ante perturbaciones en este parámetro; esperando que el método sea lo suficientemente robusto para que los resultados no sean drásticamente distintos en función del umbral elegido.

Caso: $GPD(\text{loc}=0.0, \text{shape}=0.2, \text{scale}=0.9)$

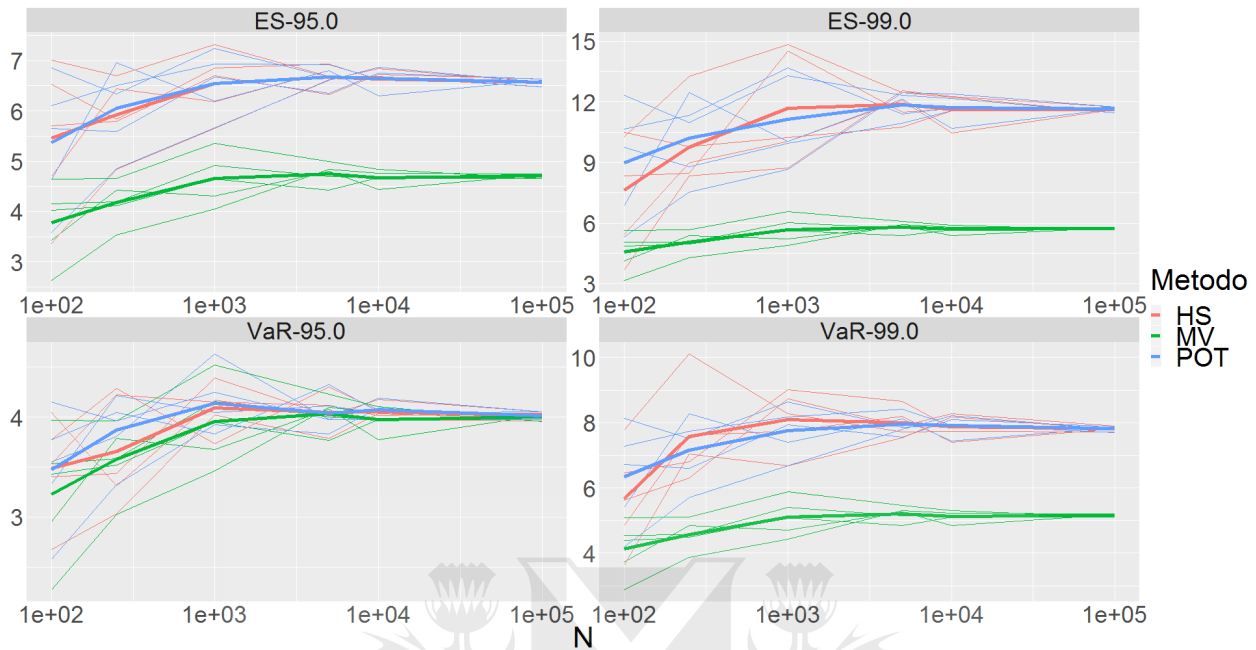


Figura 3.17: Sensibilidad de la $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$ ante el tamaño de la muestra.

Caso: $N(\mu=0.0, \sigma=1.0)$

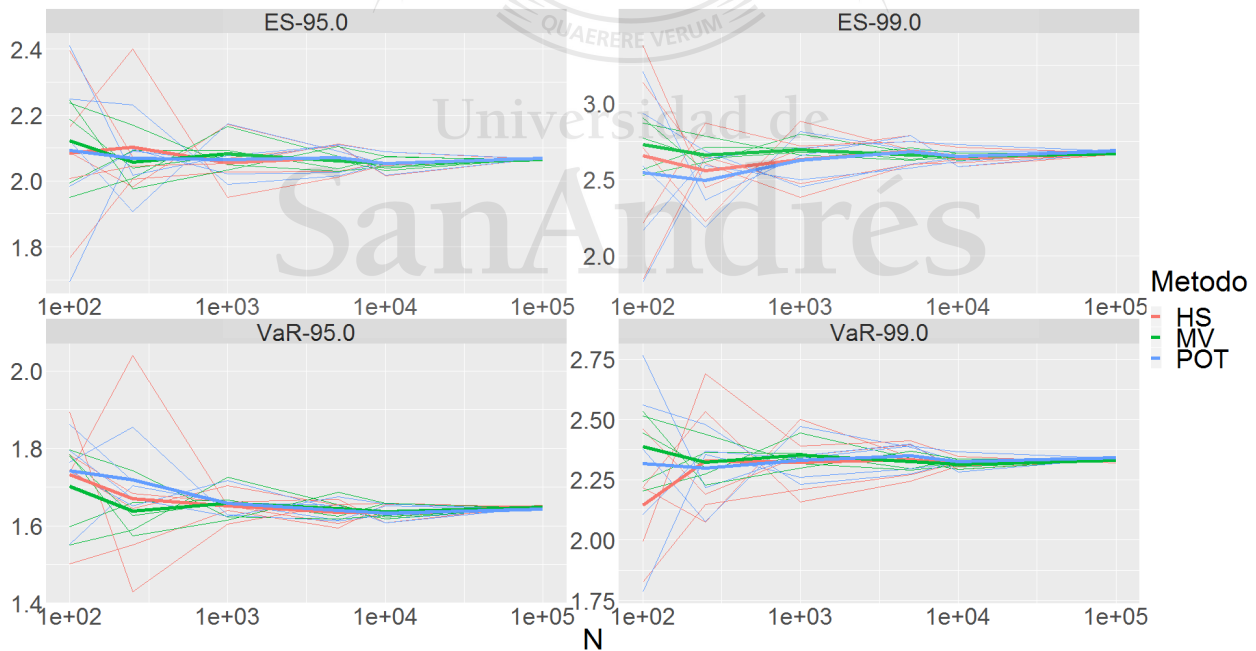


Figura 3.18: Sensibilidad de la $N(\mu = 0, \sigma = 1)$ ante el tamaño de la muestra.

Dado que hemos visto que para 5000 obs. los tres métodos pueden considerarse razonablemente convergidos, estudiaremos a continuación la sensibilidad de las medidas de riesgo estimadas mediante el método POT usando las muestras de 5000 obs. de cada familia estudiada.

Caso: $tStudent(df=5)$

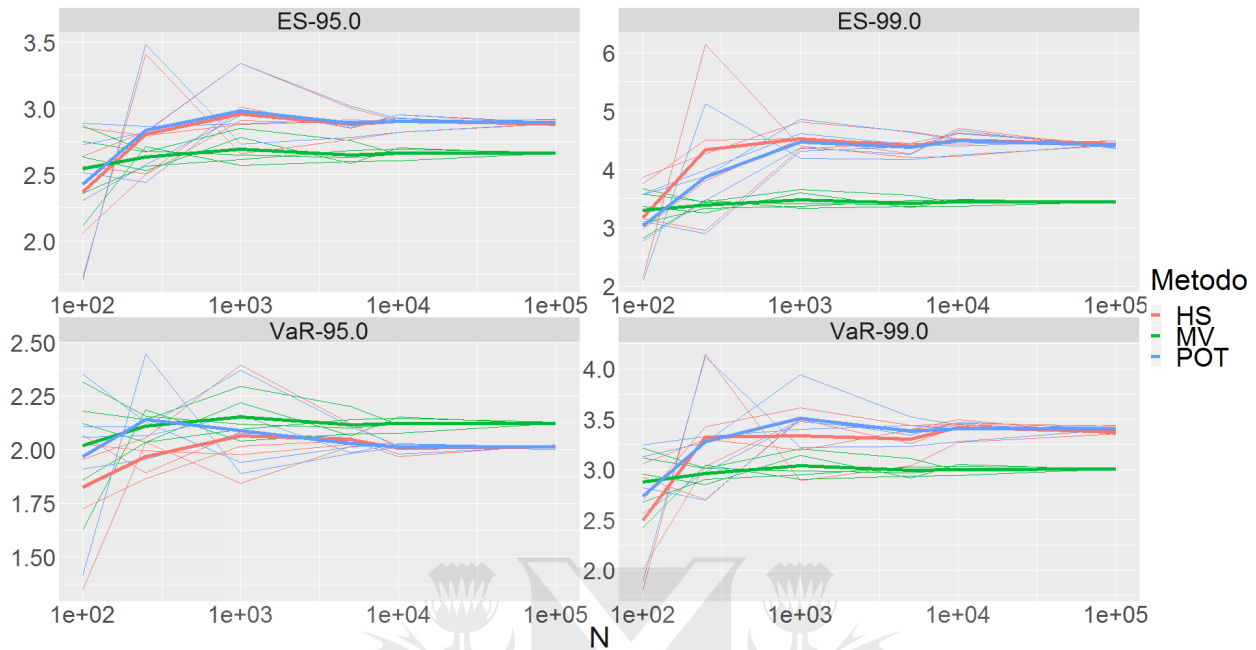


Figura 3.19: Sensibilidad de la $tStudent(\nu = 5)$ ante el tamaño de la muestra.

Los resultados obtenidos son mostrados en la Figura 3.20 para la familia $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, la Figura 3.21 para la familia $N(\mu = 0, \sigma = 1)$ y la Figura 3.22 para la familia $tStudent(\nu = 5)$. Incluimos, a modo de referencia el umbral estimado y la medición de riesgo correspondiente a tal umbral. En general observamos que las estimaciones de riesgo varían a lo sumo un 5% cuando nos movemos entre los valores positivos de las series analizadas, y aún menores cuando nos movemos por encima del umbral elegido, llegando incluso a los umbrales más altos en los cuales ya hemos observamos que el gráfico SME es ruidoso y en consecuencia el ajuste por máxima log-verosimilitud (MLL) se realiza sobre pocas muestras. Por este motivo, si bien la estimación del umbral es un punto a mejorar en cuanto a precisión y tiempo de convergencia, hemos decidido desestimar en esta etapa cualquier mejora al algoritmo que lo estima.

Caso: $GPD(\text{loc}=0.0, \text{shape}=0.2, \text{scale}=0.9)$, 5000 obs.

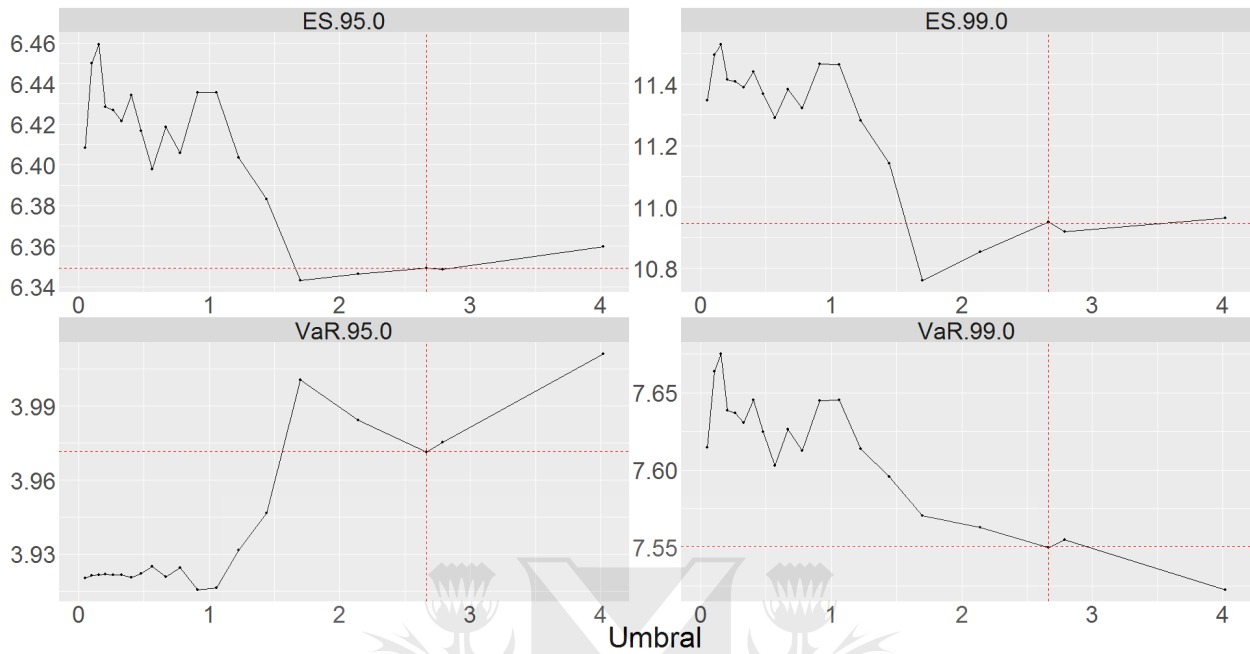


Figura 3.20: Sensibilidad de las estimaciones de riesgo del Caso $GPD(\mu = 0, \epsilon = 0.2, \sigma = 0.9)$, 5000 obs ante el umbral elegido.

Caso: $N(\mu=0.0, \sigma=1.0)$, 5000 obs.

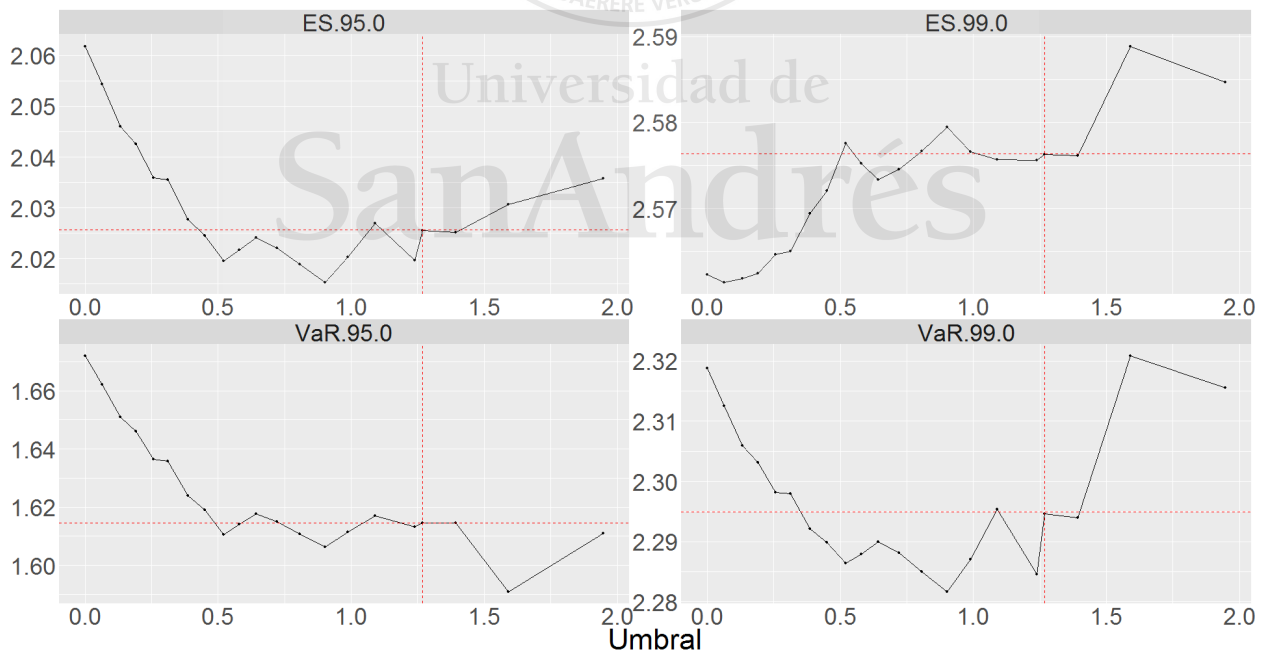


Figura 3.21: Sensibilidad de las estimaciones de riesgo del Caso $N(\mu = 0, \sigma = 1)$, 5000 obs ante el umbral elegido.

Caso: $tStudent(df=5)$, 5000 obs.

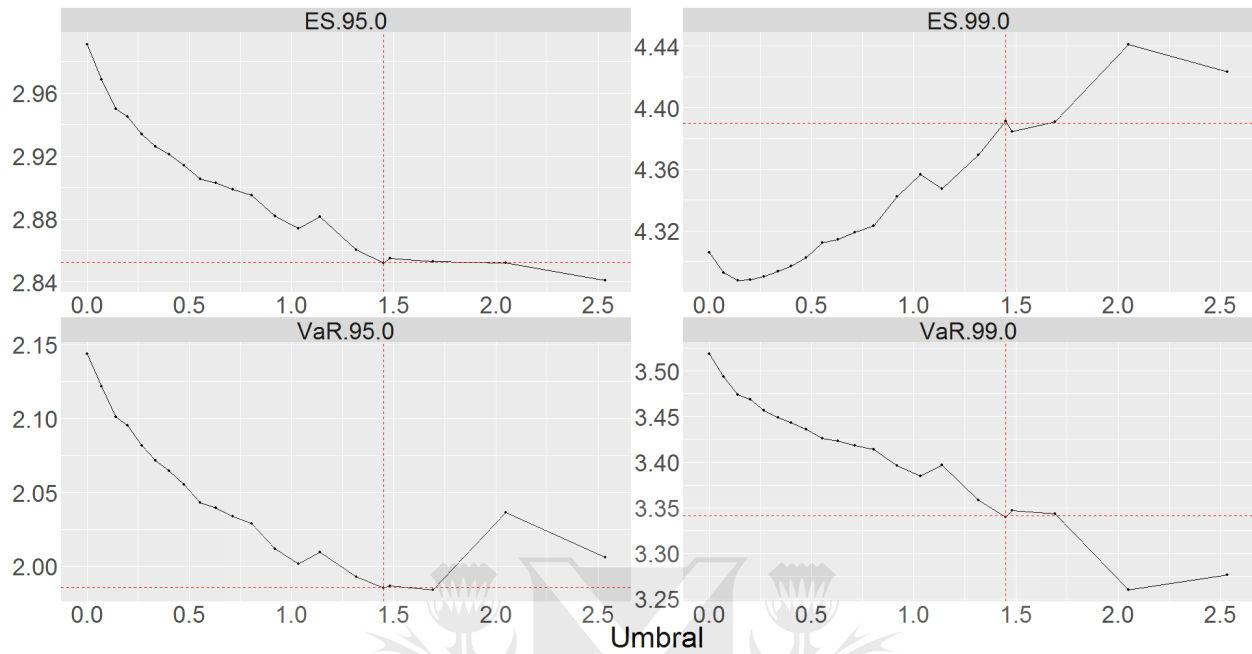


Figura 3.22: Sensibilidad de las estimaciones de riesgo del Caso $tStudent(\nu = 5)$, 5000 obs ante el umbral elegido.

Capítulo 4

Backtesting

En el capítulo anterior hemos empleado varias metodologías para estimar, a partir de una serie de realizaciones de las pérdidas de un portafolio y dados un nivel de confianza (α) y un horizonte temporal (Δ), medidas de riesgo de su distribución de pérdidas (F_L) futuras, basados en la información \mathbb{F} contenida en la serie de observaciones. Sin embargo, sólo hemos testeado la capacidad de cada método de capturar la distribución subyacente a *toda* la serie analizada, no habiendo testeado aún su capacidad de *predecir* nuevas observaciones (lo que en definitiva constituye la razón de ser de la estimación del riesgo). Abordaremos este tema en el presente capítulo.

Consideremos una serie *temporal* arbitraria de realizaciones de las pérdidas de un portafolio, y elijamos en ella un dado momento t en el que estimamos las medidas de riesgo, condicionales a la información disponible \mathbb{F}_t (i.e. la historia desde el inicio de la serie temporal hasta el momento t) para un nivel de confianza (α) y un horizonte temporal igual al momento futuro $t + 1$, del cual conceptualmente no poseemos ninguna información determinística. Asumamos a continuación una evolución temporal hasta alcanzar el horizonte temporal propuesto, de modo que su pérdida realizada se vuelve conocida. En dicho momento, la estimación de riesgo (condicional a la información conocida hasta el momento anterior) puede ser comparada con la pérdida realizada en el momento presente; al hacerlo sabremos si la estimación de riesgo fue excedida o no. A su vez, esta nueva observación (i.e. la pérdida realizada) permite reestimar las medidas de riesgo consideradas usando la información disponible más reciente. Cuando este procedimiento es implementado en forma continua (como es el caso de las instituciones financieras), dicha comparación brinda la posibilidad de analizar *qué tan buenas* son las predicciones del método empleado.

Para ejemplificar este proceso consideremos una de las series de datos usadas en el capítulo anterior. Dado que de las tres familias de distribuciones analizadas (ver la Sección 3.3) dos coinciden con la distribución subyacente de dos de los métodos empleados, usaremos para este ejercicio la tercera de ellas (la distribución t-Student). A su vez, dado que hemos visto en el capítulo anterior

(ver la Sección 3.3.2) que una convergencia razonable se logra con muestras de entre 1000 y 5000 observaciones, elegimos para este ejercicio la serie de datos generada numéricamente a la que nos hemos referido en el capítulo anterior mediante Caso tStudent($\nu = 5$), 5000 obs. Entonces para cada paso de la serie temporal debemos realizar las siguientes dos operaciones:

- comparar la estimación de riesgo realizada en el paso anterior con la pérdida realizada en el paso actual. A partir de esta comparación se genera la serie de las pérdidas que exceden a la estimación de VaR.
- usar la información disponible hasta el paso actual para estimar el riesgo con un horizonte en el paso siguiente. La información a considerar puede ser **toda** la historia previa, o alguna ventana temporal reciente cuyo tamaño se considere apropiado.

Nota 7. *En la estimación del riesgo efectuada en cada paso usaremos una ventana histórica móvil (rolling window) de longitud igual a la mitad de la longitud total de la serie.*

En la Figura 4.1 mostramos la serie de pérdidas considerada, y superpuestas las estimaciones de VaR y ES obtenidas mediante los tres métodos estudiados para dos valores del nivel de confianza. Dado que para estimar cada medida de riesgo usamos una ventana temporal igual a la mitad de la serie, sólo la segunda mitad de la serie posee estimaciones de riesgo. En la Figura 4.2 mostramos en detalle dicha región, distinguiendo esta vez entre cada método empleado, y resaltando para cada caso aquellas realizaciones que exceden la estimación de VaR.

A partir de la Figura 4.2 construimos algunas estadísticas básicas (poco rigurosas pero útiles a fines didácticos) de la distribución de los excesos a la estimación de VaR, y las presentamos en la Tabla 4.1. En ella observamos un comportamiento muy similar entre las estimaciones de los métodos HS y POT, y a su vez bien diferenciado de aquél del método MV; por tal motivo sólo compararemos los últimos dos. Para las estimaciones al 95%, ambos métodos presentan una tasa de excesos muy similar $1 - \alpha$, por lo que ambos presentan valores similares para el promedio de las pérdidas que exceden la estimación de VaR (de hecho, MV presenta una tasa de excesos

Caso: $tStudent(df=5)$, 5000 obs.

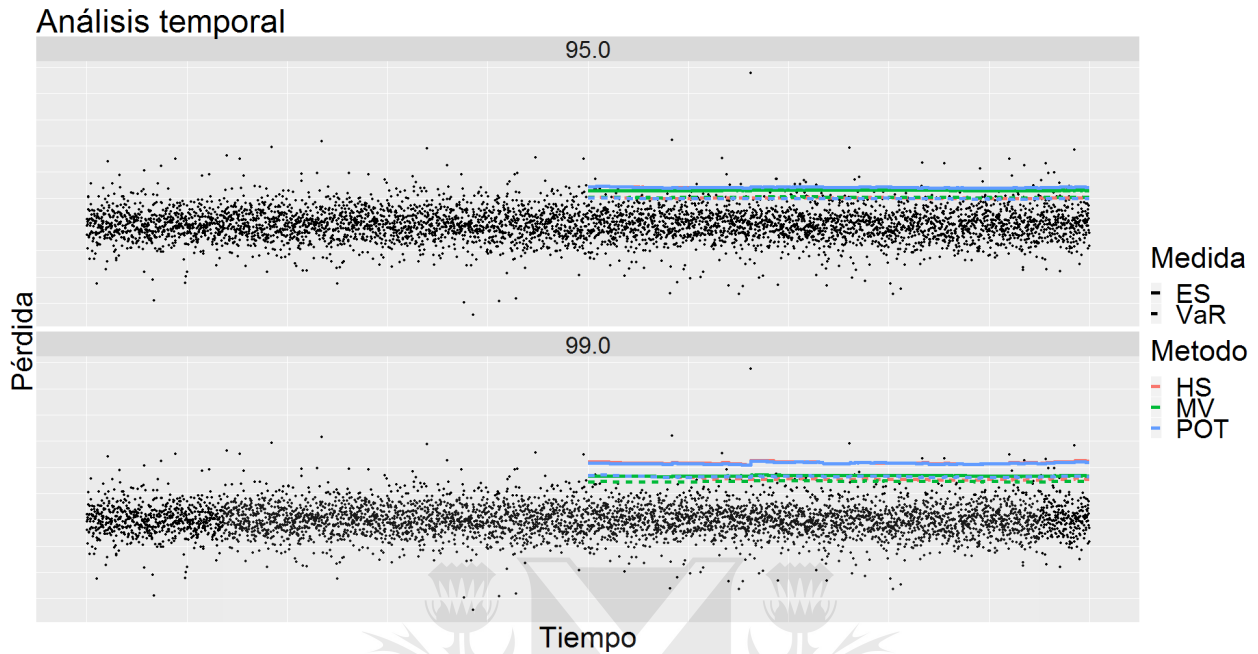


Figura 4.1: Análisis temporal del Caso $tStudent(\nu = 5)$, 5000 obs: estimación del riesgo.

Caso: $tStudent(df=5)$, 5000 obs.

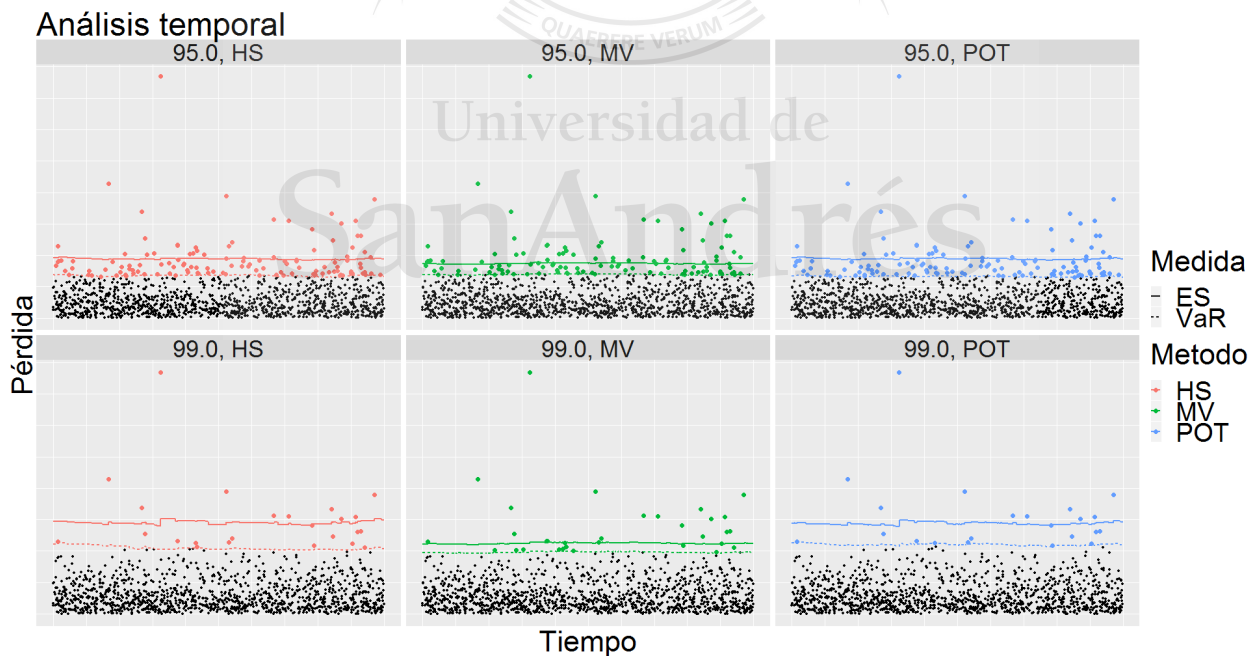


Figura 4.2: Análisis temporal del Caso $tStudent(\nu = 5)$, 5000 obs: excepciones a la estimación de VaR.

ligeramente menor, por lo que presenta un promedio de las pérdidas ligeramente mayor). Finalmente, el promedio de las estimaciones de ES del método MV es mucho menor que el promedio

de las pérdidas que exceden su estimación de VaR; en tanto que para el método POT, el promedio de las estimaciones de ES es prácticamente igual que el promedio de las pérdidas que exceden su estimación de VaR. Es decir, observamos que para este nivel de confianza ambos estiman adecuadamente el VaR pero sólo POT estima correctamente el ES.

Método	α [%]	# Excesos[%]	Media($L L > \text{VaR}$)	Media(ES)
HS	95	4.96	2.81	2.82
HS	99	1.00	4.46	4.35
MV	95	4.52	2.89	2.60
MV	99	1.28	4.15	3.36
POT	95	5.04	2.80	2.83
POT	99	0.92	4.57	4.31

Tabla 4.1: Estadísticas de la distribución de los excesos a la estimación de VaR, mediante los tres métodos empleados, para el Caso tStudent($\nu = 5$), 5000 obs.

Por otro lado, para las estimaciones al 99%, MV presenta una alta tasa de excesos (lo que implica una subestimación del VaR), en tanto que POT presenta una tasa de excesos ligeramente menor a la esperada (lo que implica una sobreestimación del VaR). En consecuencia, para el método MV, al ser VaR menor de lo esperado, el promedio de las pérdidas mayores a VaR es menor de lo esperado (i.e. a menor valor de VaR, mayor la cantidad de pérdidas que la exceden, pero de menor valor, y por ende menor su promedio). Aún así, dicho promedio es mayor al promedio de ES, por lo que claramente este método subestima el riesgo extremo. En el caso de POT, el promedio de las pérdidas mayores a VaR es mayor de lo esperado (debido a que este método sobreestima el VaR) y ligeramente superior al promedio de ES, por lo que este método estaría subestimando el riesgo dado el VaR estimado. Pero dado que el VaR estimado es mayor al esperado (dado que la fracción de excesos es inferior a la esperada), bien podría la estimación de ES estar alineada con el valor esperado: la Figura 3.8 muestra que de hecho, el ES de la muestra completa prácticamente coincide con el valor promedio presentado. Notablemente, el método HS presenta prácticamente la cantidad de excesos esperada para ambos valores del nivel de confianza.

El análisis cualitativo precedente muestra que los conceptos teóricos presentados hasta ahora permiten implementar satisfactoriamente un proceso de estimación continua del riesgo, pero no permiten analizar (más que en forma básica) *qué tan buenas* fueron, a la luz de las pérdidas realizadas, las estimaciones de riesgo (i.e. analizar su *performance*).

Dicho análisis, denominado *backtesting*, requiere presentar un conjunto adicional de conceptos teóricos. Por completitud, desde el punto de vista teórico abordaremos el *backtest* tanto de VaR como de ES; no obstante sólo implementaremos tests a la estimación de ES. La exposición que presentaremos a continuación seguirá los lineamientos de Acerbi and Szekely [2014] y estará basada en el análisis de las pérdidas que exceden a la estimación de VaR (a las que nos referiremos como *excepciones a VaR*), para lo cual haremos uso de la siguiente definición.

Definición 4.0.1 (Función indicadora de una *excepción a VaR*). Sea l_{t+1} la realización a tiempo $t + 1$ de una dada $va L$, y VaR_t la estimación de VaR a tiempo t . La función indicadora de una *excepción a VaR* es definida como

$$I(l_{t+1}) = \begin{cases} 1 & l_{t+1} > VaR_t \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Metodologías de *backtesting* alternativas a la estudiada en esta sección se encuentran disponibles en la literatura; referimos al lector a Wimmerstedt [2015] y Novales Cinca and Garcia-Jorcano [2017]) para familiarizarse con ellas.

4.1 Backtesting de Valor puesto a Riesgo

Sea $VaR_{\alpha,t}$ la estimación de VaR a tiempo t con horizonte temporal en $t + 1$. Para dicho momento futuro comparamos la estimación de riesgo con la pérdida realizada: según la Definición 2.3.1, la probabilidad de ocurrencia de una excepción a VaR es $P(L_{t+1} > VaR_{\alpha,t}) = 1 - \alpha$. Sea ahora $I_{t+1} = I(L_{t+1})$ la va indicadora de una excepción a VaR, entonces el proceso $\{I_t\}_{t \in \mathbb{N}}$

será un proceso de va Bernoulli iid con probabilidad de éxito $p = 1 - \alpha$, tal como lo muestra el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Sea $\{I_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una secuencia de va Bernoulli, indicadoras de una excepción al cuantil de una distribución de pérdidas adaptadas a una filtración $\{\mathbb{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, tales que $\mathbb{E}[I_t | \mathbb{F}_{t-1}] = p > 0 \forall t$. Entonces $\{I_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es un proceso de va Bernoulli iid.*

Por lo tanto, si el método de estimación del riesgo se comporta en forma razonable, esperamos que la función indicadora de una excepción a VaR se comporte según una va Bernoulli con probabilidad de éxito $p = 1 - \alpha$. Si repetimos esta comparación para una serie de estimaciones de riesgo versus una serie de pérdidas realizadas, obtenemos como indicadores una serie de va Bernoulli iid, por lo que la cantidad esperada de excepciones en un período de longitud N responde a la expectativa de un proceso binomial, dada por $N \cdot (1 - \alpha)$. De este modo, el testeo de una estimación de VaR implica testear la serie de indicadores de una excepción a VaR en los siguientes dos aspectos:

Verificar que el número de excepciones es correcto en promedio Si calculamos estimaciones de VaR para el período $t = 1, \dots, m$, esperamos que $\sum_{t=1}^m I_t \approx B(m, 1 - \alpha)$. La cantidad correcta de excepciones puede ser verificada implementando un test binomial a dos colas (Kupiec [1995]).

Verificar que el patrón de excepciones sea consistente con un comportamiento iid La independencia de las excepciones puede ser verificada implementando un conteo de series sucesivas de ceros y unos, buscando descartar la presencia de repeticiones inesperadamente largas (Christoffersen [1998]).

Nota 8. *La verificación de la independencia de las excepciones es en general llevada a cabo en forma separada de la verificación de su patrón, tanto respecto de su frecuencia (testeos de VaR) como de su magnitud (testeos de ES).*

4.2 Backtesting de Pérdida Esperada

En forma análoga buscamos una formulación sobre cómo medir la performance de un método de estimación ES. Usando el Lema 2.3.1 tenemos que para una distribución de pérdidas continua se debe cumplir la identidad

$$\mathbb{E}[(L_{t+1} - \text{ES}_{t,\alpha}) \cdot I(L_{t+1} > \text{VaR}_{\alpha,t})] = 0,$$

lo que sugiere mirar las diferencias $L_{t+1} - \hat{\text{ES}}_{\alpha,t}$ realizadas en los días en los que las pérdidas exceden la estimación de VaR, cuya distribución debería tener media nula.

4.2.1 Tests propuestos

Sean (L_1, \dots, L_N) las pérdidas financieras distribuidas según F_t (desconocida) y sea P_t un modelo predictivo de F_t condicional a la información disponible a tiempo t que fue usada para estimar VaR y ES. Denotaremos mediante $\text{VaR}_{\alpha,t}^F$ y $\text{ES}_{\alpha,t}^F$ los valores de dichas medidas de riesgo cuando $L \sim F$. Las vas $\{L_t\}_{t=1 \dots T}$ se asumen independientes, pero no idénticamente distribuidas, pues no se restringe la variabilidad de F_t y P_t en función del tiempo. Suponemos además que las distribuciones estudiadas son continuas y estrictamente crecientes, por lo que ES queda expresado como

$$\text{ES}_{\alpha,t} = \mathbb{E}[L_t | L_t > \text{VaR}_{\alpha,t}] \quad (4.1)$$

En base a estas suposiciones presentamos a continuación dos tests que permiten medir la performance de una estimación de ES. Para ambos, la hipótesis nula asume que la predicción es correcta, en tanto que la alternativa debe ser elegida en la dirección que subestime la estimación de riesgo. Esto va en línea con el test de VaR propuesto por Basilea, que busca detectar sólo excesos en la cantidad de excepciones de VaR.

Test 1: testeo de ES posterior a VaR El primer test está inspirado en la expectativa condicional dada por la Ecuación (4.1), de la cual podemos derivar

$$\mathbb{E} \left[1 + \frac{L_t}{\text{ES}_{\alpha,t}} \middle| L_t > \text{VaR}_{\alpha,t} \right] = 0 \quad (4.2)$$

Si VaR_{α} fue previamente testado podemos testear individualmente la magnitud de las realizaciones que exceden la predicción de VaR_{α} . Para ello definimos el estadístico

$$Z_1(\mathbf{L}) := \frac{1}{N_T} \sum_{t=1}^T \frac{L_t I_t}{\text{ES}_{\alpha,t}} - 1 \quad (4.3)$$

sujeto a $N_T = \sum_{t=1}^T I_t > 0$. Para este test elegimos las hipótesis

$$H_0 : P_t^{[\alpha]} = F_t^{[\alpha]} \forall t$$

$$H_1 : \text{ES}_{\alpha,t}^F \geq \text{ES}_{\alpha,t} \forall t$$

$$\text{VaR}_{\alpha,t}^F = \text{VaR}_{\alpha,t} \forall t$$

donde $P_t^{[\alpha]}$ es la distribución en el extremo $l > \text{VaR}_{\alpha,t}$. El motivo por el cual VaR_{α} es considerado correcto incluso bajo H_1 es que este test se considera subordinado a un testeo previo de VaR. De hecho, este test es insensible a una cantidad excesiva de excepciones a VaR, dado que implica un promediado de dichas excepciones.

Bajo las hipótesis propuestas se verifican $\mathbb{E}_{H_0} [Z_1 | N_T > 0] = 0$ y $\mathbb{E}_{H_1} [Z_1 | N_T > 0] > 0$. Por lo tanto, el valor de $Z_1(\mathbf{L})$ calculado a partir de la muestra \mathbf{L} debería ser cero, exhibiendo una señal de problemas de modelado cuando es positiva.

Test 2: testeo de ES independiente El segundo test surge de la expectativa incondicional

$$\text{ES}_{\alpha,t} = \mathbb{E} \left[\frac{L_t I_t}{1 - \alpha} \right] \quad (4.4)$$

que sugiere definir

$$Z_2(\mathbf{L}) := \sum_{t=1}^T \frac{L_t I_t}{(1 - \alpha) T \cdot \text{ES}_{\alpha,t}} - 1 \quad (4.5)$$

Las hipótesis de este test son

$$H_0 : P_t^{[\alpha]} = F_t^{[\alpha]} \forall t$$

$$H_1 : ES_{\alpha,t}^F \geq ES_{\alpha,t} \forall t$$

$$VaR_{\alpha,t}^F \geq VaR_{\alpha,t} \forall t$$

para las cuales tenemos nuevamente $\mathbb{E}_{H_0} [Z_2] = 0$ and $\mathbb{E}_{H_1} [Z_2] > 0$. Notablemente, este resultado no requiere suponer la independencia de las $\{L_t\}$ (Acerbi and Szekely [2014]).

Nota 9. Este test evalúa en simultáneo la frecuencia y la magnitud de las excepciones a VaR, tal como surge de la relación

$$Z_2 = 1 - (1 - Z_1) \cdot \frac{N_T}{\alpha T}.$$

En consecuencia, cuando Z_2 rechaza la hipótesis nula, no especifica si es debido a una estimación errónea de VaR (frecuencia de las excepciones) o de ES (magnitud de las excepciones).

4.2.2 Significancia estadística

Ambos test podrían haber sido definidos bajo la hipótesis nula (más débil)

$$H'_0 : ES_{\alpha,t}^F = ES_{\alpha,t} \forall t$$

$$VaR_{\alpha,t}^F = VaR_{\alpha,t} \forall t$$

y aún así los resultados presentados seguirían siendo válidos. Sin embargo, dado que para medir la significancia estadística de una dada muestra debemos construir la distribución bajo H_0 del estadístico asociado a cada test, tal elección no sería suficiente para simular la distribución de los respectivos estadísticos y computar a partir de ellas el *p-values* de dicha muestra.

Dada $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_T)$ una serie de realizaciones de las pérdidas de un portafolio, medimos su significancia estadística siguiendo los siguientes pasos:

1. Simular M realizaciones (escenarios) de igual longitud T que la serie de estimaciones de riesgo, (L_1^m, \dots, L_T^m) con $1 \leq t \leq T$ y $1 \leq m \leq M$, tales que $L_t^m \sim P_t \forall t$.
2. Para cada uno de los M escenarios computar $Z^m = Z(\mathbf{L}^m)$, con $Z \in \{Z_1, Z_2\}$ el estadístico de alguno de los tests propuestos.
3. Estimar el p -value de la muestra mediante $p = 1/M \cdot \sum_{m=1}^M I(Z^m < Z(\mathbf{L}))$.

M es una cantidad razonablemente grande de escenarios y, dado un nivel de significación (cl), la hipótesis nula es aceptada/rechazada si $p \leq cl$.

4.2.3 Aplicación del método

Retomemos el caso presentado al inicio de este capítulo, en el cual tomamos la serie de datos del Caso tStudent($\nu = 5$), 5000 obs y, considerándola una serie temporal, estimamos mediante los tres métodos empleados las medidas de riesgo VaR y ES. A continuación, comparamos cada estimación de riesgo realizada en un paso temporal con la pérdida realizada en el paso siguiente, generando en consecuencia una serie de excepciones a la estimación de VaR. Los resultados de este cálculo fueron presentados en la Figura 4.2, en tanto que análisis preliminares de la serie de excepciones fueron presentados en la Tabla 4.1. En ella hemos observado un comportamiento muy similar entre las estimaciones de los métodos HS y POT, y a su vez bien diferenciado de aquél del método MV; por tal motivo sólo comparamos los últimos dos.

Backtest del método MV Comencemos analizando las estimaciones de ES obtenidas mediante el método MV. En la Figura 4.3 presentamos la cdf de los estadísticos de ambos tests considerados bajo sus respectivas hipótesis nulas, para los dos valores elegidos de α . Además mostramos el valor del estadístico de la muestra estudiada y un $cl = 0.95$.

Para las estimaciones al 95%, la Tabla 4.1 muestra que la fracción de excesos es razonable, por lo que un testeo previo de VaR no debería rechazar la hipótesis nula. Respecto de los tests, el primero de ellos rechaza la hipótesis nula. Esto indica que, si un testeo previo no rechazó la hipótesis nula (como es el caso en cuestión), entonces debemos rechazar la estimación de ES por

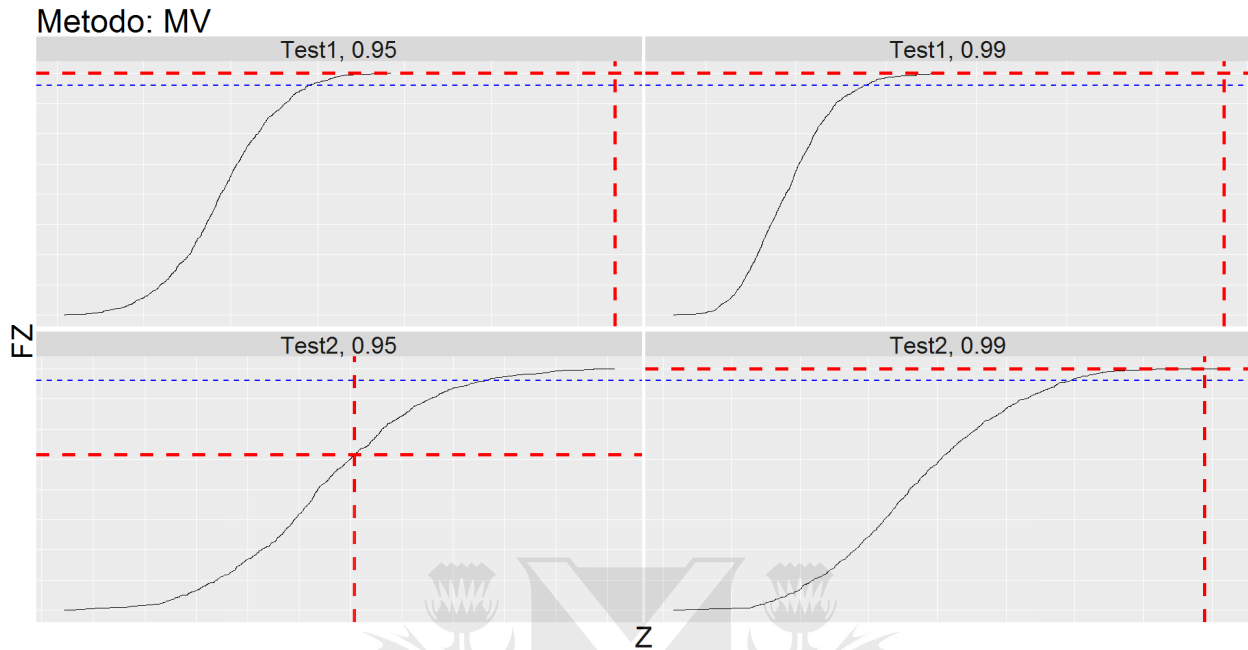


Figura 4.3: *Backtest* de la estimación de ES del método MV para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 5000 obs.

subestimar el riesgo. De hecho, la mencionada tabla muestra una media de las excepciones de VaR bastante mayor a la media de las estimaciones de ES. A su vez, el segundo test no rechaza la hipótesis nula, lo que indica que en forma conjunta no podemos rechazar las estimaciones de VaR y ES. Esto es razonable porque, como fue mencionado, el bajo número de excepciones observado implica un valor alto en la estimación de VaR y, por lo tanto, un promedio alto por ser realizado entre las pocas pérdidas (las de mayor valor) que lo exceden.

Por otro lado, para las estimaciones al 99%, la Tabla 4.1 muestra una tasa de excesos ligeramente elevada, por lo que un testeo previo de VaR podría no rechazar la hipótesis nula. Si lo hiciera, prácticamente no habría más que analizar; pero si no lo hiciera, el primer test rechaza la hipótesis nula, por lo que debemos rechazar la estimación de ES por subestimar el riesgo. A su vez, el segundo test también rechaza la hipótesis nula lo que indica que también en forma conjunta debemos rechazar las estimaciones de VaR y ES. Esto es razonable porque, más allá de que el alto número de excepciones observado implica un valor bajo en la estimación de VaR y, por lo

tanto, un promedio bajo por incluir entre las excepciones algunas pérdidas no extremas, aún así la estimación de ES es excesivamente baja.

De este modo vemos que al ser aplicados junto a un test previo de VaR, estos dos tests permiten expresar en términos cuantitativos las observaciones cualitativas hechas al presentar la Tabla 4.1.

Backtest del método POT Analicemos ahora las estimaciones de ES obtenidas mediante el método POT. En la Figura 4.4 presentamos la cdf de los estadísticos de ambos tests considerados bajo sus respectivas hipótesis nulas, para los dos valores elegidos de α . Además mostramos el valor del estadístico de la muestra estudiada y un $cl = 0.95$.

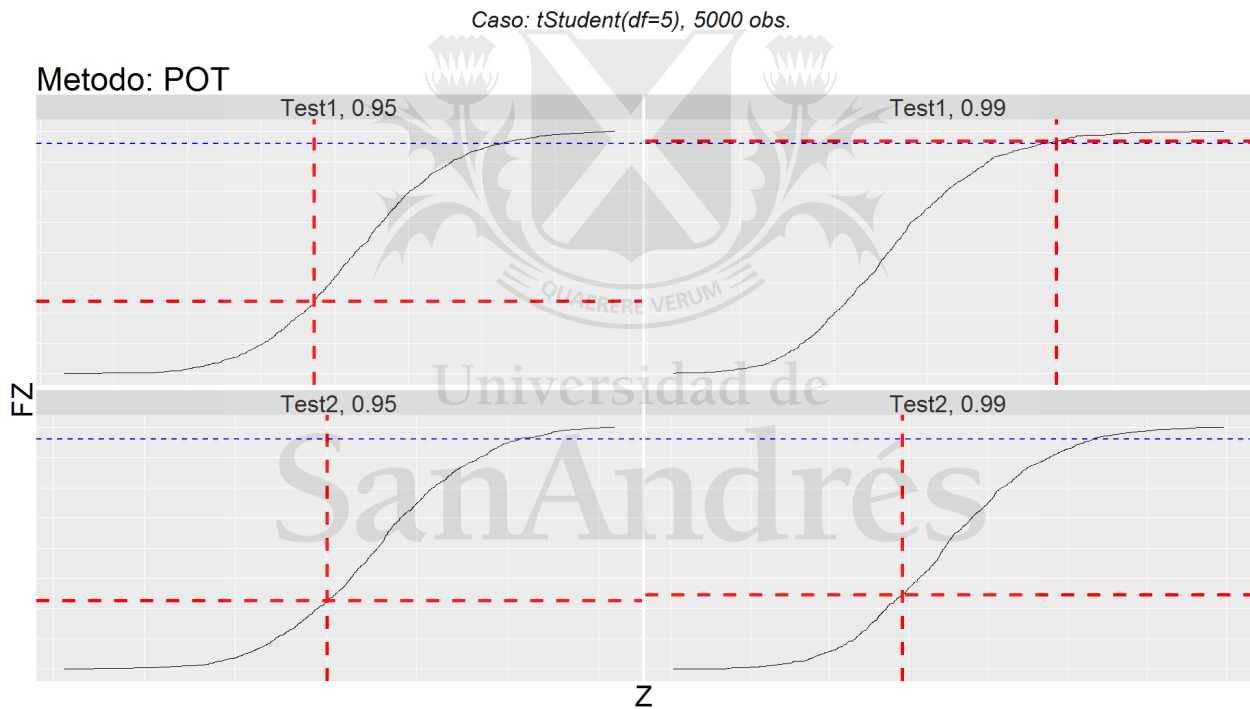


Figura 4.4: Backtest de la estimación de ES del método POT para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 5000 obs.

Para las estimaciones al 95%, la Tabla 4.1 muestra que la fracción de excesos es razonable, por lo que un testeo previo de VaR no debería rechazar la hipótesis nula. Respecto de los tests, ninguno rechaza la hipótesis nula. Esto indica que no podemos rechazar ni individualmente la estimación de ES ni conjuntamente las estimaciones de VaR y ES. De hecho, la mencionada tabla muestra una media de las excepciones de VaR prácticamente igual a la media de las estimaciones de ES.

Por otro lado, para las estimaciones al 99%, la Tabla 4.1 muestra una tasa de excesos ligeramente baja, por lo que un testeo previo de VaR podría rechazar la hipótesis nula por sobreestimar el riesgo. En caso que no lo hiciera, el primer test estaría al límite de rechazar la hipótesis nula, indicando que la estimación de ES subestimaría ligeramente el riesgo. Esto es razonable porque una sobreestimación del VaR fuerza una media de las excepciones mayor a lo esperado. A su vez, el segundo test no rechaza la hipótesis nula, indicando que en forma conjunta no podemos rechazar las estimaciones de VaR y ES. Esto es razonable porque, dada una sobreestimación de VaR y por ende una baja cantidad de excepciones, su promedio resulta mayor que el esperado, y por lo tanto la estimación de ES menor que dicho promedio no se debe a una subestimación del ES, sino a una sobreestimación del VaR. Nuevamente comprobamos que, al ser aplicados junto a un test previo de VaR, estos dos tests permiten expresar en términos cuantitativos las observaciones cualitativas hechas al presentar la Tabla 4.1.

Para finalizar esta exposición, y siguiendo la idea empleada en el capítulo anterior (ver la Sección 3.3.2), presentaremos a continuación los resultados obtenidos al analizar una serie con idéntica distribución subyacente pero menor cantidad de historia disponible para construir las estimaciones. Al hacerlo buscamos testear la capacidad de cada método de producir estimaciones fiables aún con series de datos reducidas, como suele suceder en la práctica (notemos que el caso anterior implicaba disponer de 20 años de datos). Por ello elegimos como serie de pérdidas el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 1000 obs, que implica disponer de 4 años de datos.

En la Figura 4.5 mostramos la serie de pérdidas considerada y las estimaciones de VaR y ES, y resaltamos las pérdidas que exceden la estimación de VaR. A partir de dicha figura construimos las estadísticas presentadas en la Tabla 4.2. En ella observamos un comportamiento muy similar entre las estimaciones de HS y POT, aún cuando el segundo de ellos posee tasas de excesos más cercanas a los valores esperados (que al 99% son considerablemente superiores a ellos).

Al analizar las estimaciones al 95%, la Tabla 4.2 muestra que la fracción de excesos es razonable para ambos métodos, por lo que un testeo previo de VaR no debería rechazar la hipótesis nula en ninguno de los dos casos. Para el método MV, el primer test (ver la Figura 4.6) rechaza

Caso: $tStudent(df=5)$, 1000 obs.

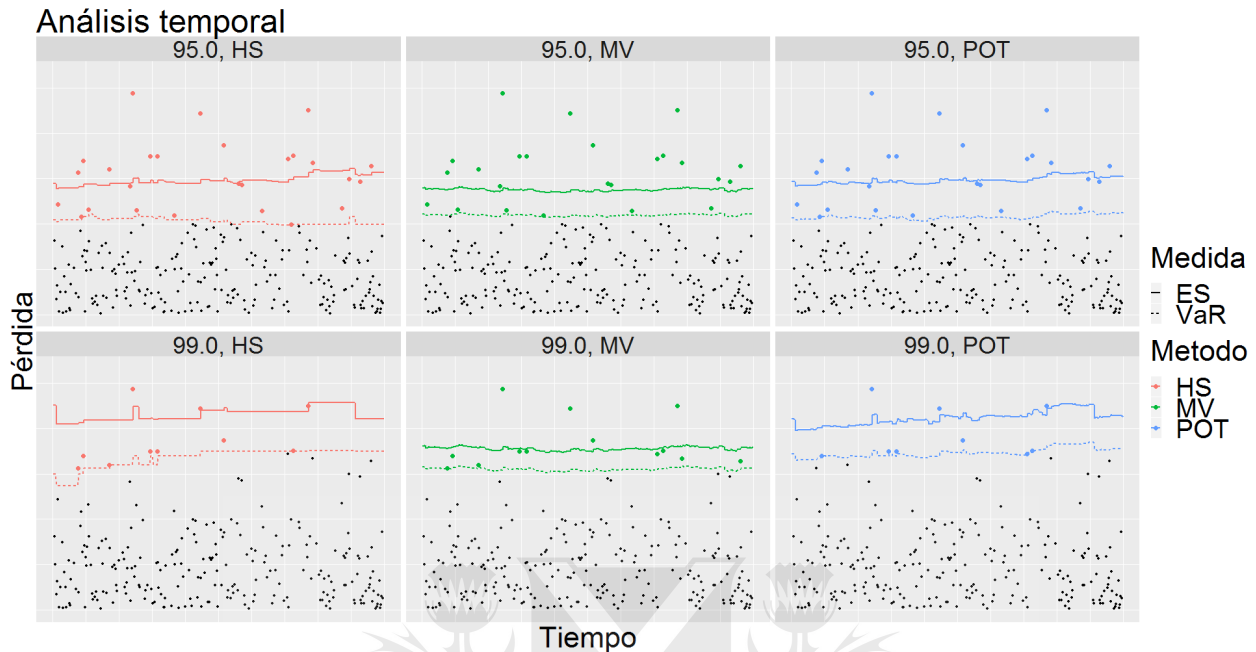


Figura 4.5: Análisis temporal del Caso $tStudent(\nu = 5)$, 1000 obs: excepciones a la estimación de VaR.

Método	α [%]	# Excesos[%]	Media($L L > VaR$)	Media(ES)
HS	95	5.20	3.09	2.97
HS	99	2.00	3.78	4.31
MV	95	4.80	3.17	2.75
MV	99	2.60	3.68	3.56
POT	95	5.00	3.13	2.96
POT	99	1.80	3.87	4.23

Tabla 4.2: Estadísticas de la distribución de los excesos a la estimación de VaR, mediante los tres métodos empleados, para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 1000 obs.

la hipótesis nula, no así el segundo test. Esto indica que la estimación de ES puede ser rechazada en forma condicional a una verificación previa de VaR, sin embargo las estimaciones conjuntas de VaR y ES no son rechazadas. Para el método POT (ver la Figura 4.7), ambos tests aceptan la hipótesis nula. Basados en argumentos similares a los expuestos para el caso anterior, el comportamiento descrito para ambos tests es consistente con los valores presentados en la Tabla 4.2.

Para las estimaciones al 99%, la Tabla 4.2 muestra una tasa de excesos bastante elevada, por lo que un testeo previo de VaR debería rechazar la hipótesis nula. Si no fuera así para el método MV, y dado que el primer test no rechaza la hipótesis nula, entonces no podemos rechazar la estimación

de ES (esto es consecuencia de la fuerte subestimación del riesgo en la estimación de VaR, que hemos asumido no rechazada). A su vez, el segundo test rechaza la hipótesis nula, lo que indica que las estimaciones de VaR y ES no son en forma conjunta compatibles con la muestra observada. Nuevamente, si un testeo previo de VaR tampoco rechazara la hipótesis nula para el método POT, no podríamos ni rechazar la estimación individual de ES ni la conjunta de VaR y ES.

Caso: $tStudent(df=5)$, 1000 obs.

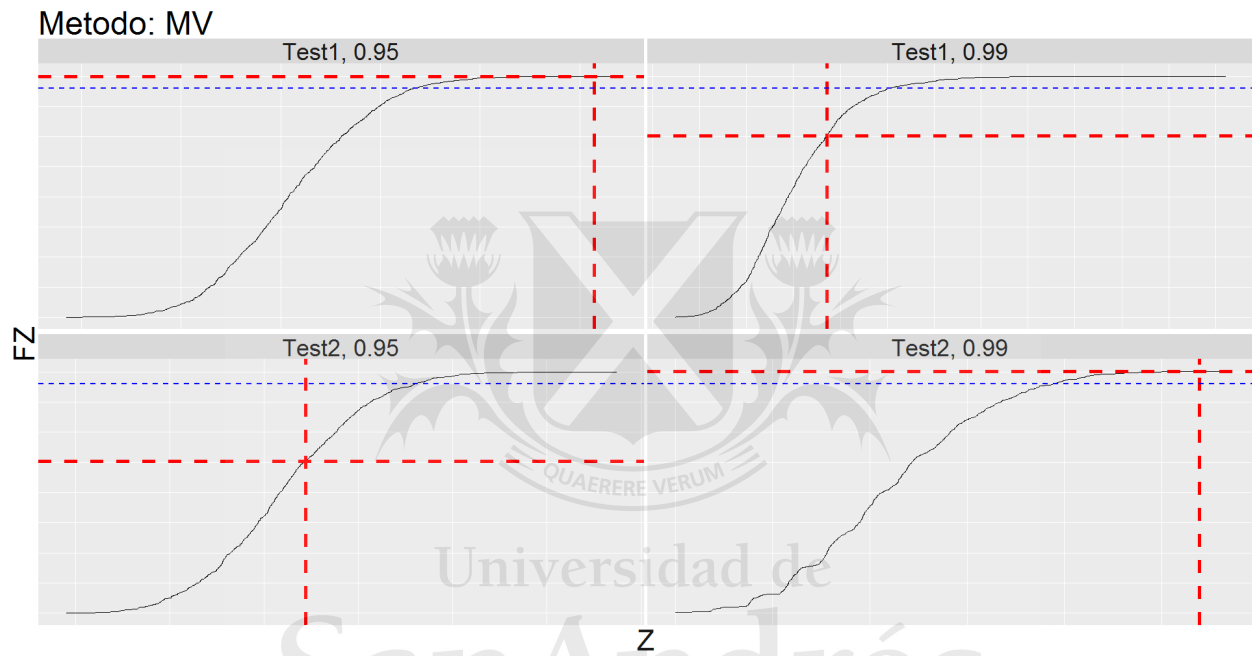


Figura 4.6: Backtest de la estimación de ES del método MV para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 1000 obs.

Caso: $tStudent(df=5)$, 1000 obs.

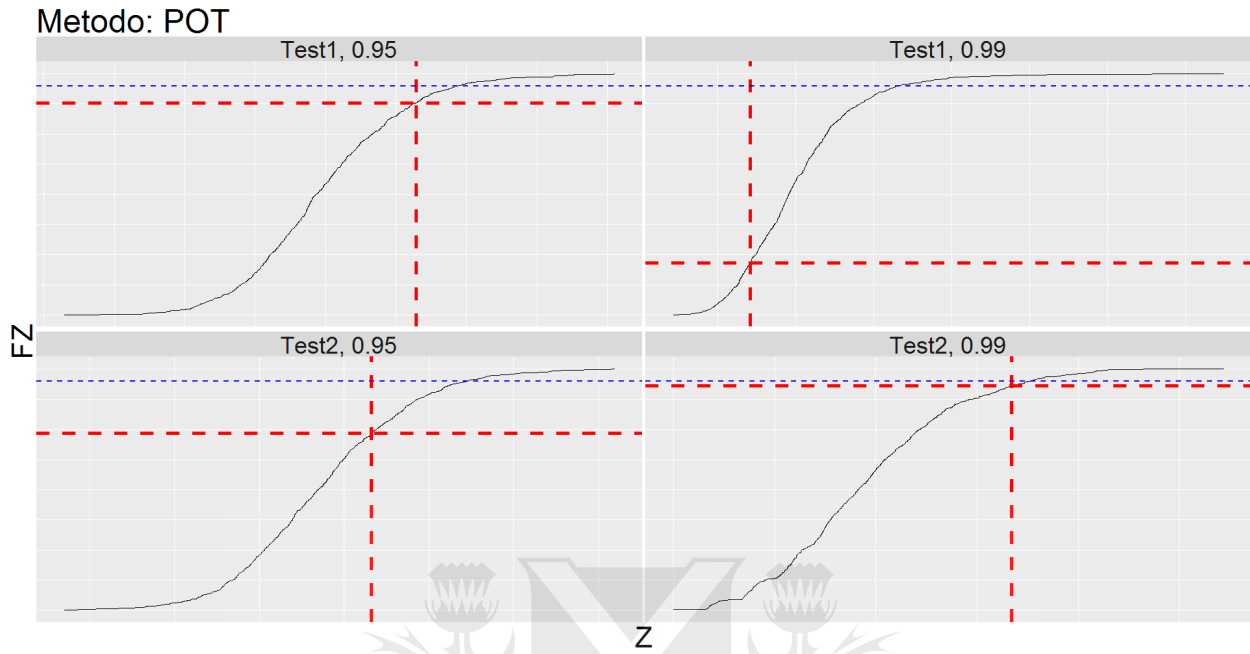


Figura 4.7: Backtest de la estimación de ES del método POT para el Caso $tStudent(\nu = 5)$, 1000 obs.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Como parte de su *Fundamental Review of the Trading Book* (FRTB), el *Basel Committee on Banking Supervision* (BCBS) propuso cambiar la medida oficial de riesgo, dejando atrás a Valor puesto a Riesgo (VaR) luego de más de 20 años de vigencia, e introduciendo a Pérdida Esperada (ES), a fin de tomar en consideración el riesgo extremo implícito en la distribución de pérdidas. Por otro lado, estimar confiablemente la probabilidad y magnitud de eventos financieros severos es intrínseco a la gestión del riesgo de un portafolio financiero. Por estos motivos es imprescindible contar con métodos de estimación del riesgo extremo, y de técnicas adecuadas para validarlos. Este último punto ha sido objeto de numeroso debate, principalmente por la posibilidad de que el *backtesting* de ES fuera imposible desde el punto de vista teórico, por no poseer la propiedad de *elicibilidad* (Gneiting [2011]).

En este trabajo hemos abordado los dos aspectos asociados a la estimación del riesgo extremo: el modelado de distribuciones extremas y el *backtest* de sus predicciones.

En primera instancia, basándonos principalmente en McNeil [1999], McNeil et al. [2005], Ünal [2011], Gilli and Kellezi [2006] y Ünal [2011] sobre la teoría de valores extremos (EVT), que aporta fundamentos sólidos para el modelado de eventos extremos, implementamos un método de estimación de las medidas de riesgo VaR y ES mediante el modelado de los excesos sobre un umbral (POT). Luego comparamos, para diversas series de datos generadas numéricamente, las estimaciones de nuestra implementación con aquellas obtenidas mediante dos métodos estándar: Simulación histórica y Media-varianza. Mediante dicha comparación hemos validado nuestra implementación al analizar series de datos de gran longitud, y hemos comprobado que el método basado en POT genera menor cantidad de excepciones a VaR extremo cuando es aplicado en forma sistemática en el marco de un proceso continuo de predicción de eventos extremos y contrastación contra las pérdidas realizadas.

No obstante, dos puntos de esta etapa han quedado abiertos a futuros desarrollos. Por un lado, nuestra implementación requiere una optimización del algoritmo de detección del umbral, pues actualmente hace demorar al método varios órdenes de magnitud más que los alternativos, y carece de un nivel de rigurosidad compatible con la sensibilidad que muestra el método ante este parámetro. Por otro lado, más casos (tanto generados numéricamente como realizaciones de instrumentos reales) deben ser analizados para definir claramente en qué contextos el uso de esta teoría juega un rol determinante.

En segunda instancia, basándonos en Acerbi and Szekely [2014] implementamos un método de validación de estimaciones de ES en función del análisis de la magnitud y la frecuencia de las excepciones a VaR. Luego sometimos a algunas de las series generadas en la primera etapa, y a las estimaciones de riesgo obtenidas a partir de ellas en el marco del proceso continuo de predicción de eventos extremos, al método de validación implementado. La metodología mostró arrojar conclusiones cuantitativas compatibles con la intuición cualitativa derivada de análisis básicos de las excepciones.

Habiendo confirmado la posibilidad de validar modelos de estimación de ES, queda pendiente para trabajos futuros analizar formulaciones alternativas, buscando nuevamente entender en qué casos cada uno supera a los otros.

Aún cuando varias interrogantes han quedado abiertas, planteadas tanto a lo largo del escrito como en estas conclusiones, consideramos que este trabajo ha cumplido con su objetivo doble de introducirnos en el tópico de la estimación de medidas de riesgo mediante el uso de la teoría de valores extremos, y en el de validación de las estimaciones de Pérdida Esperada basados en las excepciones a la estimación de Valor puesto a Riesgo.

Bibliografía

Pilar Abad, Sonia Benito, and Carmen López. A comprehensive review of value at risk methodologies. *The Spanish Review of Financial Economics*, 12(1):15–32, 2014. doi: 10.1016/j.srfe.2013.06.001.

Carlo Acerbi and Balazs Szekely. Backtesting expected shortfall. *MSCI Inc*, 2014.

Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228, 1999. URL <https://EconPapers.repec.org/RePEc:bla:mathfi:v:9:y:1999:i:3:p:203-228>.

A. Balkema and Laurens de Haan. Residual life time at great age. *The Annals of Probability*, 2:792–804, 10 1974. doi: 10.1214/aop/1176996548.

Basel Committee on Banking Supervision. Messages from the academic literature on risk measurement for the trading book. 01 2011.

Bensalah. Steps in applying extreme value theory to finance: A review. 2000.

Peter Christoffersen. Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, 39:841–862, 1998.

Paul Embrechts, Bin Wang, and Ruodu Wang. Aggregation-robustness and model uncertainty of regulatory risk measures. 2014.

Vicky Fasen, Claudia Kuppelberg, and Annette Menzel. Quantifying extreme risks. 2013.

Ronald Fisher and Leonard Henry Caleb Tippett. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24:180–190, 1928.

Manfred Gilli and Evis Kellezi. An application of extreme value theory for measuring financial risk. *Computational Economics*, pages 27(2):207–228, 2006.

- Tilmann Gneiting. Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, pages 106(494):746–762, 2011.
- Jenkinson. The frequency distribution of the annual maximum (minimum) values of meteorological events. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, pages 81:158–172, 1955.
- Paul Kupiec. Techniques for verifying the accuracy of risk management models. *Journal of Derivatives*, 3:73–84, 1995.
- François Longin. Value at risk: Une nouvelle approche fondée sur les valeurs extrêmes. *Annales d'Economie et Statistiques*, 52:1–29, 1998. doi: 10.1016/S0378-4266(99)00077-1.
- Alexander McNeil. Extreme value theory for risk managers. 1999.
- Alexander McNeil, Rudiger Frey, and Paul Embrechts. *Quantitative risk management: concepts, techniques, and tools*. Princeton University Press, 2005.
- Saralees Nadarajah, Bo Zhang, and Stephen Chan. Estimation methods for expected shortfall. *Quantitative Finance*, 14(2):271–291, 2014. URL <https://doi.org/10.1080/14697688.2013.816767>.
- Gözde Ünal. Value-at-risk forecasts: A comparison analysis of extreme-value versus classical approaches. *The Journal of Risk Model Validation*, 5:59–76, 09 2011. doi: 10.21314/JRMV.2011.074.
- Alfonso Novales Cinca and Laura Garcia-Jorcano. Backtesting extreme value theory models of expected shortfall. 08 2017.
- Basel Committee on Banking Supervision. International convergence of capital measurement and capital standards. 06 2004.
- James Pickands. Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of Statistics*, 3: 119–131, 1975.

Wimmerstedt. Backtesting expected shortfall: the design and implementation of different backtests.

Master's thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2015.



Universidad de
San Andrés